

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

**ОПТИКА,
АТОМНАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА**

**Учебно-методический комплекс
по курсу «Физика»**

**ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**



Минск 2005

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 я 73
О 62

Авторы:
В.В. Аксенов, А.В. Березин, В.А. Морозов, Ю.И. Савилова.

О 62
Оптика, атомная и квантовая физика: Учебно-методический комплекс по курсу «Физика» для студ. всех спец. БГУИР заоч. формы обуч. /В.В. Аксенов, А.В. Березин, В.А. Морозов, Ю.И. Савилова. – Мн.: БГУИР, 2005. – 84 с.: ил.
ISBN 985-444-767-7

Учебно-методический комплекс является продолжением ранее изданных учебно-методических материалов по разделам: «Механика, механические колебания и упругие волны, молекулярная физика и термодинамика» и «электричество и магнетизм». Представленная работа включает в себя разделы: оптика, квантовая механика, физика твердого тела, атомная и ядерная физика. Учтены особенности учебных планов заочного факультета БГУИР, даны основные формулы, примеры решения задач по каждой теме и контрольные задания.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 я 73

ISBN 985-444-767-7

© Коллектив авторов, 2005
© БГУИР, 2005

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КУРСА

ОПТИКА

Световая волна. Показатель преломления среды. Законы геометрической оптики. Оптическая длина пути. Принцип Ферма. Интерференция. Принцип суперпозиции волн. Опыт Юнга. Понятие о когерентности. Временная и пространственная когерентность. Длина и радиус когерентности. Способы наблюдения интерференции света. Зеркала (или бипризмы) Френеля. Полосы равного наклона и равной толщины. Просветление оптики.

Дифракция. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Зоны Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия и от круглого непрозрачного диска. Дифракция Фраунгофера от щели. Дифракционная решетка. Угловая дисперсия и разрешающая способность решетки.

Поляризация. Естественный и поляризованный свет. Степень поляризации. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Эффект Керра. Вращение плоскости поляризации (оптическая активность). Магнитное вращение (эффект Фарадея).

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Квантовая природа электромагнитного излучения. Классическая и квантовая теория равновесного теплового излучения. Формула Планка. Фотоэффект. Формула Эйнштейна. Фотоны. Импульс фотона. Эффект Комптона.

Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля. опыты Дэвиссона и Джермера. Соотношения неопределенностей. Волновая функция, ее свойства. Уравнение Шредингера и его решение для частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Атом водорода. Периодическая система элементов.

Туннельный эффект. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение. Равновесное излучение. Принцип детального равновесия и формула Планка. Лазер (на примере трехуровневой системы).

Физика твердого тела. Физические типы кристаллических решеток. Теплоемкость кристаллов. Закон Дюлонга и Пти. Квантовая теория свободных электронов в металле. Распределение Ферми-Дирака. Энергетические зоны в кристаллах. Металлы, полупроводники, диэлектрики. Электропроводность металлов и полупроводников (собственная и примесная). Эффект Холла. Термоэлектрические явления. Полупроводниковые диоды и транзисторы. Сверхпроводимость. Магнитные свойства сверхпроводника (эффект Мейснера). Эффект Джозефсона. Высокотемпературная сверхпроводимость.

СТРОЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Физика ядра. Ядерные силы. Масса и энергия связи ядра. Радиоактивный распад. Ядерные реакции. Энергетическая схема ядерной реакции. Пути использования ядерной энергии. Элементарные частицы. Виды взаимодействия и классы элементарных частиц. Частицы и античастицы. Кварки.

1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция света – это явление перераспределения в пространстве световой энергии с образованием устойчивой во времени интерференционной картины чередования максимумов (I_{\max}) и минимумов (I_{\min}) интенсивности света при суперпозиции (наложении) двух или более когерентных волн.

Волны называются **когерентными**, если они имеют одинаковую частоту, поляризацию и не зависящую от времени разность фаз в произвольной точке их встречи.

Исследование интерференции волн сводится к определению разности фаз в точке их наложения. Рассмотрим две волны частоты ω , с одинаковой (для простоты) амплитудой E_0 и одинаковым направлением колебаний векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 (например, вдоль Oy), распространяющиеся по оси Ox :

$$E_{1y} = E_0 \cos(\omega t - k_1 x_1 + \alpha_1) = E_0 \cos \Phi_1,$$
$$E_{2y} = E_0 \cos(\omega t - k_2 x_2 + \alpha_2) = E_0 \cos \Phi_2.$$

Согласно принципу суперпозиции, напряженность результирующего поля в произвольной точке встречи волн равна их сумме:

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 2E_0 \cos\left(\frac{k_2 x_2 - k_1 x_1 + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_2 x_2 + k_1 x_1}{2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) =$$
$$= E_m \cos \omega t + \alpha.$$

Учитывая, что волновые числа равны $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi n_1}{\lambda}$ и $k_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda}$, где λ – длина волны в вакууме, n_1 и n_2 – показатели преломления сред, в которых распространяются волны, запишем амплитуду E_m суммарной волны в виде

$$E_m = \left| 2E_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \right| = \left| 2E_0 \cos \Phi_2 - \Phi_1 \right|,$$

где $\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1$ – оптическая разность хода волн.

Из-за большой частоты оптических колебаний напряженность E невозможно измерить непосредственно. Все приемники излучения измеряют энергетические

величины, усредненные за промежуток времени, много больший периода оптических колебаний.

Средняя по времени наблюдения интенсивность I волны, пропорциональна среднему значению квадрата ее амплитуды E_m^2 :

$$I \sim \langle E_m^2 \rangle = \left\langle 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right\rangle = \langle 4E_0^2 \cos^2 \Phi_2 - \Phi_1 \rangle$$

и равна

$$I = \left\langle 2I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right\rangle = \langle 2I_0 \cos^2 \Phi_2 - \Phi_1 \rangle,$$

где I_0 – интенсивность каждой из накладываемых волн (т.к. амплитуды этих волн одинаковы, то $I_1 = I_2 = I_0$).

Интенсивность I результирующей волны зависит от разности хода Δ и разности начальных фаз $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$. Рассмотрим два случая:

1. При распространении *некогерентных* волн от независимых источников начальные фазы $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются случайными функциями времени, причем их разность $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = f(t)$ также изменяется со временем. Поэтому

$\langle \cos^2 \Phi_2 - \Phi_1 \rangle = \frac{1}{2}$, тогда $\langle E_m^2 \rangle = 2E_0^2 = E_0^2 + E_0^2$ и интенсивность I результирующей волны складывается из интенсивностей I_1 и I_2 накладываемых волн:

$$I = I_1 + I_2 = 2I_0.$$

2. В случае наложения *когерентных* волн обе волны также имеют хаотически меняющиеся фазы, но закон изменения $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ одинаков, так как они относятся к одному и тому же фронту волны, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha(t)$ и их разность

$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ (или *const*). Тогда разность фаз $\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda}$ и, следовательно,

квадрат амплитуды E_m^2 результирующей волны определяется только значением оптической разности хода Δ , которая не зависит от времени, вследствие чего знак усреднения можно убрать:

$$E_m^2 = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda}\right) = 2E_0^2 \left(1 + \cos\frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda}\right).$$

Таким образом, интенсивность I результирующей волны также определяется только значением оптической разности хода Δ , не зависящей от времени:

$$I = I_0 \sqrt{2 \left(1 + \cos\frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda}\right)}.$$

Из этого выражения следует, что при $\cos\frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda} = 1$ интенсивность результирующей волны *максимальна* $I = I_{\max} = 2I_0$, а при $\cos\frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda} = -1$ интенсивность результирующей волны *минимальна* $I = I_{\min} = 0$.

