Решение типового варианта заданий по теме

"Аналитическая геометрия и векторная алгебра"

БГУИР Кафедра ВМ

Автор:

ассистент кафедры высшей математики БГУИР

Василюк Людмила Ивановна

Содержание

2015

Задание 1.

Даны векторы $\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{b} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{c} = [\bar{e}_2; \bar{e}_1],\ \bar{d} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$**,**

где $|\bar{e}_1| = 1,\ |\bar{e}_2| = 2,\ \left(\bar{e}_1 \,\hat{,}\, \bar{e}_2\right) = \arcsin\dfrac{3}{5}$**.**

1. Постройте векторы $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$**, убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор** $\bar{d}$ **по этому базису.**

2. Докажите аналитически, что векторы $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора** $\bar{d}$ **в этом базисе.**

3. В параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$**, найдите:**

а) длины сторон $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$**; скалярное произведение** $(\bar{a}, \bar{b})$**;**

б) диагонали $\bar{d}_1$ **и** $\bar{d}_2$ **и их длины;**

в) внутренние углы параллелограмма и тупой угол между его диагоналями;

г) площадь параллелограмма и длины его высот.

4. В параллелепипеде, построенном на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$**, с основанием, образованным векторами** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$**, найдите:**

а) объем и длину высоты, опущенной на основание;

б) ориентацию тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$**.**

1. Постройте векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$, убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор $\bar{d}$ по этому базису.

Решение.

1). Построим угол $\varphi = \arcsin\dfrac{3}{5}$ – острый угол прямоугольного треугольника со сторонами $3k;\ 4k;\ 5k$ (рис. 1).

2). Изобразим векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, учитывая, что $|\bar{e}_1| = 1,\ |\bar{e}_2| = 2$. (рис. 2).

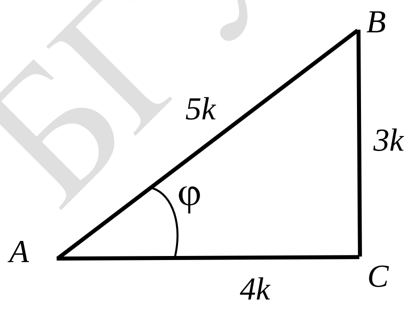


Рис. 1

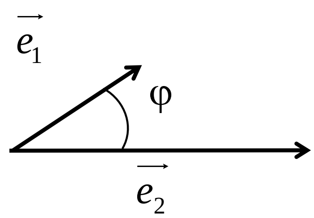
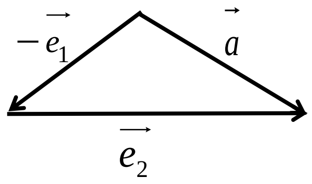


Рис. 2

3). Построим векторы $\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{b} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ (рис. 3, рис. 4):

БГУИР Кафедра ВМ



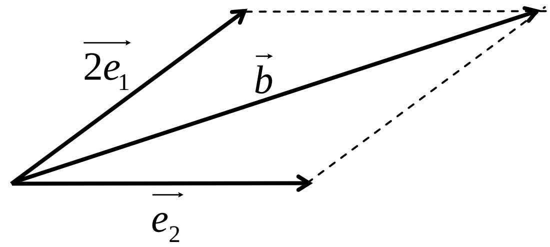


Рис. 3

Рис. 4

Действие выполнено по правилу треугольника

Действие выполнено по правилу параллелограмма

Очевидно: векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис, так как не являются коллинеарными векторами.

4). Построим вектор $\bar{d} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ (рис. 5).

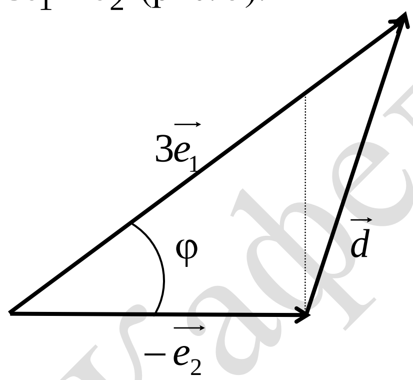


Рис. 5

5). Чтобы геометрически разложить вектор $\vec{d}$ по базису, образованному векторами $\vec{a}$ и $\bar{b}$, отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ от одной точки O (рис.6).

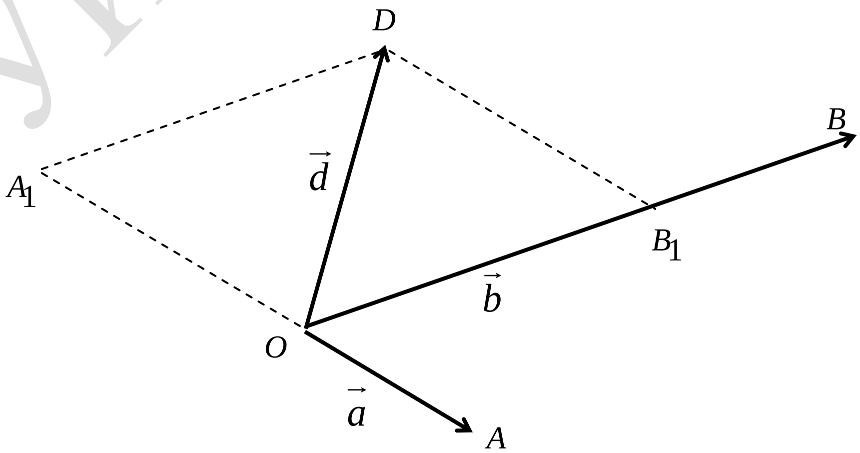


Рис. 6

OD – диагональ параллелограмма OA_1DB_1.

БГУИР Кафедра ВМ

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

где x и y – пара чисел, определяющих координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$.
По рисунку можно сделать следующие выводы:

$x < 0, |x| > 1;$

$y > 0, |y| < 1.$

2. Докажите аналитически, что векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение.

Известно:

$$\textbf{а)} \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0}, \\ \vec{b} \neq 0, \\ \left[\vec{a}; \vec{b}\right] = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

б) Векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис на плоскости, если будут не коллинеарными.

Вычислим их векторное произведение:

$$\left[\vec{a}; \vec{b}\right] = \left[-\vec{e}_1 + \bar{e}_2;\ 2\vec{e}_1 + \bar{e}_2\right] = \left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) \times \left(2\vec{e}_1 + \bar{e}_2\right) =$$

$$= -2\left[\vec{e}_1\right]^2 + 2\left[\bar{e}_2; \vec{e}_1\right] - \left[\vec{e}_1; \bar{e}_2\right] + \left[\vec{e}_2\right]^2 = \left| \begin{array}{l} \left[\vec{e}_1\right]^2 = 0, \\ \left[\vec{e}_2\right]^2 = 0, \\ \left[\vec{e}_1; \bar{e}_2\right] = -\left[\bar{e}_2; \vec{e}_1\right] \end{array} \right| = 3\left[\bar{e}_2; \vec{e}_1\right].$$

Найдем длину вектора $\left[\vec{a}; \vec{b}\right]$.

$$\left|\left[\vec{a}; \vec{b}\right]\right| = 3\left|\left[\bar{e}_2; \vec{e}_1\right]\right| = 3\left|\bar{e}_2\right| \cdot \left|\vec{e}_1\right| \cdot \sin\left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}.$$

Итак $\left[\vec{a}; \vec{b}\right] \neq \vec{0}$, значит $\vec{a}$ и $\bar{b}$ образуют на плоскости базис.

Пусть $(x; y)$ – координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$. Т. е. $\quad \bar{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \qquad (*)$

Найдем $(x; y)$.

В равенстве (*) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$ заменим на их линейные комбинации векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$:

$$3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = x\left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) + y\left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right),$$

$$3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = -x\overrightarrow{e_1} + x\overrightarrow{e_2} + 2y\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{ye_2},$$

БГУИР Кафедра ВМ

$3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = (-x + 2y)\overrightarrow{e_1} + (x + y)\overrightarrow{e_2}$.

Это векторное равенство возможно, если: $\begin{cases} -x + 2y = 3, \\ x + y = -1. \end{cases}$

Решив систему уравнений, получим: $y = \dfrac{2}{3}$; $x = -1\dfrac{2}{3}$.

