Решение типового варианта заданий по теме

"Введение в анализ"

Автор:

ассистент кафедры высшей математики БГУИР

Василюк Людмила Ивановна

Содержание

2015

Задание 1.

Подберите такие значения a **и** b**, при которых** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **равен:**

1. нулю; 2. ∞**; 3. заданному числу** k **.**

$$x_n = \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2}; \ k = \frac{4}{3}.$$

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

1. Подберите такие значения a и b, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2} = 0$. Докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Решение:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2} = 0$. Это равенство будет верным, если $a = 0$, а $b \in \{\mathbb{R} / b \neq 0\}$, например $b = 1$. Т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n - 4}{n^2 + 2} = 0$.

Докажем верность этого равенства в соответствии с определением предела числовой последовательности:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ (\varepsilon \text{ сколь угодно малое}),\ \exists N(\varepsilon);\ \ \forall n > N;\ |x_n - A| < \varepsilon.}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_n - 0| = \left|\dfrac{7n - 4}{n^2 + 2}\right| = \dfrac{7n - 4}{n^2 + 2}$, т.к. $n \in \mathbb{N}$, $7n - 4 \geq 3$, т. е. $|7n - 4| = 7n - 4$.

Надо подобрать такое натуральное N, чтобы для всякого натурального $n > N$ выполнялось неравенство $\dfrac{7n - 4}{n^2 + 2} < \varepsilon$.

Решая относительно n это неравенство, мы найдем номер N.

$$\frac{7n - 4}{n^2 + 2} < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ 7n - 4 < \varepsilon n^2 + 2\varepsilon \ \Leftrightarrow \ \varepsilon n^2 - 7n + (4 + 2\varepsilon) > 0. \qquad (*)$$

$D = 49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)$. Очевидно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $D > 0$ и неравенство будет выполнено для

$$n \in \left(-\infty;\ \frac{7 - \sqrt{49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)}}{2\varepsilon};+\infty\right).$$

Т. е. $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{7+\sqrt{49-4\varepsilon(4+2\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right]$. Что и требовалось доказать.

Можно решить задачу проще, используя следующее очевидное замечание. Чтобы доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, мы по произвольному $\varepsilon > 0$ должны указать номер *N* такой, что неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ выполняется, как только $n > N$, но при этом вовсе не обязательно находить наименьшее возможное значение этого номера. Мы можем указать любой номер *N*, который гарантирует выполнение неравенства $|x_n - A| < \varepsilon$ при $n > N$. Этот простой и очевидный факт позволяет решить эту задачу проще.

Поскольку $7n-4<7n$; $n^2+2>n^2$, то $\dfrac{7n-4}{n^2+2}<\dfrac{7n}{n^2}=\dfrac{7}{n}$. Теперь уже легко завершить доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и решим неравенство $\dfrac{7}{n}<\varepsilon$. Отсюда $n>\dfrac{7}{\varepsilon}$ и в качестве искомого номера *N* возьмем $N=\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$. Тогда при $n>N$ будет выполняться и неравенство $|x_n-0|<\varepsilon$. Это по определению означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}01$. Тогда $N=\left[\dfrac{7}{0{,}01}\right]=700$ и все члены последовательности, начиная с номера 701 будут находиться в интервале (–0,01; 0,01), т. е. в ε-окрестности точки $A=0$. ($\varepsilon=0{,}01$, $A=0$).

2. Подберите такие значения a и b, при которых $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2}=\infty$.

Докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Решение:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2}=\infty$. Это равенство будет верным, если $b=0$, а $a\in\{\mathrm{R}/a\neq 0\}$, например $a=1$. Т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7n-4}{2}=\infty$.

Надо показать, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{2}\left(n^2+7n-4\right)$ будет бесконечно большой, т. е. для любого как угодно большого положительного числа *A* существует номер *N*, зависящий от этого числа *A*, такой, что для всех последующих номеров $n > N$, выполняется неравенство $|x_n| > A$, $(\forall A > 0)$ $(\exists N = N(A))$ $(\forall n > N)$: $|x_n| > A$.