Условие возникновения интерференционного максимума.

В некоторой точке пространства интенсивность I результирующей световой волны принимает максимальное значение I_{\max} , когда $\cos\frac{2\pi \cdot \Delta_{\max}}{\lambda} = 1$, тогда

$$\Delta_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (1.1)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – *порядок интерференции*;

или $\Phi_2 - \Phi_1 = 2m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Если в некоторой точке пространства две когерентные волны возбуждают колебания с *одинаковыми фазами* (волны приходят в эту точку в одинаковых фазах), т. е. оптическая разность хода этих волн равна *чётному числу полудлин волн*, то в этой точке наблюдается *интерференционный максимум*.

Условие возникновения интерференционного минимума.

В некоторой точке пространства интенсивность I результирующей световой волны принимает минимальное значение I_{\min} , когда $\cos\frac{2\pi \cdot \Delta_{\min}}{\lambda} = -1$, тогда

$$\Delta_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1.2)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

или $\Phi_2 - \Phi_1 = (2m + 1)\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Если в некоторой точке пространства две когерентные волны возбуждают колебания с *противоположными фазами* (волны приходят в эту точку в противофазах), т. е. оптическая разность хода этих волн равна *нечётному числу полудлин волн*, то в этой точке наблюдается *интерференционный минимум*.

Полученные результаты позволяют рассчитать параметры *интерференционной картины*, полученной в результате наложения двух когерентных волн от источников S_1 и S_2 , расстояние между которыми d (Рис. 1).

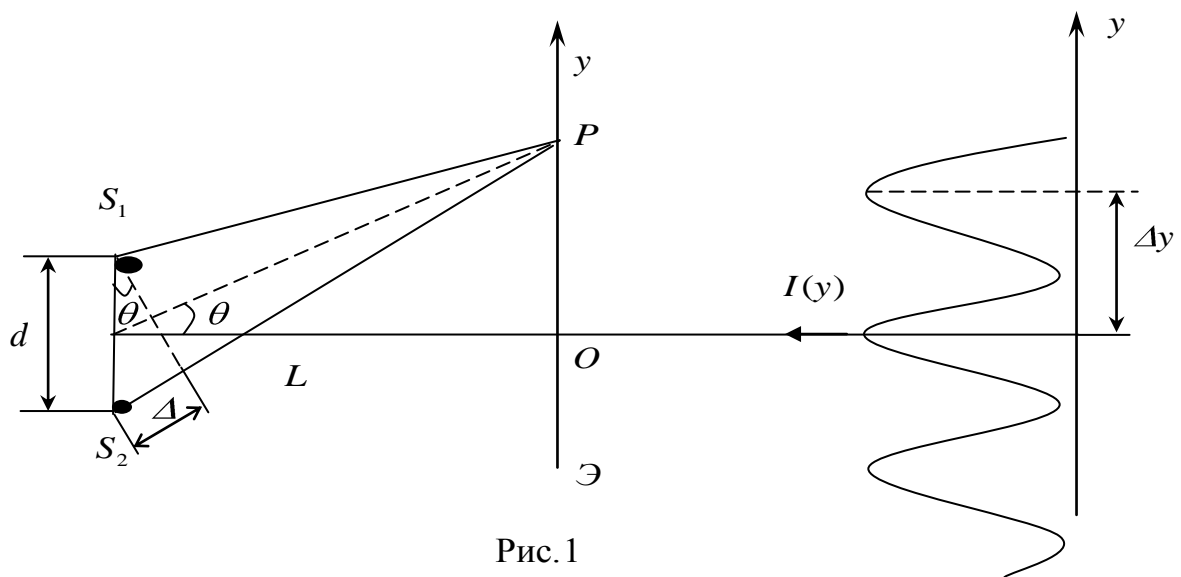


Рис. 1

Чтобы найти зависимость распределения интенсивности I на экране \mathcal{E} от координаты y точки наблюдения P , необходимо выразить через эту координату разность хода Δ . Для этого введем угол θ , образуемый направлением на точку P с перпендикуляром к линии, соединяющей источники (т. е. с «оптической осью» рассматриваемой схемы). Если $d \ll L$, $\theta \ll 1$, то $\text{tg}\theta \approx \sin\theta \approx \theta$ и разность хода равна $\Delta \approx d \cdot \theta$. Так как $\theta \approx \frac{y}{L}$, то

$$\Delta \approx \frac{yd}{L}.$$

И для амплитуды получим

$$I(y) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda L} y\right) \right].$$

Ширина интерференционных полос или пространственный период интерференционной картины – это расстояние Δy между соседними максимума или минимумами. Найдем координату m -го максимума, учитывая, что $\Delta y_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$y_m^{\max} = \frac{mL\lambda}{d}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta y = y_{m+1}^{\max} - y_m^{\max} = \Delta y_{\max} = \frac{L\lambda}{d}.$$

Найдем координату m -го минимума, учитывая, что $\Delta y_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$y_m^{\min} = \frac{(2m + 1)L\lambda}{2d}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta y = y_{m+1}^{\min} - y_m^{\min} = \Delta y_{\min} = \frac{L\lambda}{d}.$$

Измеряя Δy , можно найти λ .

2. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

При определенных условиях световые волны (как и другие волны) могут отклоняться от своего прямолинейного распространения.

Дифракция – это совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резко выраженными неоднородностями (размеры которых $\sim \sqrt{r\lambda}$, где r – расстояние до точки наблюдения), проявляющихся в перераспределении световой энергии в пространстве в результате суперпозиции волн.

В узком понимании *дифракция* – это огибание волнами препятствий и проникновение их в область геометрической тени (отклонение распространение волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики).

Для наблюдения дифракции световых волн необходимы специальные условия, обусловленные малостью их длин волн. Обычно на пути световой волны помещают непрозрачную преграду, закрывающую часть световой волны. За преградой помещают экран, на котором при определенных условиях возникает *дифракционная картина* в виде той или иной системы чередования полос или пятен – максимумов и минимумов освещенности.

Различают два вида дифракции:

1. Дифракция Френеля – источник и точка наблюдения находятся на конечном расстоянии от препятствия (дифракция в расходящихся пучках).
2. Дифракция Фраунгофера – на бесконечном расстоянии (дифракция в параллельных пучках).

2.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

Строгая теория дифракции основана на решении системы уравнений Максвелла. Приближенный метод решения задач о распространении волн основан на принципе Гюйгенса-Френеля, согласно которому все элементы поверхности, через которую в данный момент времени проходит фронт волны, становятся источниками *когерентных* вторичных волн, а волновая поверхность в любой последующий момент времени является результатом интерференции (наложения) этих вторичных волн. Таким образом, между интерференцией и дифракцией нет принципиального различия. Исторически принято называть интерференцией суперпозицию волн от конечного числа дискретно расположенных когерентных источников волн, а дифракцией – от бесконечного числа непрерывно расположенных когерентных источников.