$\left(-1\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ – координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$. Т. е. $\vec{d} = -1\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$.

Ответ: $\vec{d} = -1\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$.

3.

а) В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите длины сторон $\vec{a}$ и $\bar{b}$, скалярное произведение $(\vec{a}, \bar{b})$.

Решение.

Длины сторон параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$, т. е. длины векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдем так:

$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b})^2}$.

Заметим, что $\cos\left(\bar{e}_1 \,\hat{,}\, \bar{e}_2\right) = \cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{e_2}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cos\left(\bar{e}_1 \,\hat{,}\, \bar{e}_2\right)} = \sqrt{1 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5}} =$$

$$= \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; \qquad |\vec{a}| = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right)^2} = \sqrt{4\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{e_2}\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{4\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cdot \cos\left(\bar{e}_1 \,\hat{,}\, \bar{e}_2\right)} = \sqrt{4 \cdot 1^2 + 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{5}} =$$

$$= \sqrt{8 + \frac{32}{5}} = \sqrt{\frac{72}{5}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}; \qquad |\vec{b}| = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = -2\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{e_2}\right)^2 - \left(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}\right) + 2\left(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) =$$

БГУИР Кафедра ВМ

$$= \left| \left(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = \left(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}\right) \right| = -2\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{e_2}\right)^2 + \left(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}\right) =$$

$$= -2 \cdot 1^2 + 2^2 + \left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cdot \cos\left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = -2 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5};$$

$$(\vec{a}; \bar{b}) = \frac{18}{5}.$$

Ответ: $\left|\overrightarrow{a}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, $(\vec{a}; \bar{b}) = \frac{18}{5}$.

б) В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите диагонали $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ и их длины.

Решение.

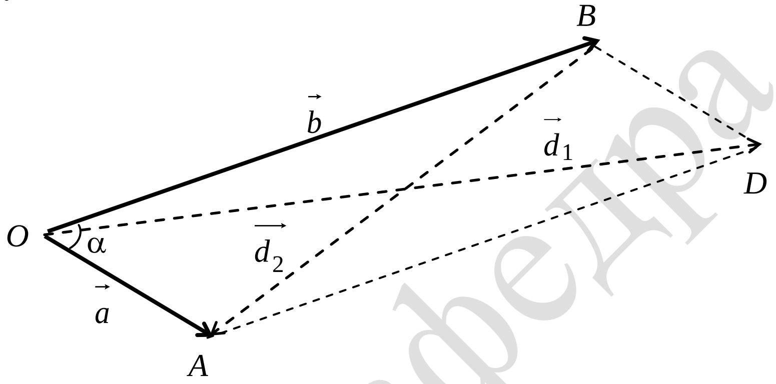


Рис. 7

$$\overrightarrow{d_1} = \vec{a} + \vec{b} = \left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) + \left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{2e_2},$$
$$\overrightarrow{d_2} = \vec{a} - \vec{b} = \left(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) - \left(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = -3\overrightarrow{e_1}.$$

$$\left|\overrightarrow{d_1}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{d_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{e_2}\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2 + 4\left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cdot \cos\left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right)} = \sqrt{1 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5}} =$$

$$= \sqrt{17 + \frac{32}{5}} = \sqrt{\frac{117}{5}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{65}, \qquad \left|\overrightarrow{d_1}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{65}.$$

$$\left|\overrightarrow{d_2}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{e_1}\right| = 3 \cdot 1 = 3, \qquad \left|\overrightarrow{d_2}\right| = 3.$$

Ответ: $\left|\overrightarrow{d_1}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{65}$, $\left|\overrightarrow{d_2}\right| = 3$, $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{2e_2}$, $\overrightarrow{d_2} = -3\overrightarrow{e_1}$.

БГУИР кафедра ВМ

в) В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите внутренние углы параллелограмма и тупой угол между его диагоналями.

Решение.

В параллелограмме $OADB$ (рис. 7) найдем угол O: $\angle O = \left(\vec{a} \,\widehat{,}\, \vec{b}\right)$,

$$\cos\left(\vec{a} \,\widehat{,}\, \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}; \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

В задании 1 пункте 3. а) мы уже нашли $(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{18}{5}$, $\left|\vec{a}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\left|\vec{b}\right| = \frac{6\sqrt{10}}{5}$,

значит $\cos\left(\vec{a} \,\widehat{,}\, \vec{b}\right) = \dfrac{\frac{18}{5}}{\frac{3}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{6}{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\left(\vec{a} \,\widehat{,}\, \vec{b}\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\angle O = \angle D = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle A = \angle B = \pi - \angle O = \dfrac{3}{4}\pi$.

Найдем угол между диагоналями $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$.

$\cos\left(\overrightarrow{d_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2}\right)}{\left|\overrightarrow{d_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{d_2}\right|}$. Вычислим $\left(\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2}\right) = \left(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}\right) \cdot \left(-3\overrightarrow{e_1}\right) = -3\left(\overrightarrow{e_1}\right)^2 - 6\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right) =$$

$$= -3\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 - 6\left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cdot \cos\left(\bar{e}_1 \,\widehat{,}\, \bar{e}_2\right) = -3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = -3 - \frac{48}{5} = -\frac{63}{5}.$$

$\left|\overrightarrow{d_1}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{65}$, $\left|\overrightarrow{d_2}\right| = 3$ – вычислили в предыдущей задаче.

$$\cos\left(\overrightarrow{d_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{d_2}\right) = \frac{-\frac{63}{5}}{\frac{3}{5}\sqrt{65} \cdot 3} = -\frac{7\sqrt{65}}{65}.$$

$$\overrightarrow{d_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{d_2} = \arccos\left(-\frac{7\sqrt{65}}{65}\right).$$

Ответ: $\angle O = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle A = \dfrac{3}{4}\pi$; $\overrightarrow{d_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{d_2} = \arccos\left(-\dfrac{7\sqrt{65}}{65}\right)$

БГУИР Кафедра ВМ

г) В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите площадь параллелограмма и длины его высот.

Решение.

Площадь (S_{OABD}) параллелограмма равна длине вектора – результата векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$:

$S_{OABD} = \left| \left[\vec{a}; \vec{b} \right] \right| = \frac{18}{5} \left(\text{ед}^2 \right)$ (см. задание 1 пункт 2. б)).

С другой стороны $S_{\text{пар.}} = a \cdot h_{\text{а}} = b \cdot h_b$,

$$h_a = \frac{S_{\text{пар.}}}{a} = \frac{\frac{18}{5}}{\left|\vec{a}\right|} = \left| \left|\vec{a}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{5} \right| = \frac{18 \cdot 5}{5 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5},$$

$$h_b = \frac{S_{\text{пар.}}}{b} = \frac{\frac{18}{5}}{\left|\vec{b}\right|} = \left| \left|\vec{b}\right| = \frac{6}{5}\sqrt{10} \right| = \frac{18 \cdot 5}{5 \cdot 6\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}.$$

Ответ: $S_{пар.} = \frac{18}{5}\left(\text{ед}^2\right)$, $h_a = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, $h_b = \frac{3}{10}\sqrt{10}$.

4.

а) В параллелепипеде, построенном на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, с основанием, образованным векторами $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите объем и длину высоты, опущенной на основание;

Решение.

Т.к. $\vec{c} = \left[\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}\right] \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{e_1}, \\ \vec{c} \perp \overrightarrow{e_2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a}, \\ \vec{c} \perp \vec{b}, \end{cases} \Rightarrow \vec{c} \perp (OADB)$ и параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – прямой. Его высота будет равна длине вектора $\vec{c}$.

$$H = \left|\vec{c}\right| = \left[\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}\right] = \left|\overrightarrow{e_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_2}\right| \cdot \sin\left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2 \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}, \qquad H = \frac{6}{5}.$$

$$V_{пар.} = S_{осн.} \cdot H = S_{OABD} \cdot H = \frac{18}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{108}{25}\left(\text{ед}^3\right).$$

Ответ: $V_{пар.} = \frac{108}{25} = 4{,}32\left(\text{ед}^3\right)$, $H = \frac{6}{5}$.

б) В параллелепипеде, построенном на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, с основанием, образованным векторами $\vec{a}$ и $\bar{b}$ найдите ориентацию тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение.

