Решение типового варианта заданий по теме

"Дифференциальное исчисление функции одной переменной"

Автор:

ассистент кафедры высшей математики БГУИР

Василюк Людмила Ивановна

Содержание

2015

Задание 1.

Найдите значения производных для функций из задач а) и б) в точке x_0, исходя из определения производной в точке.

а) $y=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ $\quad x_0=0$**;** $\quad$ **б)** $y=\ln(3x-1)$**,** $x_0=x$**.**

Решение:

а) $y=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$. Очевидно, что область определения заданной функции $f(x)$ $D(f)=\mathbb{R}$.

Дадим $x_0=0$ приращение Δx, попадем в точку $x_0+\Delta x=\Delta x$. В этой точке значение функции равно $f(\Delta x)=\dfrac{e^{\Delta x^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}$.

Найдем приращение функции $f(x)$, которое она получает при переходе из точки $x_0=0$ в точку $x_0+\Delta x=\Delta x$:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)-f(0)=$$

$$=\frac{e^{\Delta x^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}-0=\frac{e^{\Delta x^2}-\cos\Delta x}{\Delta x}.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$: $\quad \dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{e^{\Delta x^2}-\cos\Delta x}{\Delta x^2}$.

Найдем производную функции $f(x)$ в точке $x_0=0$ вычислив предел $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при Δx стремящемся к нулю.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x^2}-\cos\Delta x}{\Delta x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{\Delta x^2}-1\right)+(1-\cos\Delta x)}{\Delta x^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta x^2\to 0,\\ e^{\Delta x^2}-1\sim \Delta x^2,\\ 1-\cos\Delta x\sim \dfrac{\Delta x^2}{2}.\end{array}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x^2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $f'(0)=\dfrac{3}{2}$;

б) $y=\ln(3x-1)$. Область определения функции y: $D(y)=\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Пусть $x\in D(y)$. Дадим переменной x приращение Δx и попадем в точку $x+\Delta x$. Найдем $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$:

$$y(x+\Delta x)=\ln(3(x+\Delta x)-1)$$

$$\Delta y=\ln(3(x+\Delta x)-1)-\ln(3x-1)=\ln\left(\frac{3(x+\Delta x)-1}{3x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{3\Delta x}{3x-1}\right).$$

Найдем $y'(x)$ вычислив $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$y'(x)=(\ln(3x-1))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{3\Delta x}{3x-1}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{3\Delta x}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{3\Delta x}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\left(1^{\infty}\right)=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{3\Delta x}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3\Delta x}}\right)^{\frac{3\Delta x}{\Delta x(3x-1)}}=$$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x(3x-1)}}=\ln e^{\frac{3}{3x-1}}=\frac{3}{3x-1}\ln e=\frac{3}{3x-1}.$$

Ответ: $y'(x)=(\ln(3x-1))'=\dfrac{3}{3x-1}$.

Задание 2.

Даны кривая, имеющая уравнение $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$**, и прямая** $l:\quad x+9y-5=0$**. Составьте уравнение такой касательной к кривой, которая параллельна прямой** l**. Укажите координаты точки касания.**

Решение

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке касания $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$l_k:\quad y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$, где $y'(x_0)$ – значение производной функции $y=f(x)$ в точке касания.

Поскольку $l_k \parallel l$, то их угловые коэффициенты должны быть равны.

$$l:\quad x+9y-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{1}{9}x+\frac{5}{9},\quad k_l=-\frac{1}{9}.$$

Значит $k_{l_k}=y'(x_0)=-\dfrac{1}{9}$.

Найдем $y'(x)$.

$$y'(x)=\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2}\right)'=\left(1-3x^{-1}+6x^{-2}\right)'=(1)'+\left(-3x^{-1}\right)'+\left(6x^{-2}\right)'=$$

$$=0-3\cdot\left(x^{-1}\right)'+6\left(x^{-2}\right)'=3x^{-2}-12x^{-3}=3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right).$$

Найдем x_0 – абсциссу точки касания, решив уравнение $y'(x_0)=-\dfrac{1}{9}$:

$$3\cdot\frac{x-4}{x^3}=-\frac{1}{9}.$$

$$x^3+27(x-4)=0.$$

Очевидно, что $x=3$ – корень этого уравнения: $3^3+27(3-4)=0$.

Будем искать остальные корни этого уравнения разложив многочлен $x^3-27x-108$ на множители:

$$x^3-27x-108=(x-3)\cdot P_2(x),$$

$$\left(x^3-3x^2\right)+\left(3x^2-9x\right)+(36x-108)=0,$$

$$(x-3)\left(x^2+3x+36\right)=0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2+3x+36$ $D=3^2-4\cdot 36<0$, то $x=3$ – единственный корень уравнения, $x_0=3$ – абсцисса точки касания.

$$y_0=y(x_0)=y(3)=\frac{3^2-3\cdot 3+6}{3^2}=\frac{2}{3},$$

$M_0\left(3;\frac{2}{3}\right)$ – точка касания,

$$y'(x_0)=y'(3)=-\frac{1}{9}.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$l_k:\quad y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}(x-3)\quad\Leftrightarrow\quad 9y-6+x-3=0\quad\Leftrightarrow\quad x+9y-9=0.$$

Ответ: $l_k:\quad x+9y-9=0.$

$M_0\left(3;\frac{2}{3}\right)$ – точка касания.

Задание 3.