Запишем математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля. Результирующее возмущение в точке P является суперпозицией возмущений, исходящих от участков dS волновой поверхности S (Рис. 2):

$$E = \int_{(S)} K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS,$$

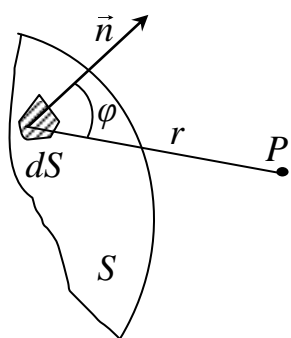


Рис. 2

где $K(\varphi)$ – коэффициент, обусловленный поперечностью волны;

$\frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$ – сферическая волна на расстоянии r от dS ;

$$dE_0 = K(\varphi) \frac{a_0}{r} dS \text{ – амплитуда возмущения от } dS.$$

Вычисления по данной формуле сложны, однако, в случаях, имеющих симметрию, сводятся к простому алгебраическому или геометрическому суммированию.

2.2. Дифракция Френеля

Для учета интерференции вторичных волн Френель предложил мысленно разбить волновую поверхность в месте расположения преграды (например, круглое отверстие на экране Э) на кольцевые зоны по следующему правилу: расстояния от краев соседних зон до точки P должны отличаться на $\frac{\lambda}{2}$ (Рис. 3 а).

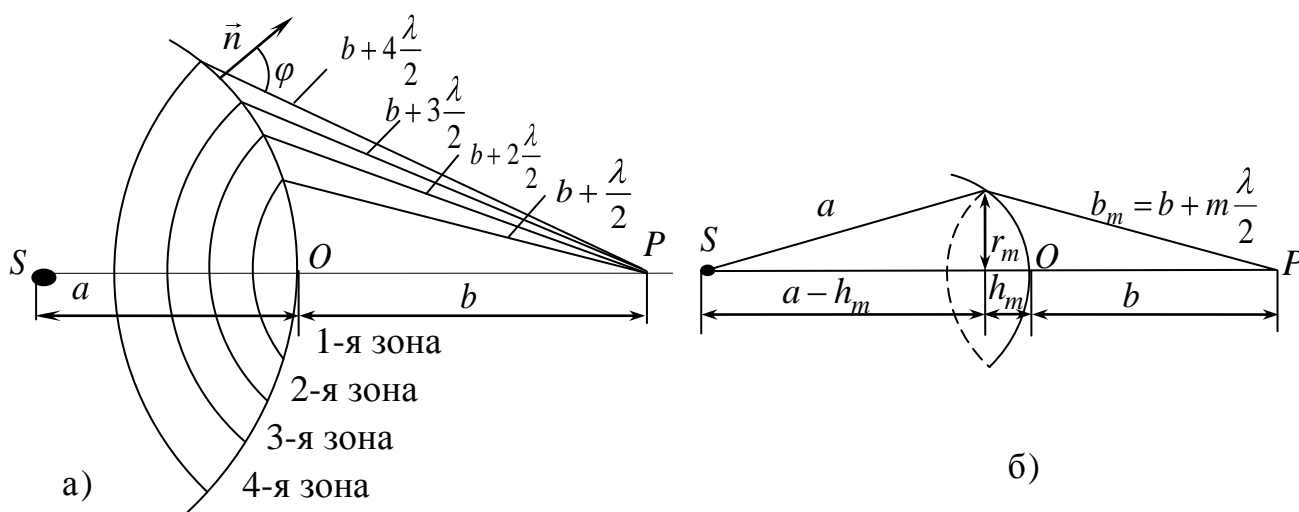


Рис. 3

Радиус r_m внешней границы m -й зоны связан с высотой h_m сферического сегмента и радиусом a сферической волновой поверхности следующим соотношением (Рис. 3, б):

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2.$$

С другой стороны r_m^2 можно представить в виде:

$$r_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - b + h_m^2.$$

Решая систему их двух последних уравнений относительно r_m с учетом малости длины волны λ и высоты h_m сегмента по сравнению с расстояниями a и b , получаем:

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}.$$

Площадь ΔS m -й зоны (при достаточно малых m) можно выразить через ее радиус r_m и радиус r_{m-1} соседней зоны:

$$\Delta S = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left(\frac{m\lambda ab}{a+b} - \frac{(m-1)\lambda ab}{a+b} \right) = \frac{\pi\lambda ab}{a+b},$$

откуда следует, что ΔS не зависит от номера зоны m , т. е. площади всех зон примерно одинаковы.

Поэтому все зоны должны возбуждать в точке P колебания одинаковой амплитуды. Однако это условие нарушается вследствие того, что у каждой последующей зоны угол φ больше, чем у предыдущей: $E_{01} > E_{02} > \dots > E_{0m}$. Разность хода от соседних зон равна $\frac{\lambda}{2}$, следовательно, колебания от них приходят в противофазах:

$$E_0 = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots$$

Выражения в скобках равны нулю, т.к. для монотонно убывающей функции

$$E_{0m} = \frac{E_{0(m-1)} + E_{0(m+1)}}{2}.$$

Таким образом, интенсивность света I (поскольку $I \sim E_0^2$) в точке P будет меняться не монотонно: пока открывается 1-я зона I увеличивается и достигает максимума при полностью открытой первой зоне (I в точке P в 4 раза больше, чем в отсутствие экрана); по мере открывания 2-й зоны I уменьшается почти до 0. При четном числе открытых зон в точке P наблюдается минимум интенсивности света, при нечетном – максимум.

Метод зон Френеля – алгебраический. Более полную информацию можно получить, используя метод графического сложения амплитуд колебаний. При этом волновую поверхность также делят на кольцевые зоны, но очень малой ширины:

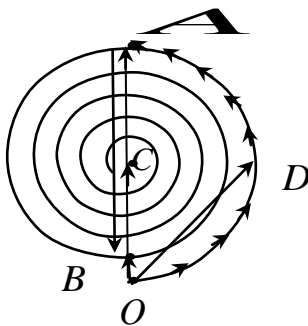


Рис. 4

$$r_m = b + m \frac{\lambda}{N}, \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Тогда векторная диаграмма имеет вид, изображенный на Рис. 4. \overline{OA} – результат действия 1-й зоны; \overline{AB} – результат действия 2-й зоны; \overline{OC} – суммарный вектор колебаний. Вектор \overline{OD} имеет длину в $\sqrt{2}$ больше, чем \overline{OC} , т. е. интенсивность света в точке P при открытой внутренней половине первой зоны в 2 раза больше, чем при числе зон, стремящихся к ∞ .

Если закрыть все четные или все нечетные зоны, то интенсивность света I в точке P резко возрастет, таким образом, получается *амплитудная зонная пластинка* (например фотографированием колец Ньютона).

Если изменить толщину этих четных или нечетных колец на $\frac{\lambda}{2}$, то интенсивность возрастает еще в 4 раза – *фазовая зонная пластинка* действует как линза.

2.3. Дифракция Фраунгофера от щели

Описанные в предыдущем разделе построения Френеля позволяют рассчитать интенсивность света I позади экрана \mathcal{E} с круглым отверстием в точке, лежащей на оси симметрии. Найти вид всей дифракционной картины очень сложно. Однако можно создать такие условия наблюдения дифракционного спектра, при которых возможен полный расчет интенсивность света I на экране. Пусть отверстие в экране представляет собой длинную щель шириной b , на которую нормально падает плоская световая волна (Рис.5).

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, волновую поверхность падающей волны в плоскости щели следует разбить на столь малые участки, чтобы колебания в точке наблюдались P , вызываемые вторичными волнами от всех точек одного участка, имели бы почти одинаковую фазу.