Зададим произвольное число $A > 0$, как угодно большое и рассмотрим неравенство $|x_n| > A$. В нашем случае $\left|\dfrac{n^2+7n-4}{2}\right| > A$.

$$n^2+7n-4 \geq 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ т. е. } \left|\frac{n^2+7n-4}{2}\right| = \frac{n^2+7n-4}{2}, \text{ поэтому:}$$

$\left|\dfrac{n^2+7n-4}{2}\right| > A \Leftrightarrow n^2+7n-(4+2A) > 0$. Дискриминант этого квадратного трёхчлена $D = 49+4(4+2A) = 65+8A > 0$, поэтому

$$n \in \left(-\infty;\ \frac{-7-\sqrt{65+8A}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{65+8A}-7}{2}; +\infty\right).$$

Значит, $N(A) = \left[\dfrac{\sqrt{65+8A}-7}{2}\right]$. Для всех $n > N(A)$ будет выполняться неравенство $|x_n| > A$. Это по определению означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3. Подберите такие значения a и b, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2} = \dfrac{4}{3}$. Докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Решение:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2+7n-4}{bn^2+2} = \dfrac{4}{3}$. Это равенство будет верным, если $a : b = 4 : 3$,

$$\begin{cases} a = 4k, \\ b = 3k, \\ k \neq 0. \end{cases} \text{ Например: } \begin{cases} a = 4, \\ b = 3 \end{cases}. \text{ Т. е. } \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+7n-4}{3n^2+2} = \frac{4}{3}.$$

Доказательство этого равенства в соответствии с определением предела числовой последовательности аналогично доказательству в задании 1 пункте 1.

$$\left|x_n - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{4n^2+7n-4}{3n^2+2} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{21n-20}{3(3n^2+2)}\right| = \frac{21n-20}{9n^2+6}, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N},\ 21n-20 > 0.$$

$\varepsilon > 0$,

$$\left|x_n-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{21n-20}{9n^2+6}<\varepsilon .$$

Т.к. $21n-20<21n$, $9n^2+6>9n^2$,

значит, $\dfrac{21n-20}{9n^2+6}<\dfrac{21n}{9n^2}=\dfrac{7}{3n}<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; n>\dfrac{7}{3\varepsilon}$, $N=\left[\dfrac{7}{3\varepsilon}\right]$.

Тогда $\forall n>N$ будет выполняться неравенство: $\left|x_n-\dfrac{4}{3}\right|<\varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

Задание 2.

Даны последовательности x_n, y_n, z_n. Для каждой последовательности найдите предел при $n \to \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся), бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой, ограниченной (неограниченной).

1. $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n+3)}{n+1} - \dfrac{2n-1}{2}$.

2. $y_n = \left(\dfrac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3}$.

3. $z_n = \dfrac{(n-1)! - n(n-4)!}{(n-2)! - (n-3)!}$.

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение:

Преобразуем формулу задания последовательности x_n, заметив что: $1+3+5+\ldots+(2n+3)$ – сумма членов арифметической прогрессии первый член которой $a_1 = 1,\ d = 2$, а последний член $2n+3 = a_{n+2}$. Воспользуемся формулой $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$ – сумма k-первых членов арифметической прогрессии.

$$x_n = \frac{\frac{1+2n+3}{2} \cdot (n+2)}{n+1} - \frac{2n-1}{2} = \frac{2(n+2)^2 - (2n-1)(n+1)}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2+8n+8-2n^2-n+1}{2(n+1)} = \frac{7n+9}{2(n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+9}{2n+2}.$$

При $n \to \infty$, $\begin{cases} (7n+9) \to \infty, \\ (2n+2) \to \infty. \end{cases}$

Имеем дело с неопределенностью $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы избавиться от неопределенности, разделим числитель и знаменатель дроби на n. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{9}{n}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{7}{2}, \text{ т.к. при } n\to\infty \quad \frac{9}{n}\to 0 \text{ и } \frac{2}{n}\to 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{7}{2}$.

x_n – сходящаяся, ограниченная, не является бесконечно малой, не является бесконечно большой последовательностью.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3}.$$

При $n\to\infty$, $\dfrac{7n^2+5n+2}{7n^2+5n-1}\to 1$, $2n^3-3\to\infty$.