Найдите производную $f'(x)$ **функции**

$$f(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5 - \frac{\arcsin \frac{4}{7} x}{\sqrt[3]{4x}} + \operatorname{tg}^3 \pi x.$$

Решение

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где

$$f_1(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5; \qquad f_2(x) = -\frac{\arcsin \frac{4}{7} x}{\sqrt[3]{4x}}; \qquad f_3(x) = \operatorname{tg}^3 \pi x.$$

$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x)$ – производная суммы конечного числа функций равна сумме производных этих функций.

Найдем $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, $f_3'(x)$.

1) $f_1(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5$. Эта функция представляет собой произведение числа $\operatorname{tg} 3$ и сложной функции $\ln(4x-5)^5$ – логарифмическая функция с основанием e образована от степени с показателем 5 линейного выражения $(4x-5)$.

$$\left(\ln(4x-5)^5\right)' = \frac{1}{(4x-5)^5}\left((4x-5)^5\right)' = \frac{1}{(4x-5)^5} \cdot 5(4x-5)^4(4x-5)' =$$

$$= \frac{5}{4x-5} \cdot 4 = \frac{20}{4x-5}.$$

Производную этой функции можно найти проще, если предварительно упростить формулу задания:

$$\left(\ln(4x-5)^5\right)' = \left(5\ln(4x-5)\right)' = 5 \cdot \left(\ln(4x-5)\right)' = 5 \cdot \frac{1}{4x-5} \cdot (4x-5)' =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{4x-5} = \frac{20}{4x-5}.$$

Поскольку $(C \cdot f(x))' = Cf'(x)$, где $C = \mathrm{const}$, то

$$f_1'(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \frac{20}{4x-5} = \frac{20 \operatorname{tg} 3}{4x-5};$$

2) $f_2(x) = -\dfrac{\arcsin\frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}$. Эта функция представляет собой частное двух функций $u = \arcsin\frac{4}{7}x$ и $v = \sqrt[3]{4x}$ перед которым стоит коэффициент (-1). Используя правило дифференцирования частного двух функций

$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ вычислим $f_2{}'(x)$:

$$f_2{}'(x) = -1\frac{\left(\arcsin\frac{4}{7}x\right)'\cdot\sqrt[3]{4x} - \arcsin\frac{4}{7}x\cdot\left(\sqrt[3]{4x}\right)'}{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\arcsin\frac{4}{7}x\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - \sqrt[3]{4x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{7}x\right)^2}}\cdot\left(\frac{4}{7}x\right)'}{\sqrt[3]{16x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{4}{7}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{49}x^2}}\right)}{\sqrt[3]{16x^2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - \dfrac{4x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{49-16x^2}}\right)\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{49-16x^2}\cdot 3}{\sqrt[3]{4}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{49-16x^2}\cdot 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot x\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{49-16x^2}}.$$

$$f_2{}'(x) = \frac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x - 12x}{3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot x\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{49-16x^2}};$$

3) $f_3(x)=\operatorname{tg}^3\pi x$. Эта функция сложная, представляет собой степенную функцию с показателем степени 3, образованную от тангенса который, в свою очередь, образован от функции πx. Поэтому

$$f_3'(x)=\left(\operatorname{tg}^3\pi x\right)'=3\operatorname{tg}^2\pi x\cdot(\operatorname{tg}\pi x)'=3\operatorname{tg}^2\pi x\cdot\frac{1}{\cos^2\pi x}\cdot(\pi x)'=3\pi\frac{\operatorname{tg}^2\pi x}{\cos^2\pi x}.$$

$$f_3'(x)=3\pi\frac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}$$

$$f'(x)=\frac{20\operatorname{tg}3}{4x-5}+\frac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x-12x}{3x\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt{49-16x^2}}+3\pi\frac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}.$$

Производная функции находится по этой формуле для $x\in D(f)$ – области определения функции $y=f(x)$.

Найдем $D(f)$:

$$D(f):\quad \begin{cases}4x-5>0,\\ \left|\frac{4}{7}x\right|\le 1,\\ x\ne 0,\\ \pi x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{4},\\ |x|\le\frac{7}{4},\\ x\ne 0,\\ x\ne\frac{1}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right].$$

Т. е. $D(f)=\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$.

Ответ: $f'(x)=\frac{20\operatorname{tg}3}{4x-5}+\frac{\sqrt{49-16x^2}\cdot\arcsin\frac{4}{7}x-12x}{3x\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot\sqrt{49-16x^2}}+3\pi\frac{\sin^2\pi x}{\cos^4\pi x}$ для $x\in\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$.

Задание 4.

Найдите производную функции $f(x)=\left(\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}$.

Решение

$D(f(x))=\mathbb{R}$. $f(x)$ – сложная функция – показательная с основанием $a=\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}>0$. В показателе степени $g(x)=\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)$.

$$f'(x)=\left(\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}\right)'=$$

$$=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)\right)'.$$

Функция $g(x)=\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)$ – сложная – $\operatorname{arcctg}\varphi(x)$, где $\varphi(x)=\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)$, поэтому

$$f'(x)=\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1+\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)^2}\right)\times$$

$$\times\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)'.$$

Функция $\varphi(x)=\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)$ – сложная – степенная с показателем 2 образована от функции $u(x)=\sin\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)$ поэтому

$$f'(x)=-\frac{\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{1+\sin^4\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)}\cdot 2\sin\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\times$$

$$\times\left(\sin\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)'.$$

Функция $u(x)=\sin\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)$ – сложная – синус образован от функции $w(x)=\cos\left(1-3x^2\right)$.

$$f'(x) = -\frac{\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)} \cdot \ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot 2\sin\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)}{1+\sin^4\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)} \times$$

$$\times \cos\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right) \cdot \left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)'.$$

Функция $w(x) = \cos\left(1-3x^2\right)$ – сложная – косинус образован от суммы.

$$f'(x) = -\frac{\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \sin\left(2\cos\left(1-3x^2\right)\right) \cdot \left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}}{1+\sin^4\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)} \times$$

$$\times \left(-\sin\left(1-3x^2\right)\right) \cdot \left(1-3x^2\right)'.$$

Ответ:

$f'(x) =$

$$= \frac{-6x\sin\left(1-3x^2\right)\ln\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\sin\left(2\cos\left(1-3x^2\right)\right)\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\operatorname{arcctg}\left(\sin^2\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)\right)}}{1+\sin^4\left(\cos\left(1-3x^2\right)\right)}.$$

Задание 5.