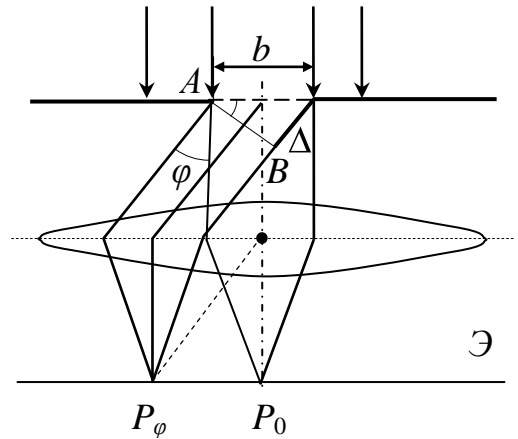


Рис. 5

Для нахождения результирующей амплитуды колебаний в любой точке экрана \mathcal{E} необходимо знать распределение фаз всех колебаний, приходящих в эту точку. Так как линза не вносит дополнительной разности хода, то распределение фаз в точке P φ будет таким же, как и в плоскости AB , образующей с плоскостью щели угол φ . Сумма когерентных возмущений от всех участков этой поверхности равна

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi}.$$

Распределение интенсивности света (как величины $\sim E_{\varphi}^2$) на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, описывается выражением

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)^2}, \quad (2.1)$$

где I_0 – интенсивность света, идущего от всей щели в направлении $\varphi = 0$.

При значении углов дифракции φ , удовлетворяющих условию:

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = k\pi,$$

т. е. при $b \sin \varphi = k\lambda$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ – порядок дифракции) $I_{\varphi} = 0$. Количество наблюдаемых минимумов $k \leq \frac{b}{\lambda}$, так как $|\sin \varphi| \leq 1$.

Найдем положения максимумов, продифференцировав выражение (2.1) и приравняв полученную производную нулю. Введем обозначение $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = z$.

$$I'(z) = 2I_0 \left(\frac{\sin z}{z}\right) \left(\frac{z \cos z - \sin z}{z^2}\right).$$

Из условия $\sin z = 0$ определяются положения минимумов, а из условия $\operatorname{tg} z = z$ – максимумов. Решая трансцендентное уравнение $\operatorname{tg} z = z$ графически (Рис.6), получим значения z , при котором $I = I_{\max}$.

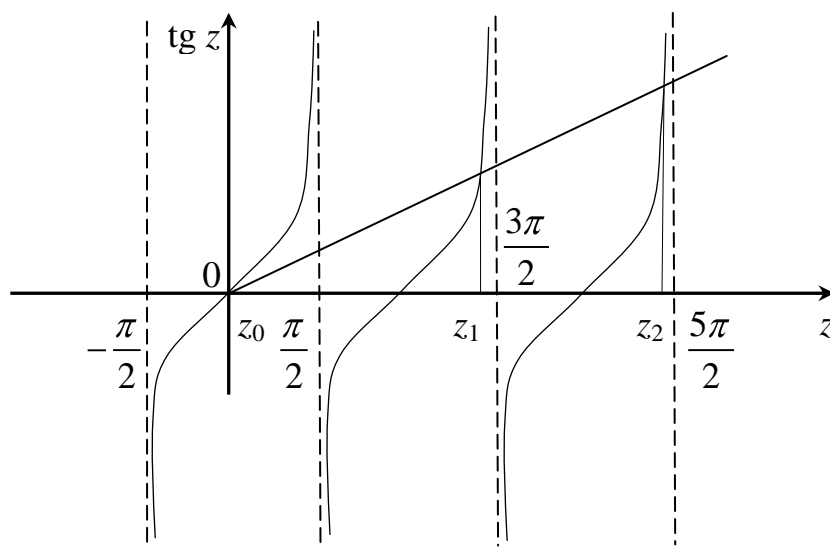


Рис. 6

Данное уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как имеется бесчисленное множество точек пересечения графиков функции $f = z$ и $f = \operatorname{tg} z$, однако число максимумов не превышает числа минимумов.

Таблица 1

z	$\left(\frac{\sin z}{z}\right)$
0	1
$1,43 \pi$	0,047
$2,46 \pi$	0,016
.....

На основании проведенного анализа можно построить график $I_{\varphi}(\sin \varphi)$ (Рис.

7). Угловая ширина центрального максимума $\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$.

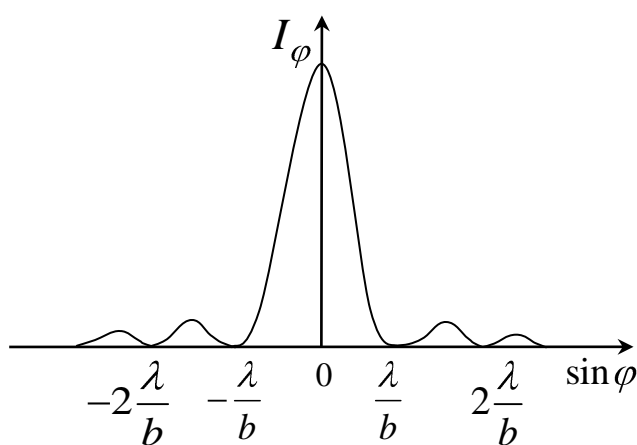


Рис. 7

На максимум первого порядка приходится 5 % падающей энергии, на максимум второго порядка – 2 %. Отметим, что подобная картина будет наблюдаться, если $b > \lambda$, но эти параметры соизмеримы. Если $b \gg \lambda$ или $b < \lambda$, то дифракционная картина не наблюдается.

2.4. Дифракционная решетка

Поскольку совокупность щелей усиливает эффект перераспределения световой энергии, то на практике используют дифракцию не на одной щели, а на дифракционной решетке.

Дифракционная решетка – спектральный прибор, состоящий из большого числа регулярно расположенных штрихов (щелей, канавок, выступов),

ных на прозрачную или металлическую поверхность. Дифракционные решетки используются для разложения света в спектр и измерения длин волн.

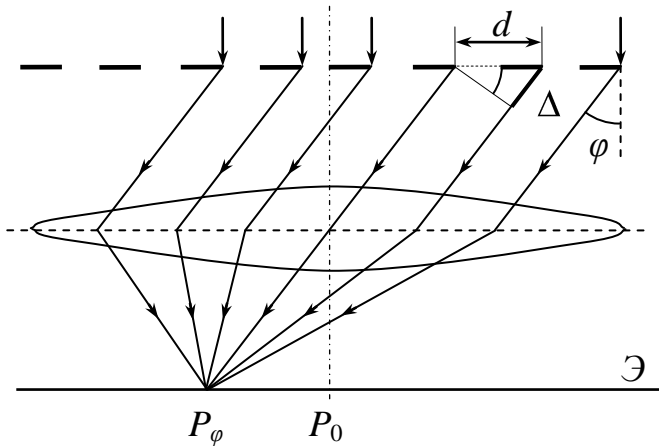


Рис. 8

Сумма ширины прозрачной части b и непрозрачной называется *периодом* решетки d (Рис. 8). Стекланные решетки могут иметь 1200 щелей (штрихов) на 1 мм ($d = 0,8$ мкм); металлические отражательные – до 2000 штр./мм. Длина решеток достигает 200 мм.

