

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно 38° ?

Ответ: 44.

2. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигра; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

Ответ: 43200.

3. На плоскости задан правильный 17-угольник $A_1A_2\dots A_{17}$. Сколько имеется тупоугольных треугольников $A_iA_jA_k$?

Ответ: 476.

4. Для каждой пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 15) = 2xy,$$

вычислить сумму $x + y$. В ответ записать наибольшую из этих сумм.

Ответ: 28.

5. Найдите сумму корней уравнения $1 - |x + 1| = \frac{[x] - x}{|x - 1|}$.

Ответ: $-2 - \sqrt{5}$.

6. Первые 2014 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем последовательно вычёркивается каждое второе число. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется только одно число. Какое это число?

Ответ: 1981.

7. Про функцию f , определённую на множестве натуральных чисел, известно, что $f(m) \neq f(n)$, если $|m - n|$ — простое число. Какое наименьшее число значений может принимать такая функция?

Ответ: 4.

8. На прямой отмечены красные и зелёные точки, причём есть хотя бы по одной точке каждого цвета. Точки, между которыми лежит ровно 10 или ровно 15 других точек, окрашены в одинаковый цвет. Какое наибольшее число точек может быть отмечено?

Ответ: 26.

9. В трапеции $ABCD$ заданы основания $BC = 20$, $AD = 30$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся стороны CD .

Ответ: 15.

10. В прямой круговой конус с радиусом основания 1 и высотой 3 вписан куб так, что основание конуса содержит одну из граней куба, а вершины противоположной грани касаются поверхности конуса. Найдите ребро куба.

Ответ: $\frac{9\sqrt{2} - 6}{7}$.

11. Пчелиный улей находится в центре правильного треугольника со стороной 1. Одна сторона треугольника намазана мёдом, другая — вареньем, а третья посыпана сахаром. Пчела должна вылететь из улья, поесть мёда, варенья и сахара и вернуться домой. Найдите длину её кратчайшего пути.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

12. Из трёх точек, которые находятся на расстояниях 36 м, 72 м и 108 м от основания водонапорной башни, её видно под углами, сумма которых равна 90° . Найдите высоту башни (в метрах).

Ответ: 36.

13. Из пункта A в пункт B отправились одновременно два поезда. Каждый из них вначале двигался равноускоренно (ускорения поездов различны, начальные скорости равны нулю), а затем, набрав некоторую скорость, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 2. Пройдя четверть пути от A до B , поезда поравнялись, причём в этот момент скорость одного была в 1,5 раза больше скорости другого. Найти отношение промежутков времени, за которые поезда прошли путь от A до B .

Ответ: $\frac{2}{3}$.

14. В квадрате 7×7 клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

Ответ: 21.

15. Матрица, состоящая только из нулей и единиц, называется бинарной. Какое наибольшее число единиц может содержать невырожденная бинарная матрица десятого порядка?

Ответ: 91.

16. Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^T A = E$, где E — единичная матрица. Найти сумму квадратов всех миноров второго порядка ортогональной матрицы порядка 20.

Ответ: 190.

17. Пусть $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + \frac{7}{xy} + \frac{1}{z}$. Вычислить действительное число n , если известно, что $n = f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$ для некоторых попарно различных действительных чисел a, b, c .

Ответ: 98.

18. Найти наименьшую площадь эллипса, описанного около равнобедренного треугольника с основанием $9\sqrt{3}$ и высотой 5.

Ответ: 30π .

19. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

20. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \right)^n$.

Ответ: e^2 .

21. Пусть $x_0 = 2014$, $x_1 = 2015$, а $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Ответ: $2015 - \frac{1}{e}$.

22. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 x^{2013} \cdot \ln(1 + e^x) dx$.

Ответ: $\frac{1}{2015}$.

23. Пусть $t = f(x)$ — решение уравнения $t^5 + t = x$, $x > 0$. Вычислить интеграл $\int_0^2 f(x) dx$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

24. $y = \frac{1}{x^2 - 20x + 99}$. Найти $y^{(8)}(10)$.

Ответ: -40320 .

25. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg 3x - \arctg 9x}{x} dx$.

Ответ: $-\frac{\pi \ln 3}{2}$.

26. Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = x + y$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

27. В воздухе комнаты объёмом 200 м^3 содержится $0,15\%$ углекислого газа CO_2 . Вентилятор подаёт в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего $0,04\%$ CO_2 . Через какое время (в минутах) количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

Ответ: $10 \ln 11$.

28. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (2n + 1)}{n!}$.

Ответ: $9e^4$.

29. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2014}$ — корни уравнения $x^{2014} + x^{2013} + \dots + x + 1 = 0$. Найти $\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{1 - x_k}$.

Ответ: 1007 .

30. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{e^4} - \frac{\pi}{2}$.