Найдите производную $f'(x)$ **функции** $f(x) = \left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

Решение

Функция $y = f(x)$ является степенно-показательной, так как имеет вид $f(x) = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) = x^2+1$, $v(x) = \cos x$, $D(f(x)) = \mathbb{R}$.

Найдем производную $f'(x)$ с помощью логарифмического дифференцирования $f(x) = u(x)^{v(x)}$:

$$\ln f(x) = \ln u(x)^{v(x)},$$

$$\ln f(x) = v(x)\cdot \ln u(x),$$

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(v(x)\cdot \ln u(x)\right)',$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$

$$f'(x) = f(x)\left(v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Прологарифмируем левую и правую часть формулы заданной функции и получим

$$\ln f(x) = \cos x\cdot \ln\left(x^2+1\right).$$

По свойствам логарифмов в правой части полученного равенства показатель степени подлогарифмической функции вынесен множителем перед логарифмом.

Дифференцируем левую и правую часть равенства. Слева берем производную сложной функции, а справа – производную произведения:

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\cos x\cdot \ln\left(x^2+1\right)\right)',$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (\cos x)'\cdot \ln\left(x^2+1\right) + \cos x\cdot \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x\cdot \ln\left(x^2+1\right) + \frac{\cos x}{x^2+1}\cdot \left(x^2+1\right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x\cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x\cdot \ln\left(x^2+1\right).$$

А значит

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\frac{2x\cdot \cos x}{x^2+1} - \sin x\cdot \ln\left(x^2+1\right)\right),$$

$$f'(x)=\left(x^2+1\right)^{\cos x}\cdot\left(\frac{2x\cdot\cos x}{x^2+1}-\sin x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right).$$

Ответ: $f'(x)=\left(x^2+1\right)^{\cos x}\cdot\left(\frac{2x\cdot\cos x}{x^2+1}-\sin x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right).$

Задание 6.

Для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ найдите y'_x и y''_{xx}. Вычислите $y'_x(t_0)$ и $y''_{xx}(t_0)$ для заданного значения t_0. Определите, под каким углом касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, пересекает ось *Ox*.

$$\begin{cases} x = \dfrac{5t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{5t^2}{1+t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad M_0(2; 4).$$

Решение

Функции $x = x(t) = \dfrac{5t}{1+t^2}$ и $y = y(t) = \dfrac{5t^2}{1+t^2}$ определены и непрерывны для $t \in \mathbb{R}$.

Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:

$$\begin{cases} dx = d\left(\dfrac{5t}{1+t^2}\right) = \left(\dfrac{5t}{1+t^2}\right)' dt, \\ dy = d\left(\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right) = \left(\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right)' dt. \end{cases}$$

Далее разделим второе уравнение на первое и, с учетом того что $\dfrac{dy}{dx} = y'_x$, получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{\left(\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\dfrac{5t}{1+t^2}\right)'} = \frac{2t\left(1+t^2\right) - t^2 \cdot 2t}{t^2 + 1 - t \cdot 2t} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Или, при поиске y'_x, можно было воспользоваться готовой формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_x\Big|_{t_0 = 2} = \frac{2 \cdot 2}{1-2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Для нахождения второй производной $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''_{xx}$ выполним следующие преобразования:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''_{xx}=\left(y'_x\right)_x'=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t},\quad \text{т. е.}\quad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t},$$

$$y'_x=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow\left(y'_x\right)_t'=2\frac{\left(1-t^2\right)-t\cdot(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}=2\frac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2},$$

$$x'_t=\left(\frac{5t}{1+t^2}\right)'=5\frac{1+t^2-t\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2}=5\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Значит

$$y''_{xx}=\frac{2\dfrac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}}{5\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{2}{5}\left(\frac{t^2+1}{1-t^2}\right)^3.$$

$$y''_{xx}\Big|_{t_0=2}=\frac{2}{5}\left(\frac{2^2+1}{1-2^2}\right)^3=\frac{2\cdot 5^3}{5\cdot(-3)^3}=-\frac{50}{27}.$$

Уравнение касательной, проведенной к графику данной функции в точке $M_0(2;4)$ имеет вид:

$$y-4=y'_{(M_0)}(x-2).$$

$y'_{(M_0)}=tg\alpha$, где α – угол наклона касательной (угол, который образует касательная с положительным направлением оси Ox).

Поскольку $y'_x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, нам надо найти t, при котором $\begin{cases}x(t)=2=x_0,\\ y(t)=4=y_0,\end{cases}$ где $(x_0;y_0)$ – координаты заданной точки M_0 – точки касания с графиком функции. Т. е. найдем t из системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{5t}{1+t^2}=2,\\[2mm] \dfrac{5t^2}{1+t^2}=4,\end{cases}\quad\Rightarrow t=2.$$

Итак, $tg\alpha = y'_x\Big|_{t=2} = -\dfrac{4}{3}$,

$\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $y'_x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\quad y'_x\Big|_{t_0=2} = -\dfrac{4}{3}$;

$y''_{xx} = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3$, $\quad y''_{xx}\Big|_{t_0=2} = -\dfrac{50}{27}$;

$\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Задание 7.