В этом примере – неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Этот вид неопределенности раскрывает второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{или} \quad \lim_{f(n)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e.$$

Воспользуемся этим фактом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}\right)^{2n^3-3} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1}-1\right)\right)^{2n^3-3} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{7n^2+5n-1}{-3}\to-\infty}} \left(\left(1+\frac{-3}{7n^2+5n+1}\right)^{\frac{7n^2+5n+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{7n^2+5n+1}\cdot\left(2n^3-3\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-3\left(2n^3-3\right)}{7n^2+5n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^3}{7n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n}{7}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

y_n – сходящаяся, ограниченная, бесконечно малая последовательность.

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!-n(n-4)!}{(n-2)!-(n-3)!}.$$

Упростим формулу задания z_n:

$$z_n = \frac{(n-1)!-n(n-4)!}{(n-2)!-(n-3)!} = \frac{(n-4)!(n-3)(n-2)(n-1)-n(n-4)!}{(n-3)!(n-2)-(n-3)!} =$$

$$= \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1)-n)}{(n-3)!(n-2-1)} = \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1)-n)}{(n-4)!(n-3)^2}/$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n-2)(n-1)-n}{(n-3)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

z_n – расходящаяся, неограниченная, бесконечно большая числовая последовательность.

Задание 3.

Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{8-x^3}{4x^2-7x-2}+\frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}+(2-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{4}\right).$$

Решение:

Если $f(x)=\dfrac{8-x^3}{4x^2-7x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$ и $\varphi(x)=(2-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{3\pi x}{4}$

при x стремящемуся к 2 имеют пределы, то

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)+\lim_{x\to 2}\varphi(x).$$

Вычислим каждый из этих пределов:

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{4x^2-7x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Это означает, что $x=2$ – корень каждого из многочленов $8-x^3$, $4x^2-7x-2$. Чтобы избавиться от неопределенности, разложим многочлены на множители:

$$8-x^3=(2-x)\left(4+2x+x^2\right),$$

$4x^2-7x-2=4(x-2)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$, т.к. $x_1=2$ и $x_2=-\dfrac{1}{4}$ – корни этого многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(4x+1)}=-\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{4x+1}=$$

$$=-\frac{2^2+2\cdot 2+4}{4\cdot 2+1}= \;=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}. \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=-\frac{4}{3}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Чтобы избавиться от неопределенности, домножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное знаменателю, т. е. на $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}$, и числитель разложим на множители: $2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

Получим,

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{(2x+5)-(x+7)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)=$$

$$=(2\cdot 2-1)\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)=3\cdot 6=18. \qquad \lim_{x\to 2} g(x)=18.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{4}=(0\cdot\infty).$

Изменим вид неопределенности, сделав замену: т.к. $x\to 2$, то $x-2=u\to 0$, $x=u+2$.

Получаем:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{\substack{u\to 0\\ x=u+2}}(-u)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}(u+2)\right)=-\lim_{u\to 0}u\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}u+\frac{3}{2}\pi\right)=$$

$$=-\lim_{u\to 0}u\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi u}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Числитель и знаменатель дроби разделим на $\dfrac{3\pi u}{4}$:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{\substack{u\to 0\\ \frac{3\pi u}{4}\to 0}}\frac{\dfrac{4u}{3\pi u}}{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi u}{4}}{\dfrac{3\pi u}{4}}}.$$

Так как, согласно первому замечательному пределу $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}t}{t}=1$, $t=\dfrac{3\pi u}{4}$, получаем,

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{4}{3\pi}}{1}=\frac{4}{3\pi}. \qquad \lim_{x\to 2}\varphi(x)=\frac{4}{3\pi}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)+\varphi(x)\right)=-\dfrac{4}{3}+18+\dfrac{4}{3\pi}.$

Задание 4.