БГУИР Кафедра ВМ

$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=3\left[\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_1}\right]$ (см. задание 1 пункт 2. б)).
$\vec{c}=\left[\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_1}\right]$ – условие.
Значит $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\downarrow\downarrow\vec{c}$. Из этого следует, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку.

Ответ: Правая тройка.

БГУИР Кафедра ВМ

Задание 2.

Даны точки $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$. **Найдите:**

1. длину стороны AB **треугольника** ABC**;**

2. внутренний и внешний углы при вершине B **треугольника** ABC**;**

3. точку D **– конец вектора** $\overline{AD}=[\overline{AB};\ \overline{AC}]$;

4. ориентацию тройки векторов $\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}$;

5. объем тетраэдра $ABCD$ **(точка** D **найдена в пункте 3));**

6. расстояние от вершины D **до основания** ABC**;**

7. разложение вектора $\overline{DC}$ **по базису** $\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}$.

1. Найдите длину стороны AB треугольника ABC.

Решение.

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$, где $(x_1;y_1;z_1)$ – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=(2-1;2-3;1-6)=(1;-1;-5)$ – от координат точки B – конца вектора вычитаем координаты точки A – начала вектора.

$AB=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Ответ: $AB=3\sqrt{3}$.

2. Найдите внутренний и внешний углы при вершине B треугольника ABC.

Решение.

$\angle B=\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)$,

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(-1;1;5)$,

$\overrightarrow{BC}=(-1-2;0-2;1-1)=(-3;-2;0)$.

Найдем $\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$:

$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$,

где $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ – координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-1\cdot(-3)+1\cdot(-2)+5\cdot 0=3-2=1$.

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{13}$.

$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=3\sqrt{3}$.

БГУИР Кафедра ВМ

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{117}$$

Значит, $\angle B=\arccos\frac{\sqrt{39}}{117}$. $\angle B$ – внутренний угол $\triangle\ ABC$. Внешний угол треугольника ABC при вершине B равен $\pi-\arccos\frac{\sqrt{39}}{117}$, т.к. является смежным углом с внутренним углом B.

Ответ: $\angle B=\arccos\frac{\sqrt{39}}{117}$; $\pi-\arccos\frac{\sqrt{39}}{117}$.

3. Найдите точку D – конец вектора $\overrightarrow{AD}=\left[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right]$.

Решение.

Пусть D имеет координаты $(x;y;z)$. Тогда

$\overrightarrow{AD}=(x-1;\,y-3;\,z-6)$,

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3;-5)$.

Найдем вектор $\overrightarrow{AD}$ как результат векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & -5\\ -3 & -5\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & -5\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=-10\cdot\vec{i}+15\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}=(-10;15;-5).$$

Итак: $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(-10;15;-5),\\ \overrightarrow{AD}=(x-1;\,y-3;\,z-6),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-10,\\ y-3=15,\\ z-6=-5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9,\\ y=18,\\ z=1.\end{cases}$

Значит, $D(-9;18;1)$.

Ответ: $D(-9;18;1)$.

4. Найдите ориентацию тройки векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

Решение.

Ориентацию тройки векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ можно определить по знаку результата их смешанного произведения $\left(\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\cdot\overline{AD}\right)$.

БГУИР Кафедра ВМ

$$\left(\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\cdot\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\\ -10 & 15 & -5\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=350.$$

Т.к. смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ оказалось положительным числом, то эти векторы образуют правую тройку.

Ответ: Правая тройка.

5. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ (точка D найдена в задании 2 пункт 3.).

Решение.

$$V_{тетрABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\cdot\overline{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot|350|=\frac{175}{3}\left(\text{ед}^3\right).$$

Смешанное произведение $\left(\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\cdot\overline{AD}\right)$ мы вычислили в задании 2 пункт 4.

Ответ: $V=\dfrac{175}{3}\text{ ед}^3$.

6. Найдите расстояние от вершины D до основания ABC.

Решение.

Искомое расстояние – высота H тетраэдра $ABCD$, проведенная из вершины D к основанию ABC.

Известно, что $V_{тетр.}=\dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$, $V_{тетр.}=\dfrac{175}{3}$ (см. задание 2 пункт 5.).

$$H=\frac{3V}{S_{осн.}}=\frac{175}{S_{\Delta ABC}}.$$

Вычислим $S_{\Delta ABC}$:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB};\overline{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{AD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+(15)^2+(-5)^2}=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{14}$$ (см. задание 2 пункт 3.).

Значит, $H=\dfrac{175}{\frac{5}{2}\sqrt{14}}=\dfrac{70}{\sqrt{14}}=5\sqrt{14}$.

Ответ: $H=5\sqrt{14}$.

7. Найдите разложение вектора $\overline{DC}$ по базису $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

Решение.

$\overrightarrow{DC}=(8;-18;0)$ т.к. $D(-9;18;1)$ (см. п.3), $C(-1;0;1)$.

Пусть в базисе $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ вектор $\overrightarrow{DC}$ имеет координаты $(x;y;z)$, тогда:

БГУИР Кафедра ВМ

$\overrightarrow{DC} = x\overline{AB} + y\overline{AC} + z\overline{AD}$ или в координатной форме:

$$(8;-18;0) = x(1;-1;-5) + y(-2;-3;-5) + z(-10;15;-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8;-18;0) = (x - 2y - 10z; -x - 3y + 15z; -5x - 5y - 5z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 10z = 8, \\ -x - 3y + 15z = -18, \\ -5x - 5y - 5z = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получаем $(x; y; z) = (0;1;-1)$.

(Решить систему можно любым методом: матричным методом, методом Крамера или методом Гаусса.)

Итак: $\overrightarrow{DC} = 0 \cdot \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AD}$.

Ответ: $\overrightarrow{DC} = 0 \cdot \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AD}$.

БГУИР Кафедра ВМ

Задание 3.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC одна из его вершин находится в точке $(-7, 5)$, а гипотенуза AB лежит на прямой $l:\quad 2x - y + 4 = 0$. Найдите:

1. уравнения прямых, содержащих катеты треугольника;
2. уравнение медианы, проведенной к гипотенузе AB;
3. уравнения биссектрис острых углов;
4. координаты центра и радиус r вписанной в треугольник ABC окружности;
5. координаты центра и радиус R описанной около треугольника ABC окружности.

1. Найдите уравнения прямых, содержащих катеты треугольника.

Решение.

Точка $(-7; 5)$ не принадлежит прямой l, т.к. $2\cdot(-7)-5+4\neq 0$.Значит это координаты вершины $C(-7; 5)$ – прямого угла $\Delta\, ABC$.

$l:\ y = 2x+4,\ \ k = \mathrm{tg}\alpha = 2$ – угловой коэффициент этой прямой.

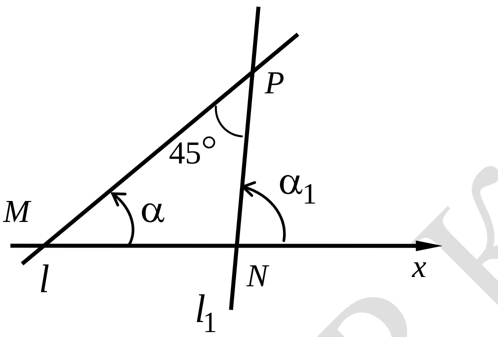


Рис. 8

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой l_1, пересекающей прямую l под углом $45°$. (Рисунок 8 – условный).

$k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1 = \mathrm{tg}(\alpha + 45°)$.

$\alpha_1 = \alpha + 45°$, т.к. является внешним углом $\Delta\, MNP$.

$$k_1 = \mathrm{tg}(\alpha+45°) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,45°}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,45°} = \left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\,45° = 1\\ \mathrm{tg}\,\alpha = k\end{matrix}\right| = \frac{k+1}{1-k}.$$

По условию $k = 2$. Значит $k_1 = -3$.