Для заданной функции $y(x)$ в указанной точке x_0 найдите значения производной и дифференциала k-го порядка:

$$y=\frac{5x+1}{13(2x+3)},\quad k=28,\quad x_0=-1.$$

Решение

$D(y)=\{\mathbb{R}|\ x\neq -1{,}5\}$.

Преобразуем формулу задания функции:

$$y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}\Leftrightarrow y=\frac{1}{13}\cdot\frac{\frac{5}{2}(2x+3)+1-\frac{15}{2}}{2x+3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{13}\left(\frac{5}{2}+\frac{-\frac{13}{2}}{2x+3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1}+\frac{5}{26}.$$

Найдем $y'_x,\ y''_x,\ y'''_x,\ldots$. Нам надо найти закономерность, которой подчинены производные заданной функции, чтобы получить формулу для производной функции $y(x)$ n-го порядка.

$$y'_x==\left(-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1}+\frac{5}{26}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}\cdot 2,$$

$$y''_{xx}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(2x+3)^{-3}\cdot 2^2,$$

$$y'''_x=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(2x+3)^{-4}\cdot 2^3,$$

и т. д.

Очевидно, что

$$y_x^{(n)}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n,$$

$$y_x^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot n!\cdot(2x+3)^{-(n+1)}.$$

Воспользовавшись полученным результатом найдем производную заданной функции 28-го порядка:

$$y_x^{(28)}=(-1)^{29}\cdot 2^{27}\cdot 28!\cdot(2x+3)^{-29}.$$

При $x_0=-1$:

$$y^{(28)}(-1)=-2^{27}\cdot 28!\cdot(-1)^{-29}=2^{27}\cdot 28!.$$

Дифференциал функции $y(x)$ n-го порядка находится по формуле:

$$d^n y=y_x^{(n)}dx^n.$$

Дифференциал заданной функции 28-го порядка:

$$d^{28}y = -2^{27} \cdot 28! \cdot (2x+3)^{-29} dx^{28},$$

а при $x_0 = -1$:

$$d^{28}y\Big|_{x=-1} = 2^{27} \cdot 28!\, dx^{28}.$$

Ответ: $y^{(28)}(-1) = 2^{27} \cdot 28!;$

$$d^{28}y\Big|_{x_0=-1} = 2^{27} \cdot 28!\, dx^{28}.$$

Задание 8.

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$ заданному уравнению: $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x}{x-1}$**;** $\qquad x(x-1)\cdot y' + y = x^2(2x+1)$**.**

Решение

$D(y) = \{\mathbb{R} | \; x \neq 1\}$. Функция $y = f(x)$ удовлетворит заданному уравнению если при подстановке в уравнение функции и её производной y' уравнение обратится в тождество. Найдем $y'(x)$:

$$y' = \left(\frac{x^3 - x^2 + x}{x-1}\right)' = \left(\frac{x^2(x-1) + (x-1) + 1}{x-1}\right)' = \left(x^2 + 1 + (x-1)^{-1}\right)' = 2x - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Итак, $y' = 2x - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Подставим функцию y и её производную y' в уравнение

$$x(x-1)\cdot\left(2x - \frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{x^3 - x^2 + x}{x-1} \overset{?}{=} x^2(2x+1).$$

Преобразуем левую часть уравнения $A = B$:

$$A = x(x-1)\cdot\left(2x - \frac{1}{(x-1)^2}\right) + x^2 + \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 2x^2(x-1) - \frac{x}{x-1} + x^2 + \frac{x}{x-1} =$$

$$= 2x^2(x-1) + x^2 = x^2(2x - 2 + 1) = x^2(2x-1) = B.$$

Мы показали, что *A* тождественно равно *B,* для $\forall x \in \mathbb{D}(y)$.

Ответ: функция $y = f(x)$ удовлетворит заданному уравнению.

Задание 9.

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ **в точке с абсциссой** x_0**:** $f(x) = \dfrac{4x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = 1.$

Решение

1) Составим уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{4x^2}{3+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$:

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4\cdot 1^2}{3+1^2} = 1, \; y_0 = 1;$$

$$y' = f'(x) = \left(\frac{4\cdot x^2}{3+x^2}\right)' = 4\left(\frac{(x^2+3)-3}{x^2+3}\right)' = 4\left(1-3\cdot\left(x^2+3\right)^{-1}\right)' =$$

$$= 4(-3)\cdot(-1)\left(x^2+3\right)^{-2}\cdot 2x = \frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2};$$

$$y'(x_0) = y'(1) = \frac{24\cdot 1}{\left(1^2+3\right)^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}, \; y'(x_0) = \frac{3}{2}.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

В нашем случае $l_k: \quad y - 1 = \dfrac{3}{2}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y = 1.$

$l_k: \quad \dfrac{x}{1/3} + \dfrac{y}{-1/2} = 1$ – уравнение касательной в отрезках.

2) Треугольник, ограниченный осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ – прямоугольный. Его площадь $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b$, где a и b – длины катетов – отрезков, отсекаемых l_k от осей координат $a = \left|\dfrac{1}{3}\right|, \quad b = \left|-\dfrac{1}{2}\right|$.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}\left(\text{ед.}^2\right)$$

Ответ: $S_\Delta = \dfrac{1}{12}\left(\text{ед.}^2\right)$.

