1. Клетки прямоугольника размера 7×8 покрашены в белый, синий и красный цвета так, что в любом квадратике 2×2 можно найти хотя бы одну клетку каждого цвета. Найдите наибольшее возможное число красных клеток.
Ответ: 32.
2. В олимпиаде по математике участвовали 45 студентов из разных городов. По окончании олимпиады n пар студентов обменялись адресами электронной почты. Через некоторое время Мише из Москвы понадобился e-mail Маши из Могилёва. При каком наименьшем значении n можно гарантированно утверждать, что Миша сможет узнать e-mail Маши (через других студентов)?
Ответ: 947.
3. В турнире по футболу участвовало 30 команд. По окончании соревнований оказалось, что в любой тройке команд можно выделить две, которые в трёх матчах внутри этой тройки набрали поровну очков (за победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0). Какое наименьшее количество ничьих может быть в таком турнире?
Ответ: 135.
4. Натуральное число n таково, что число $2n$ имеет 28 натуральных делителей, а число $3n$ – 30 натуральных делителей. Сколько натуральных делителей имеет число $6n$?
Ответ: 35.
5. Сколько решений имеет уравнение $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=x$, где $\left[x\right]$ – целая часть числа x, на отрезке $\left[1,2015\right]$?
Ответ: 335.
6. Найдите наибольшее решение уравнения $x^x = 10^{10^{1003}}$.
Ответ: 10^{1000}.
7. Известно, что никакие две диагонали выпуклого 17-угольника не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Найдите число тех точек пересечения диагоналей, которые лежат вне данного 17-угольника.
Ответ: 3094.
8. Сколькими способами можно выбрать из чисел $1,2,\ldots,12$ группу из трёх или более чисел, в которой никакие два числа не отличаются на 6? (Порядок чисел в группе не важен).
Ответ: 656.
9. На горизонтальной плоскости лежат четыре шара радиусом $\sqrt{3}$. Их центры находятся в вершинах квадрата со стороной $2\sqrt{3}$. Сверху в лунку, образованную этими шарами, положен пятый шар такого же радиуса. Найдите расстояние от его наивысшей точки до плоскости.
Ответ: $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$.
10. На горизонтальной плоскости стоит стакан цилиндрической формы, до краёв наполненный водой. Высота стакана в два раза больше диаметра основания. На какой угол φ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ нужно отклонить стакан от вертикали, чтобы из него вылилась ровно треть содержащейся воды?
Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.
11. В трапеции провели диагонали и соединили их середины. Вместе с нижним основанием полученные отрезки снова образуют трапецию. Эту операцию повторили 2015 раз. Верхнее основание последней трапеции оказалось равным верхнему основанию исходной трапеции. Высота исходной трапеции равна $\sqrt{2}$. Найдите площадь исходной трапеции, если длина её верхнего основания равна 4.
Ответ: $8\sqrt{2}$.
12. Таблица 10×10 клеток заполнена целыми числами от 1 до 100. При этом число 1 стоит на любом месте в таблице; число 2 принадлежит строке, порядковый номер которой равен номеру столбца, которому принадлежит 1; число 3 принадлежит строке, номер которой совпадает с но-

мером столбца, содержащего число 2, и т. д. Наконец, число 100 принадлежит строке, порядковый номер которой совпадает с номером столбца, которому принадлежит число 99. На сколько отличается сумма чисел строки, содержащей число 1, от суммы чисел столбца, содержащего число 100?

Ответ: 90.

13. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 2 & \dots & 8 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $-5{,}5 \cdot 10^9$.

14. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите сумму всех элементов матрицы $\cos A$.

Ответ: $2{,}5$.

15. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}$.

Ответ: 13.

16. Найдите наибольшее значение выражения $\left|\sum_{k=1}^{2015} \sin 2x_k\right|$ при условии, что $\sum_{k=1}^{2015} \sin^2 x_k = 4$.

Ответ: $4\sqrt{2011}$.

17. Наклонная прямая, проходящая через точку $(2015;0)$, пересекает гиперболу $y = \dfrac{10}{10+x}$ в точках A и B. Найдите абсциссу середины отрезка AB.

Ответ: $1002{,}5$.

18. Пусть A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 — последовательные вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Найдите $A_0A_1 \cdot A_0A_2$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

19. Найдите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}$.

Ответ: $\dfrac{\pi-3}{2}$.

20. Найдите $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m(n\cdot 3^m + m\cdot 3^n)}$.

Ответ: $\dfrac{9}{32}$.

21. Найдите $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$.

Ответ: $\ln 2$.

22. Найдите $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, если $a_1 = 19$, $a_2 = 361$, $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ при $n \ge 3$.

Ответ: 76.

23. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

24. Известно, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4bx-\sin x}\int\limits_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{t-a}}dt$ конечен и отличен от нуля. Найдите значение b.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

25. Вычислите $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^{2015}x}{\sin^{2015}x+\cos^{2015}x}dx$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

26. Вычислите $\int\limits_0^{+\infty}(x-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{2\cdot 4}-\dfrac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots)(1+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\dfrac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots)dx$.

Ответ: $\sqrt{e}$.

27. Функция $y=y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-\dfrac{y'}{x}+4x^2y=0$, а также условиям $y(0)=1$, $y(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}})=2$. Найдите значение $y(\sqrt{\dfrac{\pi}{4}})$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

28. Резервуар наполнен 75 литрами воды, содержащей 3 кг растворённой соли. Приток пресной (не содержащей соли) воды составляет 4 литра в минуту, а расход смеси из резервуара — 2 литра в минуту. Концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания. Найдите массу соли (в кг), которая будет содержаться в резервуаре через 25 минут.

Ответ: $1{,}8$.

29. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству

$$x^{2015}+x^{2014}+x^{2013}+1\equiv(x^3+x^2+x+1)\cdot P(x).$$

Найдите $P(-1)$.

Ответ: 1007.

30. Известно, что бесконечно дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $f(x+y)\equiv f(x)+f(y)+2xy$. Найдите $f(2015)$, если $f(1)=-2015$.

Ответ: -2015.