При $x \to 0$ определите порядок малости бесконечно малых функций $\alpha(x), \beta(x)$ и $\gamma(x)$ относительно функции x. Обоснуйте, справедливо ли равенство $\beta(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to 0$.

$\alpha(x) = 7^{2x^2 - 3x^5 + 1} - 7$, $\beta(x) = 6\lg(1 - \sqrt[4]{x^7})\arccos 5x$, $\gamma(x) = 8x^7 - x^3$.

Решение:

При решении задачи будем руководствоваться фактами:

а) $\psi(x)$ – бесконечно малая функция будет иметь более высокий порядок малости чем функция x при $x \to 0$,если

$$\lim_{x \to 0} \frac{\psi(x)}{x} = 0. \ \psi(x) = o(x).$$

б) Порядок малости функции $\psi(x)$ относительно функции x при $x \to 0$, есть такое число *n*, при котором выполняется равенство

$$\lim_{x \to 0} \frac{\psi(x)}{x^n} = C, \text{ где } C - \text{const}, \ C \neq 0.$$

в) Если $\psi(x)$ и $q(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малые функции и если $q(x)$ – более высокого порядка по сравнению с $\psi(x)$ при $x \to x_0$, то $\psi(x) + q(x) \sim \psi(x)$.

1. $\alpha(x) = 7^{2x^2 - 3x^5 + 1} - 7$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{7\left(7^{2x^2 - 3x^5} - 1\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x \to 0 \Rightarrow \left(2x^2 - 3x^5\right) = u \to 0, \\ \text{т.к. } a^u - 1 \sim u \ln a, \text{ имеем} \\ 7^{2x^2 - 3x^5} - 1 \sim \left(2x^2 - 3x^5\right)\ln 7 \sim 2x^2 \ln 7 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(7 \cdot \ln 7) \cdot 2x^2}{x} = 14 \ln 7 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 14 \ln 7 \cdot \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Очевидно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{x^n} = 14 \ln 7$ при $n = 2$.

Значит $\alpha(x) = o(x),\ n = 2$.

2. $\beta(x) = 6\lg(1 - \sqrt[4]{x^7})\arccos 5x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6\lg(1-\sqrt[4]{x^7})\arccos 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{при } x \to 0,\ 5x \to 0 \Rightarrow \arccos 5x \to \dfrac{\pi}{2}. \\ -\sqrt[4]{x^7} = u \to 0, \\ \\ \text{т.к. } \log_a(1+u) \sim \dfrac{u}{\ln a}, \text{имеем} \\ \beta(x) \sim 6\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}\left(-\sqrt[4]{x^7}\right) \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{3\pi}{\ln 10}\cdot x^{\frac{7}{4}}}{x} = -\frac{3\pi}{\ln 10}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x} = 0.$$

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{x^n} = -\dfrac{3\pi}{\ln 10}$ при $n = \dfrac{7}{4}$.

Значит $\beta(x) = o(x),\ n = \dfrac{7}{4}$.

3. $\gamma(x) = 8x^7 - x^3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^7 - x^3}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\text{ при } x \to 0,\ \left(8x^7 - x^3\right) \sim -x^3 \right| = -\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = 0.$$

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\gamma(x)}{x^n} = -1$ при $n = 3$.

Значит $\gamma(x) = o(x),\ n = 3$.

Проверим верность равенства

$$\beta(x) = o(\gamma(x)) \text{ при } x \to 0 \qquad (*)$$

Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6\lg(1-\sqrt[4]{x^7})\arccos 5x}{8x^7 - x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$
=\left|\begin{array}{l} 6\lg(1-\sqrt[4]{x^7})\arccos 5x \sim -\dfrac{3\pi}{\ln 10}x^{\frac{7}{4}} \\ \\ 8x-x^3 \ \sim\ -x^3,\ \text{если}\ \ x\to 0 \end{array}\right| =
$$

$$
=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{3\pi}{\ln 10}x^{\frac{7}{4}}}{-x^3}=\frac{3\pi}{\ln 10}\lim_{x\to 0}\frac{x^{1\frac{3}{4}}}{x^3}=\frac{3\pi}{\ln 10}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{1\frac{1}{4}}}=\infty .
$$

Полученный результат говорит, что равенство (*) не выполняется. Имеет место при $x\to 0$ равенство $\gamma(x)=o(\beta(x))$.