Задание 10.

Вычислите значение функции $y = f(x)$ **в заданной точке** x **приближённо с помощью дифференциала:**

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0{,}97.$$

Решение

$y(x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$, где $d(y(x_0)) = y'(x_0)dx$ – эта формула будет использована в решении.

Близкая точка к точке $x = 0{,}97$, в которой легко найти значение функции $x_0 = 1$: $\qquad y(x_0) = y(1) = \sqrt[3]{1^2 + 2 \cdot 1 + 5} = 2$.

Чтобы из точки $x_0 = 1$ попасть в точку $x = 0{,}97$, надо дать аргументу x приращение $\Delta x = dx = -0{,}03$. Найдем

$$y'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}\right)' = \left(\left(x^2 + 2x + 5\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + 2x + 5\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 2) =$$

$$= \frac{2(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2}},$$

$$y'(x_0) = y'(1) = \frac{2 \cdot (1+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(1^2 + 2 \cdot 1 + 5\right)^2}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $y(0{,}97) \approx 2 + \frac{1}{3} \cdot (-0{,}03) = 1{,}99$.

Ответ: $y(0{,}97) = 1{,}99$.

Задание 11.

Проведите полное исследование заданных функций и постройте их графики:

а) $y=\frac{1}{8}\left(6x^2-x^3-16\right)$**;** **б)** $y=\frac{x^3}{3-x^2}$**.**

Решение:

а) $y=\frac{1}{8}\left(6x^2-x^3-16\right)$.

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) $y(-x)=\frac{1}{8}\left(6(-x)^2-(-x)^3-16\right)=\frac{1}{8}\left(6x^2+x^3-16\right)$.

Очевидно: $\begin{cases} y(-x)\neq y(x), \\ y(-x)\neq -y(x). \end{cases}$ Значит функция не обладает свойством четности и нечетности. Функция не периодическая.

3) Характерные точки (точки пересечения с осями координат): при $x=0,\ \ y=-2$, т. е. $(0;-2)$ – точка пересечения с осью Oy.

При $y=0$: $$x^3-6x^2+16=0. \qquad (*)$$

Один корень надо «угадать». Возможные рациональные корни этого уравнения могут быть среди чисел: $\{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8;\pm 16\}$ – целых делителей $a_0=16$. $x=2$ – корень уравнения (*) ($2^3-6\cdot 2^2+16=0$ – верное равенство).

$$x^3-6x^2+16=\left(x^3-2x^2\right)-4x^2+8x-8x+16=$$
$$=x^2(x-2)-4x(x-2)-8(x-2)=(x-2)\left(x^2-4x-8\right),$$

$$(*)\ \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x-8\right)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{48}}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \ x\in\left\{2;\ 2\pm 2\sqrt{3}\right\}.$$

Точки пересечения с осью Ox: $(2;0)$, $\left(2+2\sqrt{2};0\right)$, $\left(2-2\sqrt{2};0\right)$.

4) $$y'=\left(\frac{1}{8}\left(-x^3+6x^2-16\right)\right)'=\frac{1}{8}\left(-3x^2+12x\right)=-\frac{3}{8}x(x-4).$$

$y'=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4 \end{array}\right.$ – критические точки (подозрительные на экстремум функции).

5) Исследуем знак производной функции на промежутках, на которые разбивается $D(y)=\mathbb{R}$ точками $x=0$ и $x=4$ (см. рис. 1).

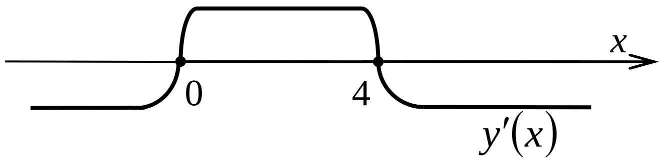

Рис. 1

Результаты исследования внесем в таблицу:

$D(y)$	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘
		экстр. min.		экстр. max.	

В промежутках $x \in (-\infty;0) \cup (4;+\infty)$, $y'(x) < 0$, значит функция $y = f(x)$ убывает, а при $x \in (0;4)$, $y'(x) > 0$, значит функция $y = f(x)$ возрастает.

В точках $x = 0$ и $x = 4$ производная функции меняет знак, значит эти точки будут точками локального экстремума:

$$f(0) = \frac{1}{8}\left(6 \cdot 0^2 - 0^3 - 16\right) = -2; \qquad f(4) = \frac{1}{8}\left(6 \cdot 4^2 - 4^3 - 16\right) = 2.$$

6) Учитывая полученные результаты, строим эскиз графика функции $y = \frac{1}{8}\left(6x^2 - x^3 - 16\right)$ (см. рис. 2).

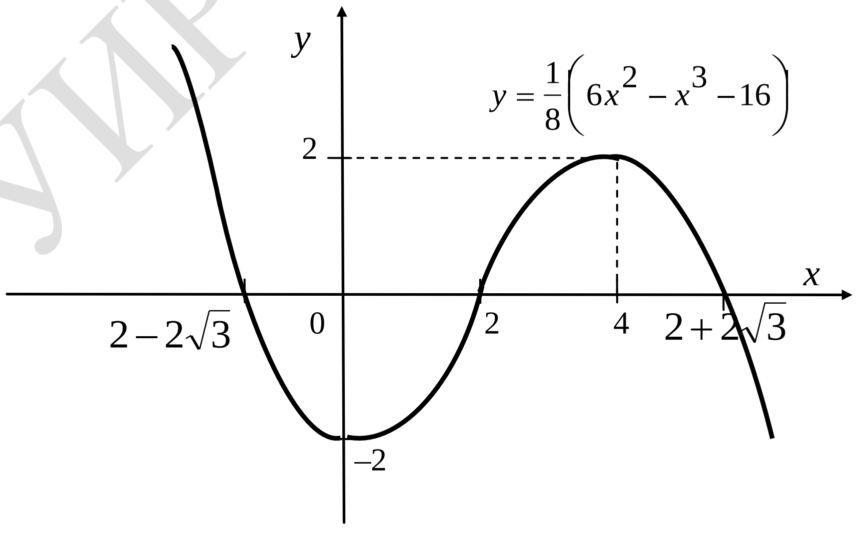

Рис. 2

График функции можно уточнить с помощью второй производной.