Одна из прямых, содержащих катет $\Delta\, ABC$ имеет коэффициент $k_1 = -3$ и задается уравнением $l_1:\ y = -3x + b_1$, а другая $l_2:\ y = \frac{1}{3}x + b_2$, $k_2 = \frac{1}{3}$, т.к. $l_1 \perp l_2$ – $\Delta\, ABC$ – прямоугольный, а, значит, $k_1\cdot k_2 = -1$ – условие перпендикулярности прямых.

b_1 и b_2 найдем, зная, что $l_1 \cap l_2 = C$, а это значит, что $C\in l_1$ и $C \in l_2$.

$l_1:\ 5 = -3\cdot(-7) + b_1 \qquad\qquad b_1 = 5 - 21 = -16$

$l_2:\ 5 = \frac{1}{3}(-7) + b_2 \qquad\qquad b_2 = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3}$

БГУИР Кафедра ВМ

Итак. $l_1:\ y = -3x - 16,$ $\qquad$ или $\qquad$ $l_1:\ 3x + y + 16 = 0,$

$l_2:\ y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{22}{3}\ ,$ $\qquad\qquad$ $l_2:\ x - 3y + 22 = 0.$

Ответ: $AC \in l_1, \quad l_1:\ 3x + y + 16 = 0,$

$BC \in l_2, \quad l_2:\ x - 3y + 22 = 0.$

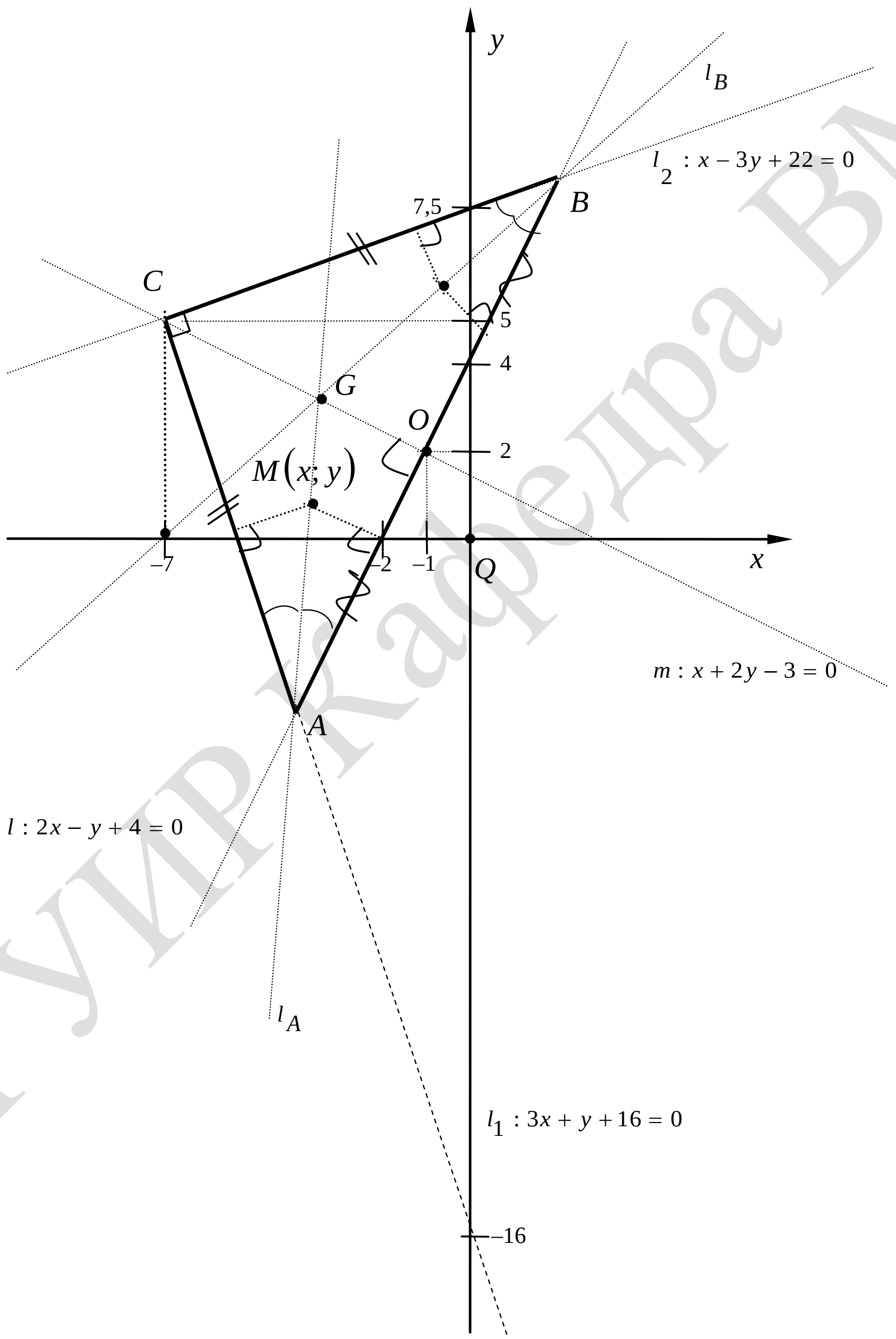


Рис. 9

БГУИР Кафедра ВМ

2. Найдите уравнение медианы, проведенной к гипотенузе AB.

Решение.

Медиана CO ΔABC является и высотой ΔABC, т.к. по условию ΔABC – равнобедренный $AC = BC$.

Следовательно, прямая CO перпендикулярна прямой l.

$CO = m$: $y = k_3 x + b_3$ где $k_3 \cdot k = -1$, значит $k_3 = -\dfrac{1}{2}$, т.к. $k = 2$.

m: $y = -\dfrac{1}{2}x + b_3$, $C(-7; 5) \in m, \Rightarrow 5 = -\dfrac{1}{2} \cdot (-7) + b_3$,

$b_3 = 5 - 3{,}5 = 1{,}5$ или $b_3 = \dfrac{3}{2}$.

Итак, m: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ или m: $x + 2y - 3 = 0$.

Ответ: Медиана m: $x + 2y - 3 = 0$.

3. Найдите уравнения биссектрис острых углов.

Решение.

Составим уравнение биссектрисы l_A угла A. Т.к. любая точка $M(x; y)$, принадлежащая l_A равноудалена от сторон этого угла (прямых l: $2x - y + 4 = 0$ и l_1: $3x + y + 16 = 0$, то

$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x + y + 16|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot (2x - y + 4) = \pm (3x + y + 16).$$

Мы получили уравнения двух прямых – биссектрис внутреннего угла A треугольника ABC и внешнего угла при этой же вершине.

Т.к. точка $M \in l_A$ относительно прямой l лежит по разные стороны с точкой Q – началом координат, а относительно прямой l_1– по одну сторону, то прямой l_A соответствует уравнение:

l_A: $\sqrt{2} \cdot (2x - y + 4) = -(3x + y + 16)$

l_A: $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot x + (1 - \sqrt{2})y + 4(4 + \sqrt{2}) = 0$.

Аналогично составляем равнение биссектрисы l_B угла B ΔABC:

$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 3y + 22|}{\sqrt{10}},$$

$\sqrt{2} \cdot (2x - y + 4) = \pm (x - 3y + 22)$.

l_B: $\sqrt{2} \cdot (2x - y + 4) = -(x - 3y + 22)$,

l_B: $(2\sqrt{2} + 1) \cdot x - (\sqrt{2} + 3)y + (4\sqrt{2} + 22) = 0$.

Ответ: биссектрисы l_A: $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot x + (1 - \sqrt{2})y + 4(4 + \sqrt{2}) = 0$,

l_B: $(2\sqrt{2} + 1) \cdot x - (\sqrt{2} + 3)y + (4\sqrt{2} + 22) = 0$.

БГУИР Кафедра ВМ

4. Найдите координаты центра и радиус r вписанной в треугольник ABC окружности.

Решение.

Центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис внутренних углов: l_A, l_B и m. Медиана m – биссектриса, т.к. ΔABC – равнобедренный по условию $AC = BC$.