Задание 5.

При $x \to 0$ для функции $f(x)$ найдите главную часть вида Ax^k.

$$f(x) = 4\,\mathrm{arctg}^3 \sqrt{x} + 9\sin(x^3) \cdot \cos(x^6) + x^2\, \mathrm{tg}^3\left(\frac{x}{3}\right).$$

Решение:

При решении задачи будем руководствоваться фактами:

а). Главной частью бесконечно малой функции $f(x)$ в точке x_0 $(x \to x_0)$ называется ей эквивалентная функция $A(x-x_0)^n$.

$$\begin{cases} x \to x_0, \\ f(x) \to 0, \\ f(x) \sim A(x-x_0)^n, \end{cases} \Rightarrow A(x-x_0)^n \text{ – главная часть } f(x) \text{ в точке } x_0.$$

В нашей задаче $x_0 = 0$, поэтому нам надо искать $Ax^n \sim f(x)$.

б) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малые функции и если $\beta(x)$ – более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, то $\alpha(x)+\beta(x) \sim \alpha(x)$.

$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$, где

$$g_1(x) = 4\,\mathrm{arctg}^3 \sqrt{x}, \quad g_2(x) = 9\sin\left(x^3\right)\cdot\cos\left(x^6\right), \quad g_3(x) = x^2\,\mathrm{tg}^3\left(\frac{x}{3}\right).$$

Все эти функции при $x \to 0$ являются бесконечно малыми.

$g_1(x)$: т.к. $\underset{u \to 0}{\mathrm{arctg}\,u} \sim u \Rightarrow \mathrm{arctg}^3 u \sim u^3$.

Значит $g_1(x) \sim 4 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^3 = 4x^{\frac{3}{2}}$.

$g_2(x)$: $9\sin\left(x^3\right)\cdot\cos\left(x^6\right) = -9\sin\left(x^3\right)\left(\left(1-\cos\left(x^6\right)\right)-1\right) =$

$= -9\left(\sin\left(x^3\right)\cdot\left(1-\cos\left(x^6\right)\right) - \sin\left(x^3\right)\right)$,

$$\sin\left(x^3\right) \sim x^3, \quad 1-\cos\left(x^6\right) \sim \frac{\left(x^6\right)^2}{2}.$$

Значит $g_2(x) \sim -9\left(x^3 \cdot \dfrac{x^{12}}{2} - x^3\right) = 9\left(x^3 - \dfrac{x^{15}}{2}\right) \sim 9x^3$.

$g_3(x)$: $\quad tg\,\dfrac{x}{3} \sim \dfrac{x}{3}$ при $x \to 0$, то $g_3(x) \sim x^2 \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 = \dfrac{x^5}{27}$.

Значит $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \sim 4x^{\frac{3}{2}} + 9x^3 + \dfrac{1}{27}x^5 \sim 4x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ: Главная часть функции $f(x)$ при $x \to 0$ равна $4x^{\frac{3}{2}}$.

Задание 6.

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **и определите, какое из следующих трех утверждений верно при** $x\to 0$**:**

1. $f(x)$ **и** $g(x)$ **имеют одинаковый порядок малости;**

2. $f(x)=\mathrm{o}(g(x))$**;**

3. $g(x)=\mathrm{o}(f(x))$**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4^{1-7x^2}+e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-5+3\arcsin\left(4x^2\right)}{2^{\sin^3 x}-2+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}+\log_2\left(\cos^{-2}x\right)}.$$

Решение:

При $x\to 0$, $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$, т. е. у нас неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Используем таблицу эквивалентных бесконечно малых величин. Получим.