7) $y''(x)=y'(x)=\left(-\frac{3}{8}x(x-4)\right)'=-\frac{3}{8}\left(x^2-4x\right)'=-\frac{3}{8}(2x-4)=$

$=-\frac{3}{4}(x-2).$

$y''(x)=0$ при $x=2$ (см. рис. 3).

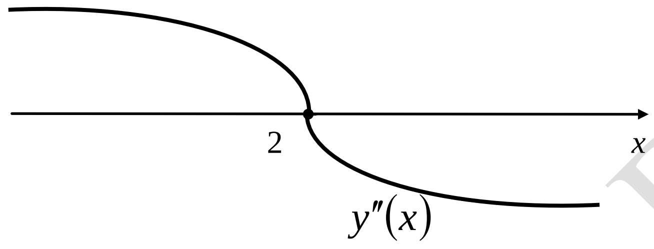

Рис. 3

Поскольку при переходе через точку $x=2$ вторая производная меняет свой знак, то $x=2$ – точка перегиба графика функции.

При $x\in(-\infty;2)$, $y''(x)>0$. Значит «выпуклость» графика обращена вниз.

При $x\in(2;+\infty)$, $y''(x)<0$. Значит «выпуклость» графика обращена вверх;

б) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

1) $D(y)=\{\mathbb{R}|x\neq\pm\sqrt{3}\}$.

2. $f(-x)=\frac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\frac{x^3}{3-x^2}=-f(x).$

Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$ и, следовательно, её график симметричен относительно точки $(0;0)$ – начала координат. Поэтому ограничимся исследованием функции только для $x\geq 0$.

3) Функция не периодическая.

4) Так как $y=0$ только при $x=0$, то пересечение с осями координат происходит только в начале координат.

5) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x=\sqrt{3}$, причем

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty.$$

Очевидно, что прямая $x=\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

6) Находим $y' = \dfrac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2} = \dfrac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}$.

Решим уравнение $y'=0$:

$$\frac{x^2(3-x)\cdot(3+x)}{(3-x^2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

На экстремум надо исследовать только точку $x=3$ (точку $x=0$ не исследуем, так как она является граничной точкой промежутка $[0,+\infty)$).

В окрестности точки $x=3$ имеем: $y'>0$ при $x<3$ и $y'<0$ при $x>3$, следовательно, в точке $x=3$ функция имеет максимум, $y_{\max}(3)=-\dfrac{9}{2}$.

7) Находим $y''=(y')'=\left(\dfrac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$.

Видим, что $y''=0$ при $x=0$. В окрестности точки $x=0$ если $x<0$, то $y''<0$ и, если $x>0$, то $y''>0$. Значит в точке $(0;0)$ кривая имеет перегиб. Иногда направление выпуклости может измениться при переходе через разрыв кривой, поэтому выясним знак y'' около точки $x=\sqrt{3}$.

При $x\in(0;\sqrt{3})$, $y''>0$, а при $x\in(\sqrt{3};+\infty)$, $y''<0$, следовательно на промежутке $(0;\sqrt{3})$ кривая вогнута, а на промежутке $(\sqrt{3};+\infty)$ – выпукла.

8) Выясним вопрос об асимптотах. Наличие вертикальной асимптоты $x=\sqrt{3}$ установлено выше. Найдем горизонтальные: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$. Следовательно – горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)}=-1 \quad \left(k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\right),$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0 \quad \left(b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)\right).$$

Следовательно $y=-x$ – наклонная двусторонняя асимптота.

9) Используя результаты исследований построим график функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ (см. рис. 4).