Как следует из выражения (2.1) $I = I(\sin \varphi)$, перемещение щели параллельно самой себе не изменяет дифракционную картину, т. е. если параллельно одной щели поместить другие, то создаваемые каждой щелью картины будут одинаковыми. Это означает, что результирующая дифракционная картина от N щелей получается путем сложения картин от каждой щели с учетом взаимной интерференции, т. е. результирующее колебание в точке P_φ представляет суперпозицию колебаний с одинаковыми амплитудами E_φ , но сдвинутыми по фазе на одну и ту же величину:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

где $\Delta = d \sin \varphi$ – оптическая разность хода двух вторичных волн, исходящими от соседних щелей, φ – угол дифракции.

Основанный на этом факте расчет дает следующее выражение для распределения интенсивности на экране Э при нормальном падении плоской световой волны на дифракционную решетку:

$$I_{\text{реш}} = I_\varphi \frac{\sin^2 \left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}.$$

Первый множитель I_φ обращается в 0 при

$$b \sin \varphi = k \lambda, \quad (2.2)$$

где b – ширина щели, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Это значит, что во всех направлениях φ , удовлетворяющих условию (2.2), свет не идет ни от одной щели, поэтому выражение (2.2) определяет угловые положения *главных минимумов*.

Второй множитель принимает значения N^2 в направлениях, удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = m \lambda, \quad (2.3)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – порядок спектра. Уравнение (2.3) называется *уравнением дифракционной решетки* и определяет положение всех *главных максимумов* за исключением случаев, когда отношение ширины щели b к периоду d дифракционной решетки $\frac{b}{d}$ равно отношению целых чисел.

Наибольший порядок максимума $m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right]$; число главных максимумов равно $2m_{\max} + 1$.

Между соседними главными максимумами имеется $N - 1$ добавочных минимумов – они возникают в направлениях, в которых колебания от отдельных щелей гасят друг друга:

$$d \sin \varphi = m \lambda + m' \frac{\lambda}{N}, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N - 1). \quad (2.4)$$

Между добавочными минимумами возникают слабые вторичные максимумы, число которых равно $N - 2$. Из выражений (2.2) и (2.3) следует, что при отдельных значениях m главные максимумы могут и не возникать. Это наблюдается, когда отношение ширины щели b к периоду d дифракционной решетки $\frac{b}{d}$ равно отношению целых чисел. Например, если $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ ($d = 2b$), то происходит наложение минимума первого порядка на максимум второго порядка, в результате чего по-

следний пропадает. При этом все четные главные максимумы также наблюдаться не будут (Рис. 9).

При падении плоской световой волны на дифракционную решетку под углом θ к нормали угловые положения главных дифракционных максимумов определя-

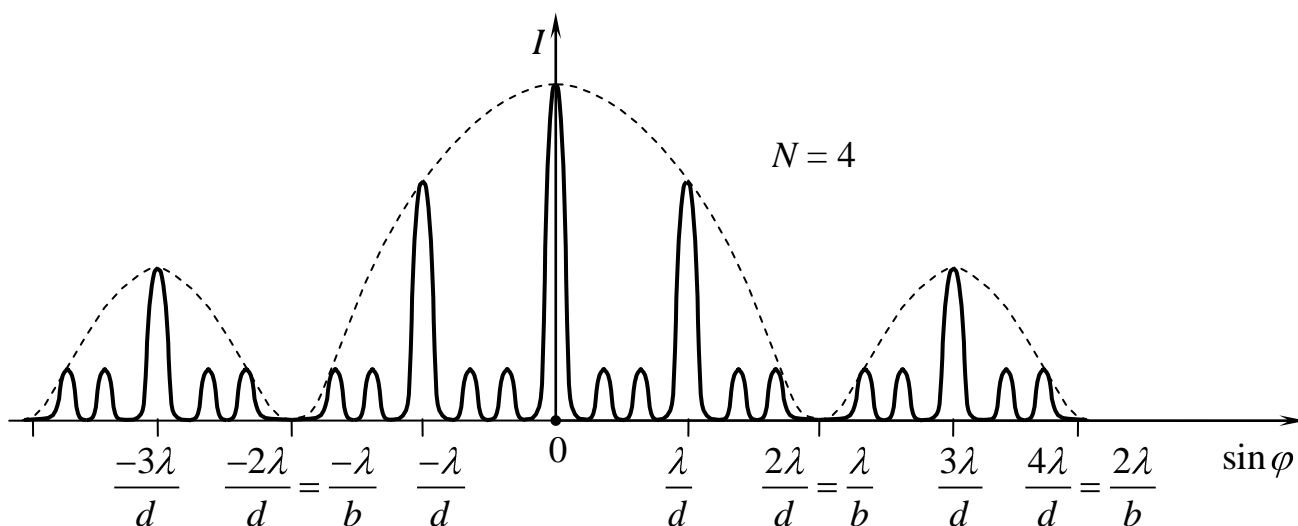


Рис. 9

ются условием:

$$d \sin \varphi - \sin \theta = m\lambda,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; φ – угол между нормалью к решетке и направлением распространения волн, образующих m -й максимум; при этом должно выполняться условие, что оба угла θ и φ отсчитываются от нормали к решетке в одном направлении.

2.5. Параметры решетки как спектрального прибора

Зависимость положения максимума и минимума от длины волны λ позволяет использовать дифракционную решетку для спектрального анализа.

Основными характеристиками спектральных приборов являются:

1) *угловая дисперсия* D , определяемая как

$$D = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda},$$

где $\delta \varphi$ – угловое расстояние между двумя соседними главными максимумами одного порядка для длин волн λ и $\lambda + \delta \lambda$.

Значение D можно найти, продифференцировав выражение (2.3):

$$d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda.$$

Следовательно,

$$D = \frac{m}{d \cos \varphi};$$

2) разрешающая способность R , равная

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda$ – минимальная разность между длинами волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются еще раздельно.

Эта минимальная разность определяется с помощью критерия Рэлея, согласно которому две спектральные линии с равными интенсивностями I и одинаковой симметрией контура разрешимы, если максимум одной линии совпадает с минимумом другой ($\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$). При выполнении этого условия интенсивность I

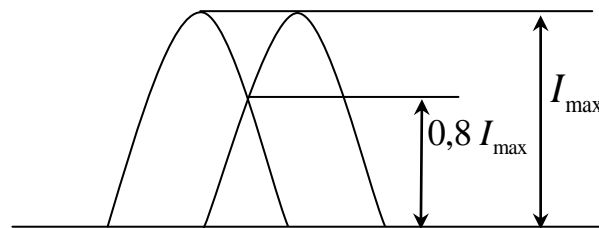


Рис. 10

в промежутке между максимумами составляет 80 % от I_{\max} (Рис. 10).

Выразим разрешающую способность R через порядок спектра m и число штрихов решетки N :

$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda)$$

$$d \sin \varphi_{\min} = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$

отсюда

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Тогда разрешающая способность R дифракционной решетки равна

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

2.6. Дифракция на пространственных структурах

Дифракция на пространственных структурах – важный случай дифракции, позволяющий исследовать периодические структуры, например кристаллы. Всякий монокристалл состоит из упорядоченно расположенных частиц (атомов, ионов, молекул), образующих трехмерную дифракционную решетку. Расстояние между узлами кристаллической решетки $d \approx 10^{-10}$ м, поэтому при прохождении видимого света с $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м дифракция не наблюдается (λ по порядку не должна превышать d). Зато для рентгеновских волн монокристалл является идеальной естественной дифракционной решеткой.