$$f(x)=4^{1-7x^2}+e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-5+3\arcsin\left(4x^2\right)=$$

$$=\left(4\cdot 4^{-7x^2}-4\right)+\left(e^{\mathrm{tg}^2 x^2}-1\right)+3\arcsin\left(4x^2\right)\sim$$

$$\sim\ 4\left(4^{-7x^2}-1\right)+\left(e^{\left(x^2\right)^2}-1\right)+3\cdot 4x^2\ \sim$$

$$\sim\ 4\cdot\left(-7x^2\right)\ln 4+x^4+12x^2=4(3-7\ln 4)x^2+x^4\ \sim\ 4(3-7\ln 4)x^2.$$

Итак $f(x)\ \sim\ 4(3-7\ln 4)x^2$.

$$g(x)=2^{\sin^3 x}-2+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}+\log_2\left(\cos^{-2}x\right)=$$

$$=\left(2^{\sin^3 x}-1\right)+\left(\left(1+\left(x^3-2x^4\right)\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)-2\log_2\left(1+\left(-\left(1-\cos x\right)\right)\right)\ \sim$$

$$\sim\ \left(2^{x^3}-1\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-2x^4\right)-2\log_2\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\ \sim$$

$$\sim\ x^3\cdot\ln 2+\frac{1}{3}x^3-2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)/\ln 2\ \sim\ x^2/\ln 2.$$

Итак, $g(x)\ \sim\ x^2/\ln 2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4(3-7\ln 4)x^2}{x^2/\ln 2}=4(3-7\ln 4)\ln 2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=4(3-7\ln 4)\ln 2.$

$f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции, имеют одинаковый порядок малости.

Задание 7.

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\pi}(\cos 4x)^{\frac{2}{x\sin 6x}}$.

Решение:

При $x\to-\pi,\quad \cos 4x\to 1,\quad \sin 6x\to 0,\quad \dfrac{2}{x\sin 6x}\to\infty$.

В этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида $\left(1^{\infty}\right)$. Этот вид неопределенности раскрывается с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=e.$$

Сделаем замену:

$$\lim_{x\to-\pi}(\cos 4x)^{\frac{2}{x\sin 6x}}=\left|\begin{array}{l} x\to-\pi\Rightarrow \\ x+\pi=u\to 0, \\ x=u-\pi, \\ \cos 4x=\cos 4(u-\pi)=\cos 4u, \\ \sin 6x=\sin 6(u-\pi)=\sin 6u \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}(\cos 4u)^{\frac{2}{(u-\pi)\sin 6u}}=\left|\sin 6u\underset{u\to 0}{\sim}6u\right|=\lim_{u\to 0}\left(1+(\cos 4u-1)\right)^{\frac{2}{(u-\pi)\cdot 6u}}=$$

$$=\lim_{\substack{u\to 0\\(\cos u-1)\to 0}}\left(\left(\left(1+(\cos 4u-1)\right)^{\frac{1}{\cos 4u-1}}\right)^{\cos 4u-1}\right)^{\frac{1}{3u(u-\pi)}}=A.$$

Т.к. $\lim\limits_{u\to 0}\left(1+(\cos 4u-1)\right)^{\frac{1}{\cos 4u-1}}=e$, нам надо найти

$$A=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cos 4u-1}{3u(u-\pi)}}=\left|\;1-\cos 4u\underset{u\to 0}{\sim}\frac{(4u)^2}{2}\right|=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\frac{16u^2}{2}}{3u(u-\pi)}}=$$

$$=e^{-\frac{8}{3}\lim\limits_{u\to 0}\frac{u^2}{\left(u^2-\pi u\right)}}=e^{-\frac{8}{3}\cdot 0}=1.$$

Ответ: 1.

Задание 8.