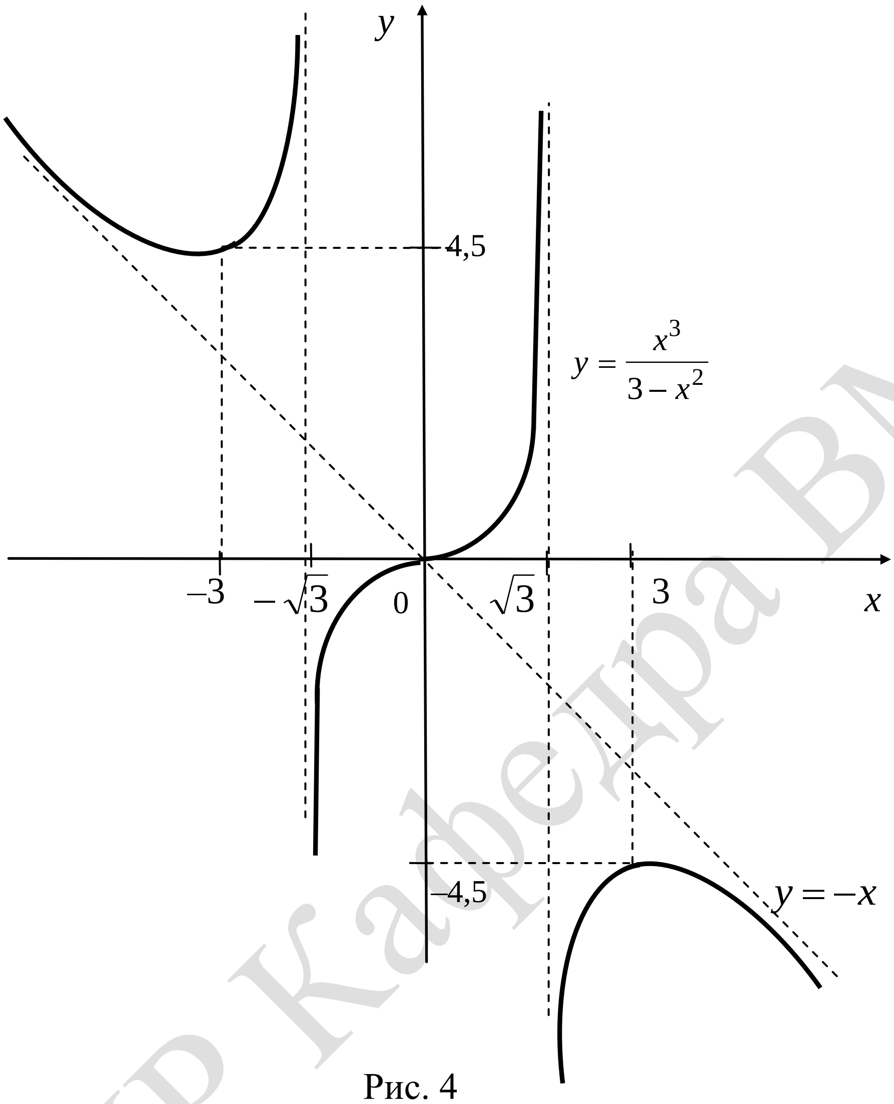

Рис. 4

Задание 12.

Вычислите предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 7x}{\lg\cos 6x}.$$

Решение

<u>Правило Лопиталя</u> – метод нахождения пределов функций, раскрывающих неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

<u>Суть правила</u>: предел отношения функций равен пределу отношения их производных (если последний предел существует):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять неоднократно, если отношение производных снова дает неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Сначала убедимся, что правило Лопиталя применить можно.

Действительно, $f(x)=1+\cos 7x$ и $g(x)=\lg\cos 7x$ при x стремящемся к π $(x\to\pi)$, стремятся к нулю. Функции $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые, поэтому:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 7x}{\lg\cos 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos 7x)'}{(\lg\cos 6x)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{-7\sin 7x}{\frac{1}{\cos 6x\ln 10}\cdot(-6\sin 6x)}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x\cdot\cos 6x}{\sin 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin 7x\cdot\cos 6x)'}{(\sin 6x)'}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\lim_{x\to\pi}\frac{7\cos 7x\cdot\cos 6x-6\sin 7x\cdot\sin 6x}{6\cos 6x}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\cdot\frac{7\cos 7\pi\cdot\cos 6\pi-6\sin 7\pi\cdot\sin 6\pi}{6\cos 6\pi}=$$

$$=\frac{7\ln 10}{6}\cdot\frac{7\cdot(-1)\cdot 1-6\cdot 0\cdot 0}{6\cdot 1}=-\frac{49\ln 10}{36}.$$

Ответ: $-\frac{49\ln 10}{36}$.

Задание 13.

Разложите заданную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора указанного порядка n, используя различные приемы.

$y(x) = \ln(2-5x),\ \ x_0 = -3,\ n = 4$.

Решение

Если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0;\, x)$ такая, что справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора можно записать в форме Лагранжа: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; или в форме Пеано: $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$.

1 способ

Представим функцию $y(x) = \ln(2-5x)$ в виде многочлена:

$$\ln(2-5x) = a_0 + a_1(x+3) + a_2(x+3)^2 + a_3(x+3)^3 + a_4(x+3)^4 + R_4(x).$$

Коэффициенты $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ вычислим по формуле $a_n = \dfrac{f^{(n)}(-3)}{n!}$:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(-3)}{0!} = f(-3) = \ln(2-5\cdot(-3)) = \ln 17,\ \ a_0 = \ln 17;$$

$$a_1 = \frac{f'(-3)}{1!} = \left(\ln(2-5x)\right)'\Big|_{x=-3} = -5\cdot(2-5x)^{-1}\Big|_{x=-3} = -\frac{5}{17},\ \ a_1 = -\frac{5}{17};$$

$$a_2 = \frac{f''(-3)}{2!} = \frac{1}{2}\cdot(-5)^2\cdot(-1)\cdot(2-5x)^{-2}\Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot\frac{1}{2},\ \ a_2 = -\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot\frac{1}{2};$$

$$a_3 = \frac{f'''(-3)}{3!} = \frac{1}{6}(-5)^3(-1)(-2)(2-5x)^{-3}\Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{1}{3},\ \ a_3 = -\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{1}{3};$$

$$a_4 = \frac{f^{IV}(-3)}{4!} = \frac{1}{24}(-5)^4(-1)(-2)(-3)(2-5x)^{-4}\Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot\frac{1}{4},\ \ a_4 = -\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot\frac{1}{4}.$$

Для того, чтобы записать остаточный член $R_4(x)$ в форме Лагранжа, найдем $f^{V}(c)$.

$$f^{V}(c)=(-5)^5\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(2-5c)^{-5}=-\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5\cdot 4!.$$

Итак:

$$\ln(2-5x)=\ln 17-\frac{5}{17}(x+3)-\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(x+3)^2-\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot\frac{1}{3}(x+3)^3-$$

$$-\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot\frac{1}{4}(x+3)^4+R_4(x),$$

где

$$R_4(x)=-\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5\cdot\frac{1}{5}(x+3)^5 \text{ – форма Лагранжа}$$

или $\quad R_4(x)=o\left((x+3)^4\right)$ – форма Пеано.