Простой метод расчета дифракционной картины основан на рассмотрении дифракции рентгеновских волн как результата их отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей (плоскостей, в которых лежат узлы

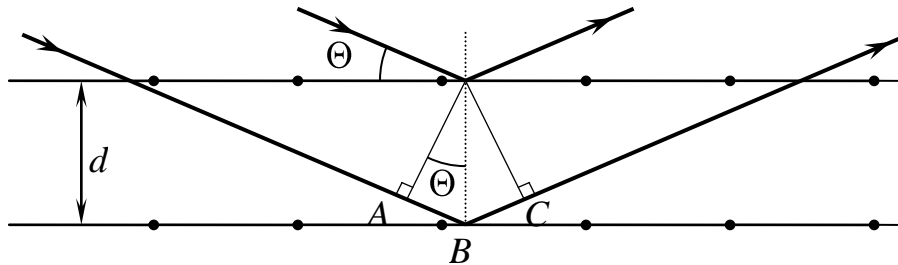


Рис. 11

кристаллической решетки). Это отражение осуществляется лишь при таких углах падения волн на кристалл, которые соответствуют интерференционным максимумам для волн, отраженных от разных плоскостей (Рис.11). Поскольку показатель преломления всех веществ для рентгеновского излучения близок к единице ($n \approx 1$), то оптическая разность хода двух волн, отразившихся зеркально от соседних кристаллографических плоскостей равна (см. Рис. 11)

$$\Delta = AB + BC = 2d \sin \Theta,$$

где d – межплоскостное расстояние, Θ – угол скольжения (дополнение угла падения до $\pi/2$) рентгеновских волн.

Направления, в которых возникают дифракционные максимумы, должны удовлетворять условию (формула Вульфа-Брэгга):

$$2d \sin \Theta = k\lambda, \quad \text{где } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, с помощью дифракционной картины можно исследовать спектральный состав рентгеновского излучения (рентгеноспектроскопия) и изучать структуру кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

В отличие от интерференции и дифракции при изучении явления поляризации необходимо учитывать векторные свойства электромагнитной волны

3.1 Поляризованный и естественный свет

В электромагнитной волне векторы напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} поля в каждой точке и в каждый момент времени образуют с волновым вектором \vec{k} правовинтовую систему (Рис. 12).

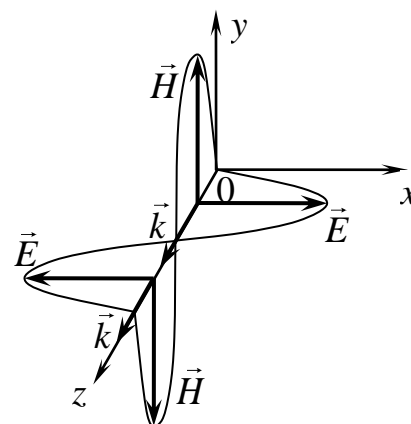


Рис. 12

В *естественном свете* колебания векторов \vec{E} и \vec{H} в любой точке пространства совершаются в разных направлениях, быстро и беспорядочно сменяя друг друга со временем, оставаясь при этом взаимно перпендикулярными.

Поэтому естественный свет обладает (статистически) *осевой симметрией* относительно направления его распространения.

Поскольку практически все действия света (на фотопленку, фотоэлемент и другие устройства для его регистрации) определяются вектором электрической напряженности \vec{E} электромагнитного поля световой волны, то вектор \vec{E} принято называть *световым вектором*.

Поляризованной называется электромагнитная волна, в которой направление колебаний светового вектора \vec{E} упорядочено каким-либо образом.

Плоскость, в которой лежат световой вектор \vec{E} и волновой вектор \vec{k} , называется *плоскостью поляризации*.

Плоская волна называется *плоскополяризованной* (или *линейно поляризованной*), если колебания вектора \vec{E} происходят только в одной плоскости, содержащей волновой вектор \vec{k} . Т. е. плоскополяризованная волна имеет единственное направление колебаний вектора \vec{E} .

Поскольку в естественном свете колебания вектора \vec{E} происходят по всевозможным равновероятным направлениям, то естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, плоскополяризованных с взаимно ортогональными плоскостями поляризации. Такое представление упрощает изучение прохождения естественного света через поляризационные приборы – устройства, выделяющие из естественного света плоскополяризованный.

3.2. Типы поляризации

Рассмотрим наложение двух плоских монохроматических когерентных волн, распространяющихся в одном направлении (Oz), линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Пусть световой вектор \vec{E} первой волны совершает колебания вдоль оси Ox , а второй волны – вдоль Oy :

$$E_x = E_{0x} \cos \omega t ,$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \delta) ,$$

где E_{0x} , E_{0y} – амплитуда колебаний светового вектора первой и второй волны соответственно; δ – разность фаз колебаний световых векторов второй и первой волны.

Результирующая световая волна также будет поляризованной, причем тип (характер) ее поляризации будет зависеть от значений E_{0x} , E_{0y} и δ .

В общем случае сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний (см. тему «Сложение взаимно перпендикулярных колебаний») с разными амплитудами и постоянной разностью фаз $\delta = const$ приводит к возникновению эллиптического колебания, т. е. колебания, при котором конец результирующего светового вектора \vec{E} описывает эллипс в плоскости волнового фронта с той же циклической частотой ω , с которой совершаются исходные колебания (Рис. 13, а). Вид и ориентация эллипса зависят от отношения амплитуд колебаний E_{0x} и E_{0y} световых векторов складываемых волн, а также и от их разности фаз δ .

Волна называется *эллиптически поляризованной*, если ее световой вектор

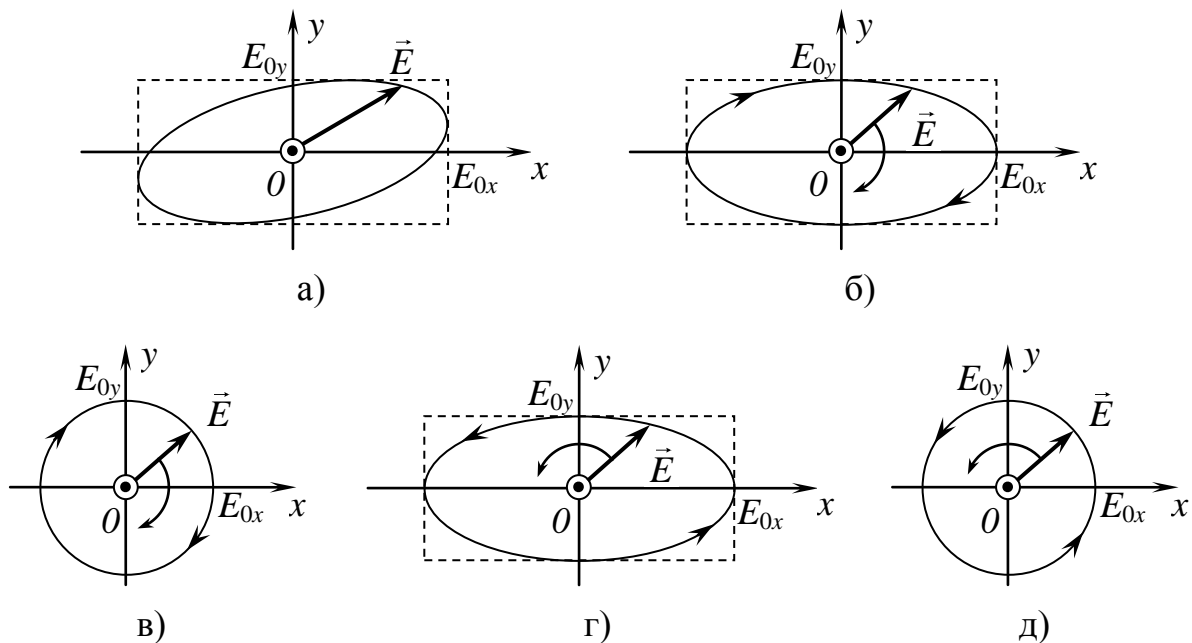


Рис. 13

\vec{E} в каждой точке равномерно вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения этой волны, одновременно периодически изменяясь по модулю так, что его конец описывает эллипс (Рис. 13, а, б, г). Волна называется *поляризованной по кругу* (или *циркулярно поляризованной*), если ее световой вектор \vec{E} в каждой точке равномерно вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения этой волны, так, что его конец описывает окружность (Рис. 13, в, д). В зависимости от направления вращения вектора \vec{E} различают *правую* и *левую* эллиптические (круговые) поляризации. Если смотреть *навстречу* распространения волны (на Рис. 13 световая волна распространяется в