При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(3x-2)}{e^{\sin\pi x}-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\qquad x_0=1.$$

Решение:

Функция $y(x)=\dfrac{\ln(3x-2)}{e^{\sin\pi x}-1}$ определена на множестве $D(f)=\left\{x>\dfrac{2}{3}\mid x\notin\mathbb{N}\right\}$. При $x=1$ функция не определена. Вычислим $\lim\limits_{x\to 1}y(x)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{e^{\sin\pi x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 1\Rightarrow x-1=u\to 0;\ \ x=u+1\\ \ln(3x-2)=\ln(3u+1)\quad\sim\quad 3u,\\ \text{т.к. } 3u\to 0.\\ e^{\sin\pi x}-1=e^{\sin(\pi u+\pi)}-1=e^{\sin(-\pi u)}-1\quad\sim\ -\pi u,\\ \text{т.к.} -\pi u\to 0.\end{array}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{3u}{-\pi u}=-\frac{3}{\pi}.$$

Полученный результат вычисления $\lim\limits_{x\to 1}y(x)=-\dfrac{3}{\pi}$ говорит, что $x_0=1$ – точка устранимого разрыва функции $y=f(x)$, т.к. $\begin{cases}1)\ \exists\lim f(x),\ \text{но}\\ 2)\ x_0=1\notin D(f)\end{cases}.$

Чтобы устранить разрыв a должно быть равно пределу функции $f(x)$ в точке $x_0=1$. $\quad a=-\dfrac{3}{\pi}$.

Ответ: $a=-\dfrac{3}{\pi}$

Задание 9.

Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ составьте сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$. Исследуйте непрерывность этих функций (при наличии точки разрыва определите ее тип, вычислив односторонние пределы в этой точке).

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad g(x) = \frac{2}{6x - \pi}.$$

Решение:

1. $f(g(x)) = \operatorname{arcctg}\dfrac{2}{6x-\pi}$.

Найдем область определения функции $f(g(x))$.

$D(f(g(x))) = \left\{\mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \dfrac{\pi}{6}\right\}$.

Точка $x = \dfrac{\pi}{6}$ – точка разрыва этой функции. Определим её тип, вычислив односторонние пределы функции $f(g(x))$ в этой точке:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}-0} \operatorname{arcctg}\frac{2}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} = \left| \begin{array}{l} x \to \frac{\pi}{6} - 0, \\ x - \frac{\pi}{6} \to -0, \\ \frac{2}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} \to -\infty \end{array} \right| = \pi,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}+0} \operatorname{arcctg}\frac{2}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} = \left| \begin{array}{l} x \to \frac{\pi}{6} + 0, \\ x - \frac{\pi}{6} \to +0, \\ \frac{2}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} \to +\infty \end{array} \right| = 0.$$

Поскольку в точке $x=\frac{\pi}{6}$ существуют односторонние пределы и они не равны, то $x=\frac{\pi}{6}$ для функции $f\left(g(x)\right)$ является точкой разрыва I рода.

2. $g(f(x))=\dfrac{2}{6\operatorname{arcctg}x-\pi}$.

Найдем область определения функции $g\left(f(x)\right)$: $6\operatorname{arcctg}x-\pi\neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{arcctg}x\neq\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x\neq\sqrt{3}$. $D\left(g\left(f(x)\right)\right)=\left\{\mathbb{R}\;\middle|\; x\neq\sqrt{3}\right\}$.

Точка $x=\sqrt{3}$ – точка разрыва этой функции. Определим её тип, вычислив односторонние пределы функции $g\left(f(x)\right)$ в этой точке:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{2}{6\left(\operatorname{arcctg}x-\frac{\pi}{6}\right)}=\left|\begin{array}{l} x\to\sqrt{3}-0, \\ \operatorname{arcctg}x\to\frac{\pi}{6}+0, \\ \text{т.к. } y=\operatorname{arcctg}x-\text{убывающающая} \\ \text{функция}. \\ \operatorname{arcctg}x-\frac{\pi}{6}\to+0 \end{array}\right|=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{2}{6\left(\operatorname{arcctg}x-\frac{\pi}{6}\right)}=\left|\begin{array}{l} x\to\sqrt{3}+0, \\ \operatorname{arcctg}x\to\frac{\pi}{6}-0, \\ \text{т.к. } y=\operatorname{arcctg}x-\text{убывающающая} \\ \text{функция}. \\ \operatorname{arcctg}x-\frac{\pi}{6}\to-0 \end{array}\right|=-\infty.$$

Поскольку в точке $x=\sqrt{3}$ односторонние пределы функции не существуют, то $x=\sqrt{3}$ для функции $g\left(f(x)\right)$ является точкой разрыва II рода.