2 способ

Решим задачу используя разложение функции $y=\ln(1+u)$ по формуле Маклорена (частный случай формулы Тейлора, при условии $u_0=0$).

(*) $$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+R_n(u),$$

$$R_n(u)=(-1)^n\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

Преобразуем формулу задания нашей функции:

$$\ln(2-5x)=\ln(2-5(x+3)+15)=\ln(17-5(x+3))=$$

$$=\ln 17\left(1+\left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)\right)=\ln 17+\ln(1+u),\text{ где } u=-\frac{5}{17}(x+3).$$

Поскольку нам надо записать для заданной функции формулу Тейлора порядка $n=4$, подставив в равенство (*) вместо $u=-\frac{5}{17}(x+3)$ получим

$$\ln(2-5x)=\ln 17+\left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{17}\right)^2\cdot(x+3)^2+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{17}\right)^3\cdot(x+3)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{17}\right)^4\cdot(x+3)^4+R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right),$$

где $R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right)=(-1)^4\frac{\left(-\frac{5}{17}\right)^5(x+3)^5}{5\cdot(1+c)^5}$.

Ответ: $\ln(2-5x)=\ln 17-\frac{5}{17}\cdot(x+3)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^2\cdot(x+3)^2-$

$-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^3\cdot(x+3)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^4\cdot(x+3)^4+R_4(x).$

Задание 14.

Для функции из задания 7 составьте многочлен Тейлора второго порядка в указанной точке $M_0(x_0; y_0)$ и постройте его схематический график в окрестности этой точки:

$$y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}, \qquad M_0(-1;\, y_0).$$

Решение

Многочлен Тейлора второго порядка для заданной функции имеет вид:

$$y(x) = \frac{5x+1}{13(2x+3)} = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + R_2(x),$$

$$y(-1) = -\frac{6}{13}.$$

$y^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot n!(2x+3)^{-(n+1)}$ – этот результат мы получили при решении задания 7. Воспользуемся им и найдем $y'(-1)$ и $y''(-1)$.

$$y'(-1) = (-1)^2 \cdot 2^0 \cdot 1! \cdot (2 \cdot (-1) + 3)^{-2} = 1.$$

$$y''(-1) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 2! \cdot (2 \cdot (-1) + 3)^{-3} = -4.$$

Итак, многочлен Тейлора второго порядка для заданной функции в точке $M_0\left(-1; -\frac{6}{13}\right)$ составлен:

$$y(x) = -\frac{6}{13} + 1(x+1) - \frac{4}{2}(x+1)^2 + o\left((x+1)^2\right).$$

Используя полученное разложение функции построим её график в окрестности точки $M_0\left(-1; -\frac{6}{13}\right)$. Нас интересует, как расположен график функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в окрестности точки M_0: над касательной или под касательной.

На этот вопрос можно ответить, оценив знак разности $f(x) - y_{\text{кас.}}$:

– если $f(x) - y_{\text{кас.}} > 0$, то график функции расположен выше касательной;

– если $f(x) - y_{\text{кас.}} < 0$, – то ниже.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид: $y = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ – первые два слагаемые в формуле Тейлора.

Воспользуемся этим фактом.

$y_{\text{кас.}} = -\dfrac{6}{13} + 1\cdot(x+1) \Leftrightarrow y_{\text{кас.}} = x + \dfrac{7}{13}$ – уравнение касательной в точке $M_0\left(-1; -\dfrac{6}{13}\right)$.

$$f(x) = y_{\text{кас.}} - 2(x+1)^2 + o\left((x+1)^2\right).$$

Отбросив $o\left((x+1)^2\right)$ получим приближенное равенство при x близких к $x_0 = -1$:

$$f(x) \approx y_{\text{кас.}} - 2(x+1)^2 \Leftrightarrow f(x) - y_{\text{кас.}} \approx -2(x+1)^2 < 0.$$

Значит график функции расположен под касательной. Строим график (см. рис5):

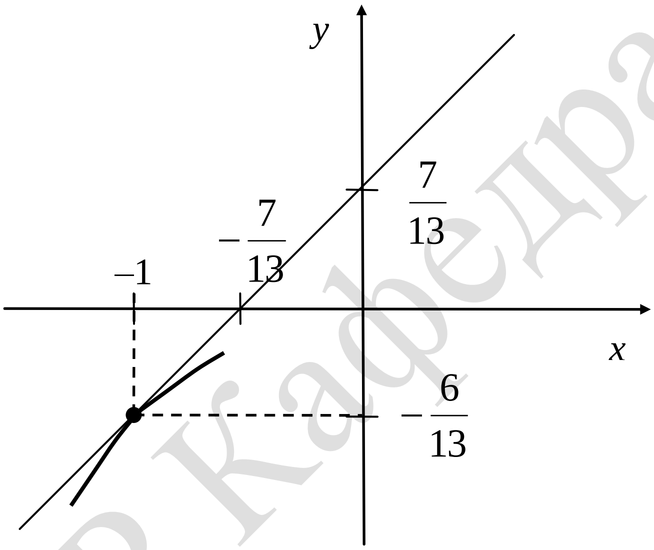

Рис. 5