направлении оси Oz), и вектор \vec{E} при этом поворачивается *по* часовой стрелке, то поляризация называется *правой* (Рис. 13, б, в), в противном случае (если *против* часовой стрелки) – *левой* (Рис. 3, г, д).

Если разность фаз $\delta = 2m + 1 \frac{\pi}{2}$ $m = 0, 1, 2, \dots$ и $E_{0x} \neq E_{0y}$, то результирующая волна имеет *правую эллиптическую поляризацию*, при этом оси эллипса совпадают с осями Ox и Oy (Рис. 13, б).

Если разность фаз $\delta = 2m + 1 \frac{\pi}{2}$ $m = 0, 1, 2, \dots$ и $E_{0x} = E_{0y}$, то результирующая волна имеет *правую циклическую поляризацию* (Рис. 13, в).

Если разность фаз $\delta = 2m - 1 \frac{\pi}{2}$ $m = 0, -1, -2, \dots$ и $E_{0x} \neq E_{0y}$, то результирующая волна имеет *левую эллиптическую поляризацию*, при этом оси эллипса совпадают с осями Ox и Oy (Рис. 13, г).

Если разность фаз $\delta = 2m - 1 \frac{\pi}{2}$ $m = 0, -1, -2, \dots$ и $E_{0x} = E_{0y}$, то результирующая волна имеет *левую циклическую поляризацию* (Рис. 13, д).

Если разность фаз $\delta = 2m\pi$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то результирующая волна имеет линейную поляризацию, при этом направление колебаний вектора \vec{E} со-

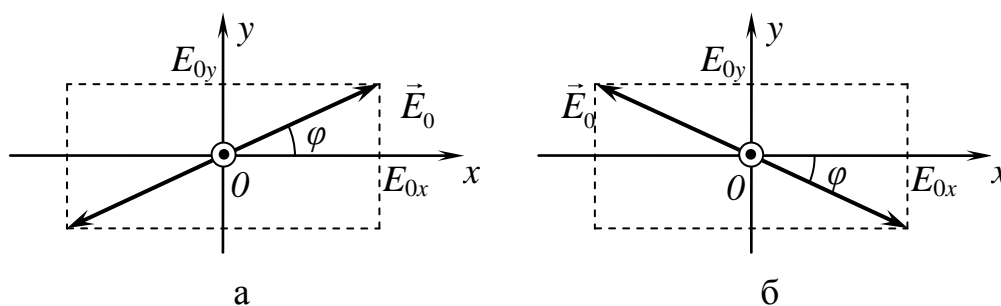


Рис. 14

ставляет с осью Ox угол $\varphi = \arctg \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$, а амплитуда колебаний равна

$$E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad (\text{Рис. 14, а}).$$

Если разность фаз $\delta = 2m + 1 \pi$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то результирующая волна имеет линейную поляризацию, при этом направление колебаний вектора \vec{E} со-

ставляет с осью Ox угол $\varphi = \arctg\left(-\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)$, а амплитуда колебаний равна

$$E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad (\text{Рис. 14, б}).$$

Т. о., наложение двух плоских монохроматических когерентных волн, распространяющихся в одном направлении, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях приводит к образованию волны с эллиптической, круговой или линейной поляризацией. Кроме этого можно показать, что сложение двух волн с правой и левой круговой поляризацией приводит к появлению волны с линейной или эллиптической поляризацией.

Волну с эллиптической поляризацией всегда можно разложить либо на сумму двух взаимно перпендикулярных плоскополяризованных волн, либо на сумму двух поляризованных по кругу волн с правой и левой поляризациями. В зависимости от характера решаемой задачи может оказаться предпочтительным первое (при изучении распространения света в анизотропных средах) или второе (при изучении естественного и магнитного вращений плоскости поляризации) разложение.

Делая вывод из изложенного, можно уточнить определение поляризованного света, как света, у которого имеется определенное фазовое соотношение между взаимно перпендикулярными компонентами светового вектора.

3.3. Степень поляризации

Свет, у которого имеется наиболее вероятное (преимущественное) направление колебаний вектора \vec{E} , называется *частично поляризованными*. Его можно рассматривать как смесь естественного света и поляризованного.

Степень поляризации P частично поляризованного света равна

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_0},$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальное и минимальное значения интенсивности света, прошедшего через поляризационный прибор; $I_{\text{пол}}$ – интенсивность поляризован-

ной составляющей частично поляризованного света; $I_0 = I_{\max} + I_{\min}$ – полная интенсивность частично поляризованного света.

Для естественного света степень поляризации $P = 0$, для плоскополяризованного – $P = 1$. К эллиптически поляризованному свету это понятие не применимо.

3.4. Способы получения поляризованного света

3.4.1. Поляризация света при отражении и преломлении

При падении естественного света на границу раздела двух диэлектриков отраженный и преломленный свет являются частично поляризованными. В отраженном свете преобладают колебания вектора \vec{E} , перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном свете – параллельные плоскости падения. Степень поляризации отраженной и преломленной волн зависит от угла падения.

При определенном угле падения θ_B (угол Брюстера) отраженная волна будет поляризована полностью, а преломленная волна имеет максимальную степень поляризации. При этом отраженный луч образует с преломленным углом $\frac{\pi}{2}$ (Рис. 15), и закон

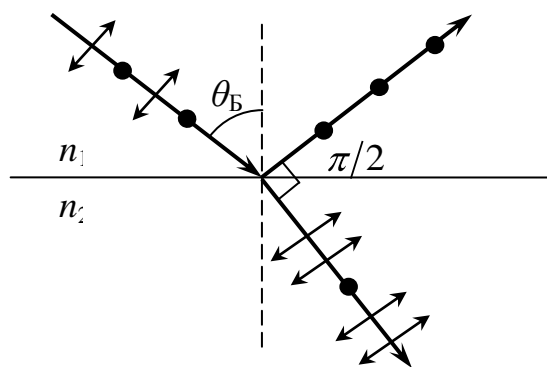


Рис. 15

преломления запишется в виде

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right),$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред соответственно. Откуда следует **закон Брюстера**:

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Явление поляризации света при отражении и преломлении возникает вследствие поперечности электромагнитных волн и объясняется механизмом взаимодействия световой волны с излучателями (атомами или молекулами).

3.4.2. Поляризация при двойном лучепреломлении

Свет, падающий на прозрачные кристаллы (за исключением кристаллов кубической системы), расщепляется на две волны, распространяющиеся в общем случае с разными скоростями и в разных направлениях. Это явление называют *двойным лучепреломлением*.