Ответ:

$f(g(x))=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{6x-\pi}$; $x=\dfrac{\pi}{6}$ – точка разрыва I рода.

$g(f(x))=\dfrac{2}{6\operatorname{arcctg}x-\pi}$; $x=\sqrt{3}$ точка разрыва II рода.

Задание 10.

Найдите точки разрыва функции $y = f(x)$ и определите их тип. Постройте график функции.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если} \quad x \le 0, \\ -\operatorname{ctg} x, & \text{если} \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{3\pi - 2x}{8}, & \text{если} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение:

Очевидно, что область определения функции $y = f(x)$ $D(f) = \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$, т.к. на этих промежутках она является элементарной. Точки «стыка» $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ подозрительны на разрыв. Исследуем поведение функции в этих точках.

1) $x = 0$. Вычислим односторонние пределы:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \sqrt{-x} = 0, \; f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} (-\operatorname{ctg} x) = -\infty.$$

Т.к. один из найденных пределов не существует, то $x = 0$ для заданной функции является точкой разрыва II рода.

2) $x = \frac{\pi}{2}$. Вычислим односторонние пределы:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (-\operatorname{ctg} x) = 0, \; f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \left(\frac{3\pi - 2x}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Т.к. эти пределы существуют и $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \ne f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$, то точка $x = \frac{\pi}{2}$ для функции является точкой разрыва I рода.

График заданной функции изображен на рисунке 1.

Ответ:

$x = 0$ – точка разрыва II рода.

$x = \frac{\pi}{2}$ точка разрыва I рода.

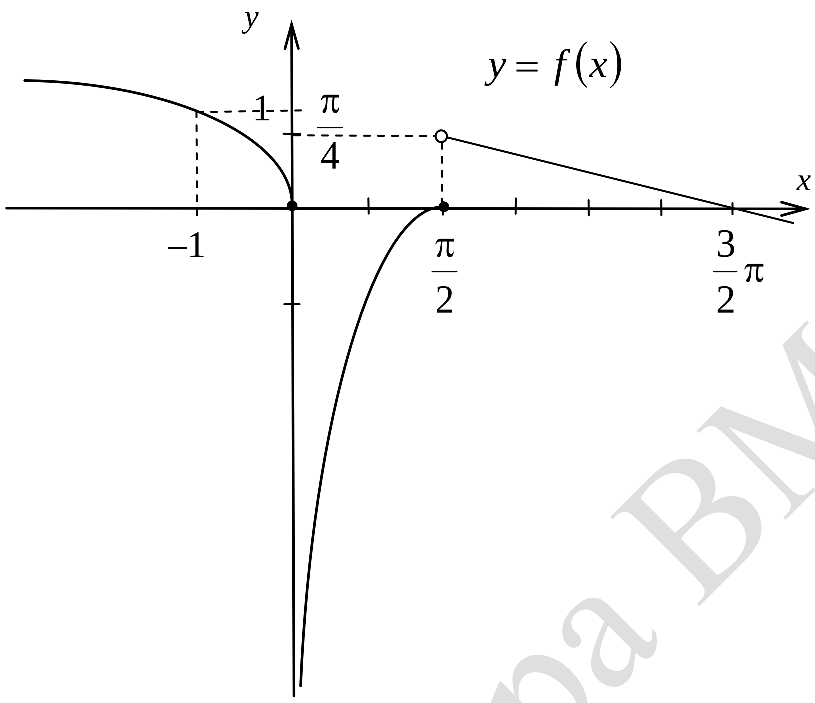

Рис. 1