Пусть $G(x; y)$ – центр вписанной окружности. Найдем её как $G = m \bigcap l_A$.

$$\begin{matrix} m: \\ l_A: \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ \sqrt{2} \cdot (2x - y + 4) = -(3x + y + 16) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ \sqrt{2} \cdot (6 - 4y - y + 4) + (9 - 6y + y + 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} \sqrt{2} \cdot (10 - 5y) + (25 - 5y) = 0, \\ \sqrt{2} \cdot (2 - y) + 5 - y = 0, \\ 2\sqrt{2} + 5 = y(1 + \sqrt{2}), \\ y = \dfrac{(5 + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}, \\ y = 3\sqrt{2} - 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\sqrt{2} - 1, \\ x = 3 - 6\sqrt{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\sqrt{2} - 1, \\ x = 5 - 6\sqrt{2} \end{cases}.$$

Итак: $G(5 - 6\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 1)$.

Найдем r как расстояние от точки G до прямой $l:\ 2x - y + 4 = 0$.

$$r = \frac{\left|2(5 - 6\sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + 1 + 4\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|15 - 15\sqrt{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{15(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}(\sqrt{2} - 1),$$

$r = 3\sqrt{5}(\sqrt{2} - 1)$

Ответ: $G(5 - 6\sqrt{2};\ 3\sqrt{2} - 1)$ – центр вписанной окружности, радиус $r = 3\sqrt{5}(\sqrt{2} - 1)$.

5. Найдите координаты центра и радиус R описанной около треугольника ABC окружности.

Решение.

Центром описанной окружности вокруг треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. В прямоугольном треугольнике это точка – середина гипотенузы.

Так как ΔABC – равнобедренный и прямоугольный, то O – центр описанной окружности. $O = m \bigcap l$

БГУИР Кафедра ВМ

Найдем координаты точки O, решив систему:

$$\begin{array}{l} m: \\ l: \end{array} \quad \begin{cases} x+2y-3=0, \Big| \times(-2) \\ 2x-y+4=0 \qquad + \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y+10=0, \\ x=3-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=-1. \end{cases}$$

$O(-1;\,2)$ – центр описанной окружности,

$R = OC = \left|\overrightarrow{OC}\right|$,

$\overrightarrow{OC} = (-7+1;\,5-2) = (-6;\,3)$,

$R = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

Ответ: $O(-1;\,2)$ – центр описанной окружности,
радиус $R = 3\sqrt{5}$

БГУИР Кафедра ВМ

Задание 4.

В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC (точки A, B, C даны в условии задания 2.), $A_1(1, 3, -2)$, найдите:

1. расстояние между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$;

2. уравнение плоскости $A_1B_1C_1$;

3. уравнение прямой A_1B_1;

4. расстояние между прямыми AB и A_1B_1, BC и A_1B_1;

5. расстояние и угол между прямыми AC_1 и A_1B;

6. точку A', симметричную точке A относительно BC;

7. угол между прямой AC_1 и плоскостью AA_1B_1B.

1. Найдите расстояние между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение.

Даны точки $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$. Составим уравнение плоскости (ABC). Пусть $M(x;y;z) \in (ABC)$, тогда векторы $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-5)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;-3;-5)$ и $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-3; z-6)$ будут компланарны, а, значит, их смешанное произведение будет равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (y-3) + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (z-6) = 0,$$

$$-10(x-1) + 15(y-3) - 5(z-6) = 0,$$

$$2(x-1) - 3(y-3) + z - 6 = 0,$$

$$(ABC): \quad 2x - 3y + z + 1 = 0.$$

Поскольку $(ABC) || (A_1B_1C_1)$, то расстояние между ними будем искать как расстояние от точки A_1, принадлежащей плоскости $(A_1B_1C_1)$ до плоскости (ABC) по формуле: $\rho = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

где $\quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ – уравнение плоскости α,

$M(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки от которой до плоскости находим расстояние $\rho = \dfrac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

БГУИР Кафедра ВМ

Ответ: $\rho = \frac{4}{7}\sqrt{14}$.

2. Найдите уравнение плоскости $A_1B_1C_1$.

Решение.

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow \vec{n}_{ABC} = \vec{n}_{A_1B_1C_1} = (2;-3;1)$.

Значит, $(A_1B_1C_1)$: $2x - 3y + z + D = 0$. (*)

Найдем D.

Т.к. $A_1(1;3;-2) \in (A_1B_1C_1)$, то её координаты при подстановке в уравнение (*) обратят его в верное равенство:

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 9$.

Значит, $(A_1B_1C_1)$: $2x - 3y + z + 9 = 0$.

Ответ: $2x - 3y + z + 9 = 0$.

3. Найдите уравнение прямой A_1B_1.

Решение.

$A_1(1;3;-2) \in A_1B_1$,

$AB \parallel A_1B_1$.

Можно составить каноническое уравнение прямой A_1B_1, выбрав за направляющий вектор прямой A_1B_1 вектор $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-5)$.

Ответ: $A_1B_1: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{-5}$.

4. Найдите расстояние между прямыми а) AB и A_1B_1; б) BC и A_1B_1.

Решение.

а) $AB \parallel A_1B_1$. Найдем расстояние между ними (рис. 10).

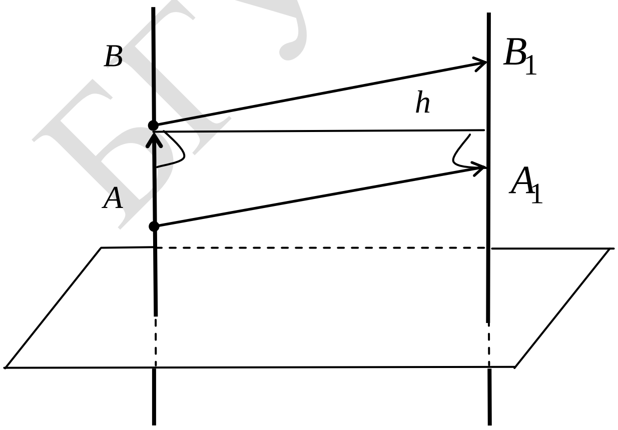


Рис. 10

ABB_1A_1 – параллелограмм.

$S_{ABB_1A_1} = \left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1} \right] \right|$,

с другой стороны $S_{ABB_1A_1} = \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot h$,

т.е. $\left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1} \right] \right| = \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot h$, значит

$$h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \right|}.$$

БГУИР Кафедра ВМ

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-5)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3\sqrt{3}$ (см. задание 2 пункт 1.).

$\overrightarrow{AA_1}=(1-1;\,3-3;-2-6)=(\,0;\,0;-8)$,т.к. $A(1;3;\,6)$, $A_1(1;3;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AA_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -8\end{vmatrix}=8\vec{i}+8\vec{j}+0\vec{k}=(\,8;\,8;\,0).$$

$\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AA_1}\right]\right|=\sqrt{8^2+8^2+0^2}=8\sqrt{2}$. Итак, $h=\dfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{8}{9}\sqrt{6}$.

Ответ: $h=\dfrac{8}{9}\sqrt{6}$

б) Прямые BC и A_1B_1 – скрещивающиеся (рис. 11).

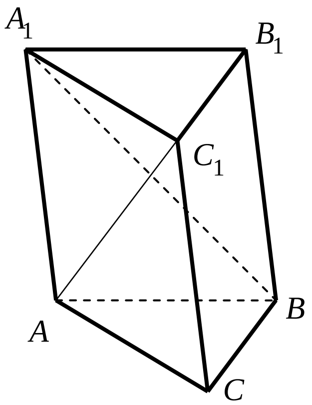


Рис. 11

Расстояние d между скрещивающимися прямыми:

$l_1:\ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{k_1}$ и

$l_2:\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{k_2}$,

где $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_1$, $\vec{s}_{l_1}=(m_1;n_1;k_1)$,

$M_2(x_2;y_2;z_2)\in l_1$, $\vec{s}_{l_2}=(m_2;n_2;k_2)$

вычисляется по формуле:

$$d=\frac{\left|\left[\vec{m};\overrightarrow{s_{l_1}}\right]\cdot\overrightarrow{s_{l_2}}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_{l_1}};\overrightarrow{s_{l_2}}\right]\right|},\ \text{где}\ \overrightarrow{M_1M_2}=\vec{m}.$$

$A_1B_1:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{-5}$, $\vec{s}_{A_1B_1}=(1;-1;-5)$, $A_1(1;3;-2)$.

$CB:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{0}$, $\vec{s}_{CB}=(3;2;0)$, $C(-1;0;1)$.

$\vec{m}=\overrightarrow{CA}=(\,2;3;-3)$,

$$\left(\left[\vec{m};\vec{s}_{A_1B_1}\right]\cdot\vec{s}_{CB}\right)=\begin{vmatrix}2 & 3 & -3\\ 1 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=(0-45-6)-(9+0-20)=-51+11=-40.$$

$$\left[\vec{s}_{A_1B_1};\vec{s}_{CB}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=10\vec{i}-15\vec{j}+5\vec{k}=(10;-15;5),$$

$$\left|\left[\vec{s}_{A_1B_1};\vec{s}_{CB}\right]\right|=\sqrt{10^2+(-15)^2+5^2}=5\sqrt{4+9+1}=5\sqrt{14}.$$

Итак: $d=\dfrac{|-40|}{5\sqrt{14}}=\dfrac{40\sqrt{14}}{5\cdot 2\cdot 7}=\dfrac{4\sqrt{14}}{5}$.

Ответ: $d=\dfrac{4\sqrt{14}}{5}$.

5. Найдите а) расстояние и б) угол между прямыми AC_1 и A_1B.

Решение.

а) Прямые AC_1 и A_1C – скрещивающиеся (рис. 11). Расстояние между ними находится аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче:

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$ – правило параллелограмма для суммы векторов.

$\overrightarrow{AC}=(-2;-3;-5)$ (см. задание 4 пункт 1.).

$\overrightarrow{AA_1}=(0;0;-8)$ (см. задание 4 пункт 4.).

$\overrightarrow{AC_1}=(-2;-3;-13)=\vec{s}_{AC_1}$, $\quad A(1;3;6)\in AC_1$.

$\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$ – правило треугольника для сложения векторов.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-5)$ (см. задание 4 пункт 1.).

$\overrightarrow{AA_1}=(0;0;-8)$ (см. задание 4 пункт 4.).

$\overrightarrow{A_1B}=(1;-1;3)=\vec{s}_{AB}$, $\quad A_1(1;3;-2)\in A_1B$.

$\vec{m}=\overrightarrow{AA_1}=(0;0;-8)$.

Найдем $\left(\left[\vec{m};\vec{s}_{AC_1}\right]\cdot\vec{s}_{A_1B}\right)$

$$\left(\left[\vec{m};\vec{s}_{AC_1}\right]\cdot\vec{s}_{A_1B}\right)=\begin{vmatrix}0 & 0 & -8\\ -2 & -3 & -13\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 8\\ 2 & 3 & 13\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 8\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$=8\cdot(-5)=-40$.

$$\left[\vec{s}_{AC_1};\vec{s}_{A_1B}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -3 & -13\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-22\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}=(-22;-7;5).$$

БГУИР Кафедра ВМ

$$\left|\left[\vec{s}_{AC_1};\vec{s}_{A_1B}\right]\right| = \sqrt{(-22)^2+(-7)^2+5^2} = \sqrt{484+49+25} = \sqrt{558} = 3\sqrt{62}.$$

$$d = \frac{|-40|}{3\sqrt{62}} = \frac{20\sqrt{62}}{93}.$$

Ответ: $d = \dfrac{20\sqrt{62}}{93}$.

б) Чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и A_1B будем искать угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{AC_1} = (-2;-3;-13)$ и $\overrightarrow{A_1B} = (1;-1;3)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AC_1} \,\hat{,}\, \overrightarrow{A_1C}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AC_1};\overrightarrow{A_1B}\right)}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1B}\right|} = \frac{-2\cdot 1+(-3)\cdot(-1)+(-13)\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-13)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}} =$$

$$= \frac{-2+3-39}{\sqrt{182}\cdot\sqrt{11}} = \frac{-38}{\sqrt{182}\cdot\sqrt{11}}$$

$$\alpha = \left(A_1B \,\hat{,}\, AC_1\right) = \arccos\frac{38}{\sqrt{182\cdot 11}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{38}{\sqrt{182\cdot 11}}$.

6. Найдите точку A', симметричную точке A относительно BC.

Решение.

Даны точки $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$.

1) Каноническое уравнение прямой BC:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y}{2-0} = \frac{z-1}{1-1}$$

$$BC:\ \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{0}$$

2). Составим уравнение плоскости α: (рис. 12):

$$\begin{cases}\alpha \perp BC \\ A \in \alpha\end{cases} \quad \vec{s}_{BC} = (3;2;0) = \overrightarrow{n_\alpha}.$$

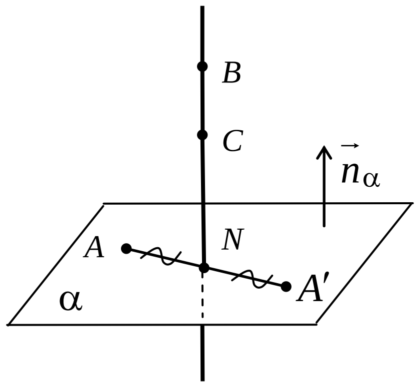


Рис. 12

$\alpha:\ 3x+2y+0z+D=0$.

Т.к. $A(1;3;6)\in\alpha$, то

$3\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot 6+D=0$ – верное равенство.

$D=-9$.

$\alpha:\ 3x+2y-9=0$

3). Найдем координаты точки N: $N = \alpha \cap BC$.

БГУИР Кафедра ВМ

$$\begin{cases} 3x+2y-9=0, \\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{0}=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t-1, \\ y=2t, \\ z=1, \\ 3(3t-1)+2\cdot 2t-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 13t=12 \\ t=\dfrac{12}{13} \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{13}, \\ y=\dfrac{24}{13}, \\ z=1. \end{cases}$$

$N\left(\dfrac{23}{13};\dfrac{24}{13};1\right)$.

4). Пусть точка A' имеет координаты $(x;y;z)$. Т.к. N – середина отрезка AA', то её координаты равны среднему арифметическому координат точек A и A':

$$\begin{cases} \dfrac{23}{13}=\dfrac{x+1}{2}, \\ \dfrac{24}{13}=\dfrac{y+3}{2}, \\ 1=\dfrac{z+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{46}{13}-1, \\ y=\dfrac{48}{13}-3, \\ z=2-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{33}{13}, \\ y=\dfrac{9}{13}, \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{33}{13};\dfrac{9}{13};-4\right).$$

Ответ: $A'\left(\dfrac{33}{13};\dfrac{9}{13};-4\right)$.

7. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью AA_1B_1B.

Решение.

Составим уравнение плоскости (AA_1B), проходящей через три точки

$A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $A_1(1;3;-2)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-5)$.

$\overrightarrow{AA_1}=(0;0;-8)$

$\overrightarrow{AM}=(x-1;y-3;z-6)$, где

$M(x;y;z)\in(AA_1B)$.

$\left(\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right]\cdot\overrightarrow{AA_1}\right)=0$, т.к. векторы компланарны.

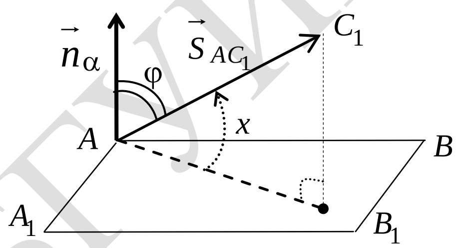


Рис. 13

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}=0.$$

$8(x-1)+8(y-3)=0$.

(AA_1B): $\quad x+y-4=0$, $\vec{n}_\alpha=(1;1;0)$.

БГУИР Кафедра ВМ

$\vec{s}_{AC_1} = \overrightarrow{AC_1} = (-2;-3;-13)$ (см. задание 4 пункт 5.)

Пусть x – искомый угол между плоскостью AA_1B и прямой AC_1. (рис. 13).

$x = 90 \pm \varphi$, где $\varphi = \left(\overrightarrow{n_\alpha} \,\hat{,}\, \vec{s}_{AC_1}\right)$.

$$\sin x = |\cos\varphi| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{n_\alpha} \,\hat{,}\, \vec{s}_{AC_1}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\vec{s}_{AC_1}\right|} = \frac{1\cdot(-2)+1\cdot(-3)+0\cdot(-13)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-13)^2}} =$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{2}\sqrt{182}} = \frac{5}{2\sqrt{91}}.$$

Ответ: $x = \arcsin\frac{5}{2\sqrt{91}}$.

БГУИР Кафедра ВМ

Задание 5.

Составьте уравнение кривой, каждая точка которой в два раза ближе к прямой $x = 2{,}5$, чем к точке $A(10;0)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

Решение.

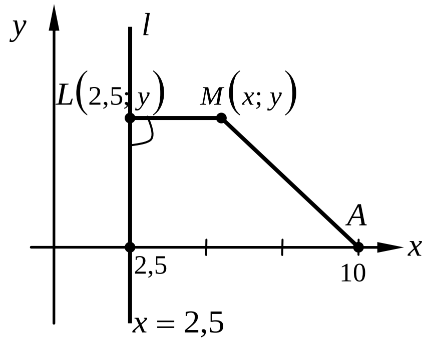


Рис. 14

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомой кривой (рис. 14)

$MA = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(x-10)^2 + (y-0)^2}$,

т.к. $A(10;0)$ и

$\overrightarrow{AM} = (x-10; y-0) = (x-10; y)$,

$ML \perp l, \quad l: \; x = 2{,}5$.

Координаты точки $L(2{,}5; y)$.

$LM = \left|\overrightarrow{LM}\right| = \sqrt{(x-2{,}5)^2 + (y-y)^2}$.

Согласно условию задачи $LM = \frac{1}{2} AM$. Составим уравнение:

$$\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + y^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = (x-10)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = x^2 - 20x + 100 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = 75.$$

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$ – гипербола (рис. 15).

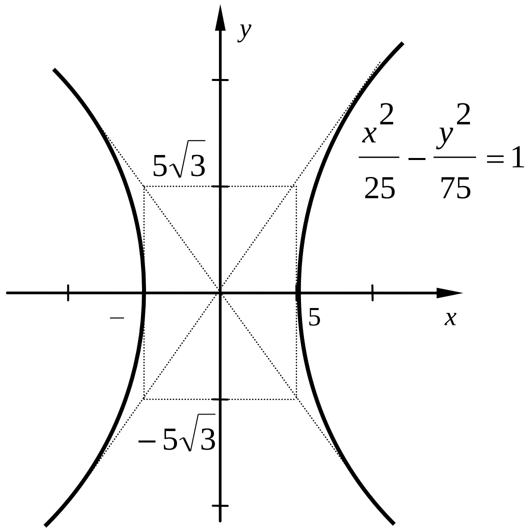


Рис. 15

БГУИР Кафедра ВМ

Задание 6.

**Даны уравнения второго порядка 1. – 4. Приведите их к каноническому виду. Учитывая, что уравнение второго порядка 1. – 3. от двух переменных на плоскости может определять некоторую кривую линию, а в трехмерном пространстве – цилиндрическую поверхность,
в задачах 1. – 3 постройте соответствующую кривую,
а в задачах 1. – 4. изобразите соответствующую поверхность.**

1. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$;

2. $x^2-4y^2+2x+8y-19=0$;

3. $y^2-4y+4x-16=0$;

4. $4x^2-y^2+4z^2-8x-16z+16=0$.

1. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$.

Решение.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты:

$\left(9x^2-18x\right)+\left(4y^2+16y\right)=11$,

$9\left(x^2-2x+1-1\right)+4\left(y^2+4y+4-4\right)=11$,

$9(x-1)^2-9+4(y+2)^2-16=11$,

$9(x-1)^2+4(y+2)^2=11+9+16$,

$9(x-1)^2+4(y+2)^2=36$.

Разделим обе части равенства на 36. Получим:

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1,\ a=2,\ b=3$ – каноническое уравнение, задающее в плоскости XOY эллипс. Полуоси эллипса a и b равны, соответственно, 2 и 3.

Этот эллипс получен из эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. в результате параллельного переноса, заданного вектором $\vec{k}=(1;-2)$. Т.е. центром эллипса будет точка $O(1;-2)$. Построим кривую (рис. 16).

В трехмерном пространстве это уравнение $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ задает эллиптический цилиндр. Осью цилиндра будет прямая l параллельная оси аппликат (OZ). Эта прямая проходит через точку $O(1;-2;0)$.

Построенный на рис. 16 эллипс для эллиптического цилиндра будет направляющей линией (рис. 17).

БГУИР Кафедра ВМ

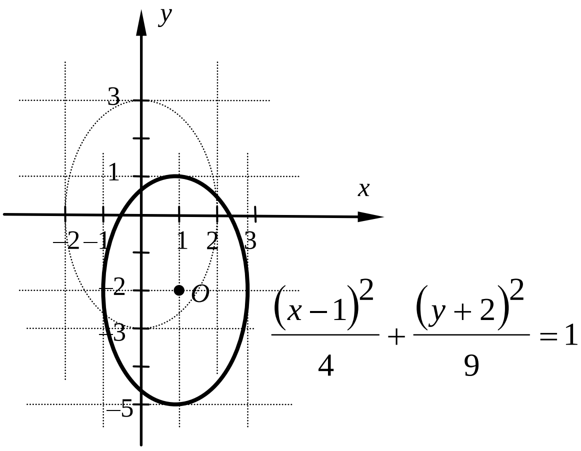


Рис. 16

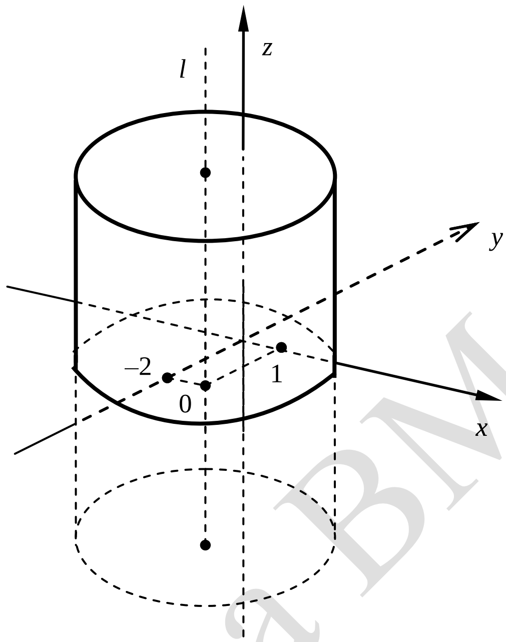


Рис. 17

2. $x^2-4y^2+2x+8y-19=0$.

Решение.

Выделив полные квадраты, приведем уравнение к каноническому виду.

$$\left(x^2+2x\right)-4\left(y^2-2y\right)=19$$

$$\left(x^2+2x+1\right)-4\left(y^2-2y+1\right)=19+1-4$$

$$(x+1)^2-4(y-1)^2=16$$

Разделим обе части уравнения на 16.

$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ – это уравнение на плоскости XOY задает гиперболу с центром в точке $O(-1;1)$.

Сначала построим гиперболу $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$, а затем подвергнем её параллельному переносу на вектор $\vec{k}=(-1;1)$.

$a=4,\ b=2$. У кривой $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ будут две наклонные асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$, т. е. $y=\pm\frac{1}{2}x$. Вершины гиперболы в точках $(4;0)$ и $(-4;0)$ (рис. 18).

БГУИР Кафедра ВМ

В трехмерном пространстве это уравнение $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ задает гиперболический цилиндр. Осью цилиндра будет прямая l, параллельная оси аппликат и проходящая через точку $O(-1;1;0)$. Построенная на рис. 19 гипербола будет для гиперболического цилиндра направляющей линией (рис. 20).

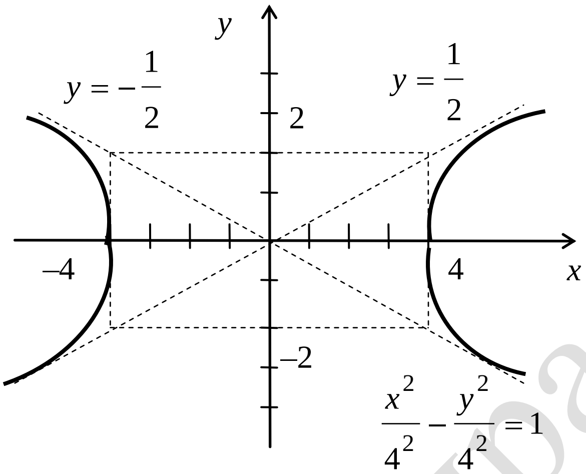


Рис. 18

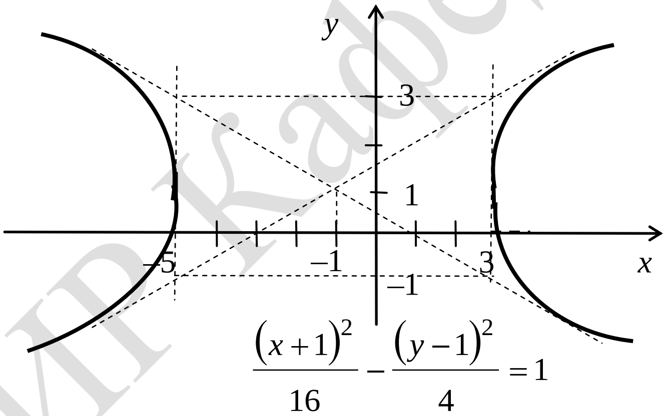


Рис. 19

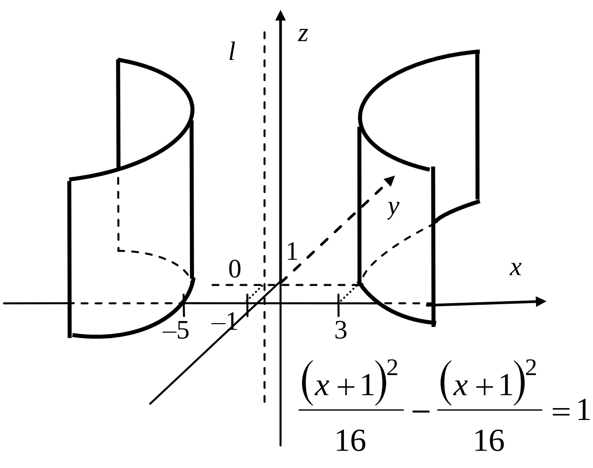


Рис. 20

БГУИР Кафедра ВМ

3. $y^2 - 4y + 4x - 16 = 0$.

Решение.

Сгруппировав слагаемые содержащие y и выделив полный квадрат, приведем уравнение к каноническому виду.

$\left(y^2 - 4y + 4\right) = -4x + 16 + 4$

$(y-2)^2 = -4(x-5)$ – каноническое уравнение на плоскости XOY задает параболу, полученную из параболы $y^2 = -4x$ в результате параллельного переноса на вектор $\vec{k} = (5;2)$. Парабола $y^2 = 2(-2)x,\ p = -2$ имеет вершину в точке $(0;0)$ и проходит через точки $(-4;4)$ и $(-4;-4)$ (рис. 21).

Вершина параболы $(y-2)^2 = -4(x-5)$ в точке $O(5;2)$ (рис. 21).

В трехмерном пространстве уравнение $(y-2)^2 = -4(x-5)$ задает параболический цилиндр образующая которого параллельна оси OZ (рис. 22).

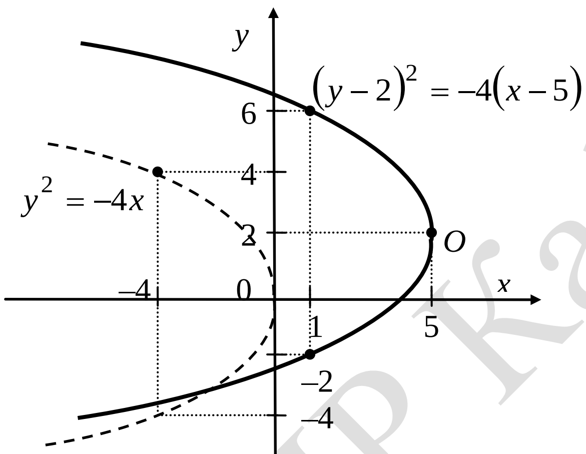


Рис. 21

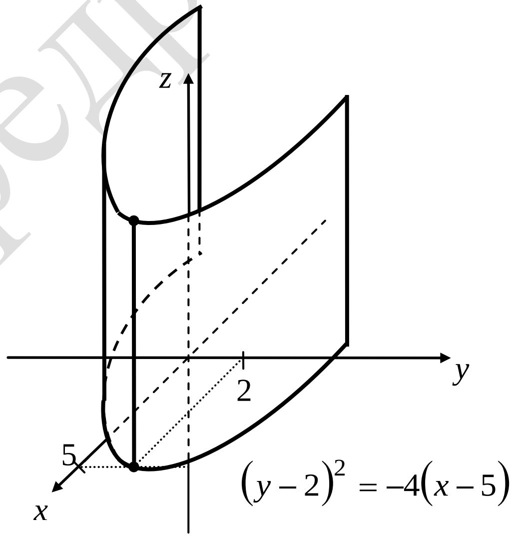


Рис. 22

4. $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x - 16z + 16 = 0$

Решение.

Выделяя полные квадраты приведем уравнение к каноническому виду.

$4\left(x^2 - 2x\right) - y^2 + 4\left(z^2 - 4z\right) = -16$.

$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - y^2 + 4\left(z^2 - 4z + 4\right) = -16 + 4 + 16$.

$4(x-1)^2 - y^2 + 4(z-2)^2 = 4$.

$\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{y^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{1}=1$ – каноническое уравнение однополостного гиперболоида вращения полученного в результате параллельного переноса на вектор $\vec{k}=(1;0;2)$ однополосного гиперболоида вращения $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ (рис. 23).

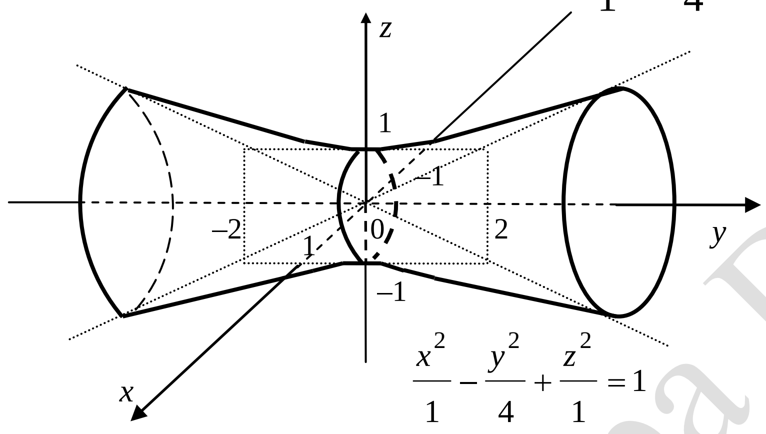


Рис. 23

Поверхность пересекает плоскость $YOZ:(x=0)$. Линия пересечения $\frac{z^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$ – гипербола с наклонными асимптотами $z=\pm\frac{1}{2}y$.

С плоскостью $XOZ:(y=0)$ – пересечение $x^2+z^2=1$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $r=1$.

На рис. 24 изображена заданная поверхность.

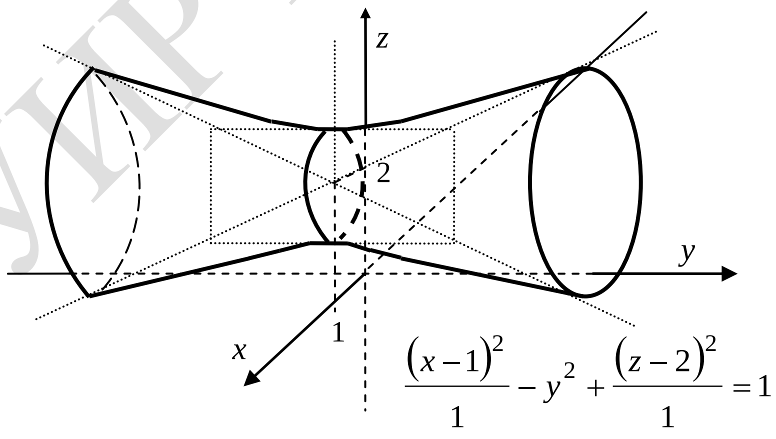


Рис. 24

БГУИР Кафедра ВМ