Кристаллы, в которых наблюдается двойное лучепреломление, делятся на *одноосные* и *двухосные*. У одноосных (исландский шпат, турмалин, кварц и т. д.) имеется одно направление распространения света, для которого не наблюдается двойное лучепреломление. Это направление называется *оптической осью кристалла*. Двухосные кристалла (слюда, гипс и т. д.) имеют два таких направления. Любая плоскость, содержащая оптическую ось, называется *главным сечением (главной плоскостью)*. Обычно выбирают главное сечение (плоскость), в которой лежит световой луч в кристалле.

У одноосных кристаллов (Рис. 16) один из лучей удовлетворяет обычному закону преломления ($n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$), он называется *обыкновенным (o)*. Для другого – *необыкновенного (e)* луча – отношение синусов углов падения и преломления зависит от угла падения, и он, как правило, не лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

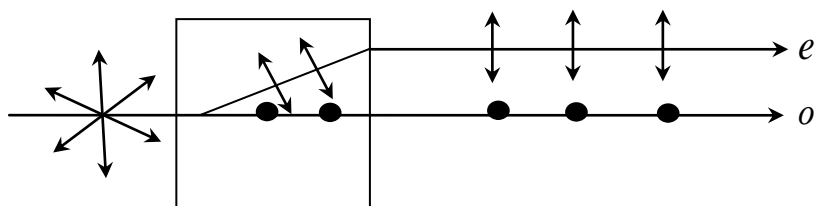


Рис. 16

Обыкновенная и необыкновенная волны (лучи) линейно поляризованы. Колебания вектора \vec{E} в обыкновенной волне (o) перпендикулярны главному сечению кристалла для обыкновенного луча, а в необыкновенной волне (e) колебания вектора \vec{E} лежат в главном сечении для необыкновенного луча.

После прохождения кристалла обе волны линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются параллельны друг другу и падающему свету.

Двойное лучепреломление является следствием анизотропии диэлектрических свойств кристаллов: значения диэлектрической проницаемости ε , а, следовательно, и абсолютного показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, зависят от направления. Анизотропия кристалла по-разному оказывает влияние на скорости распространения обыкновенной и необыкновенной волн. В то время как скорость v_o обыкновенной волны не зависит от направления в кристалле, скорость v_e необыкновенной волны по мере отклонения ее распространения от оптической оси (вдоль которой скорости обеих волн одинаковы) все больше изменяется (увеличивается или уменьшается), достигая максимальной разницы в направлении, перпендикулярном оптической оси.

Одноосные кристаллы характеризуются показателем преломления n_o обыкновенного луча и показателем преломления n_e необыкновенного луча, перпендикулярного оптической оси:

$$n_o = \frac{c}{v_o} \quad \text{и} \quad n_e = \frac{c}{v_e},$$

где v_o – скорость обыкновенного луча; v_e – скорость необыкновенного луча в направлении, перпендикулярном оптической оси.

Некоторые кристаллы, в которых наблюдается двойное лучепреломление, обладают *дихроизмом* – неодинаковым поглощением световых волн, имеющих разную поляризацию. Одним из естественных поляризаторов является турмалин, в котором при толщине кристалла в 1 мм обыкновенный луч почти полностью поглощается.

3.5. Закон Малюса

Описанные выше явления лежат в основе действия *поляризаторов* – оптических устройств для получения из естественного света полностью или частично поляризованного. Эти устройства пропускают колебания, параллельные плоскости, называемой *плоскостью пропускания*, и задерживают (полностью или частично) колебания, перпендикулярные этой плоскости. Поляризаторы можно ис-

пользовать и в качестве *анализаторов* – устройств, с помощью которых определяется характер и степень поляризации света.

Рассмотрим следующий эксперимент. Направим естественный свет интенсивностью I_e нормально к поверхности пластинки Π , вырезанной из кристалла турмалина таким образом, что ее плоскость пропускания параллельна оси, в направлении которой поглощение практически отсутствует (Рис. 17).

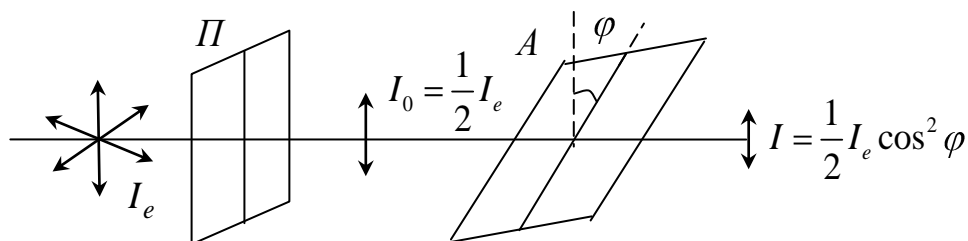


Рис. 17

Поляризатор Π пропустит лишь колебания, параллельные его плоскости пропускания, которые в общем случае образуют угол φ с плоскостью пропускания анализатора A . Разложим эти колебания с амплитудой E_0 на две составляющие с амплитудами $E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi$ и $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$. Очевидно, что E_{\perp} не пройдет через анализатор A , тогда интенсивность I прошедшего через анализатор (или поляризатор) A света, прямо пропорциональная $I \sim E_{\parallel}^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi$, будет равна:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) выражает **закон Малюса** для плоскополяризованного света.

Из закона Малюса (3.1) следует, что при вращении плоскости анализатора (поляризатора) A вокруг луча интенсивность I прошедшего через него света будет меняться в пределах от нуля, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (плоскость пропускания поляризатора перпендикулярна плоскости колебаний \vec{E}), до $I_{\max} = I_0$ при $\varphi = 0$. Если же на поляризатор падает естественный свет, то угол φ будет хаотически меняться во времени (все значения φ равновероятны), поэтому $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$ и

$$I = I_e \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{I_e}{2}.$$

Вращение плоскости пропускания поляризатора Π при падении на него естественного света не приводит к изменению интенсивности I прошедшего поляризованного света (впрочем как и для света с круговой поляризацией).

Поляризаторы Π и A называются *скрещенными*, если угол между их плоскостями пропускания равен $\frac{\pi}{2}$. Через такую систему свет не проходит.

3.6. Интерференция поляризованного света

Интерференция поперечных волн зависит не только от их амплитуд, частот и фаз, но и от состояния поляризации. Рассмотрим наложение двух волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Световой вектор \vec{E} результирующей волны в точке наблюдения равен сумме световых векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 складываемых волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

а интенсивность I результирующей волны:

$$I \sim \langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle (\vec{E}_1, \vec{E}_2) \rangle.$$

Поскольку направления колебаний световых векторов складываемых волн перпендикулярны друг другу, т. е. $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, то третье слагаемое (интерференционный член) равно нулю. Поэтому интенсивность I результирующей волны равна сумме интенсивностей I_1 и I_2 складываемых волн:

$$I = I_1 + I_2$$

и интерференция в этом случае не возникает (что, кстати, является доказательством поперечности световых волн).

Одна из возможных схем для наблюдения интерференции поляризованных волн состоит из поляризатора $\Pi 1$ с плоскостью пропускания P_1 , одноосной кристаллической пластинки $КП$, вырезанной параллельно ее оптической оси OO' , и поляризатора $\Pi 2$ с плоскостью пропускания P_2 (Рис. 18, а). Естественный свет,

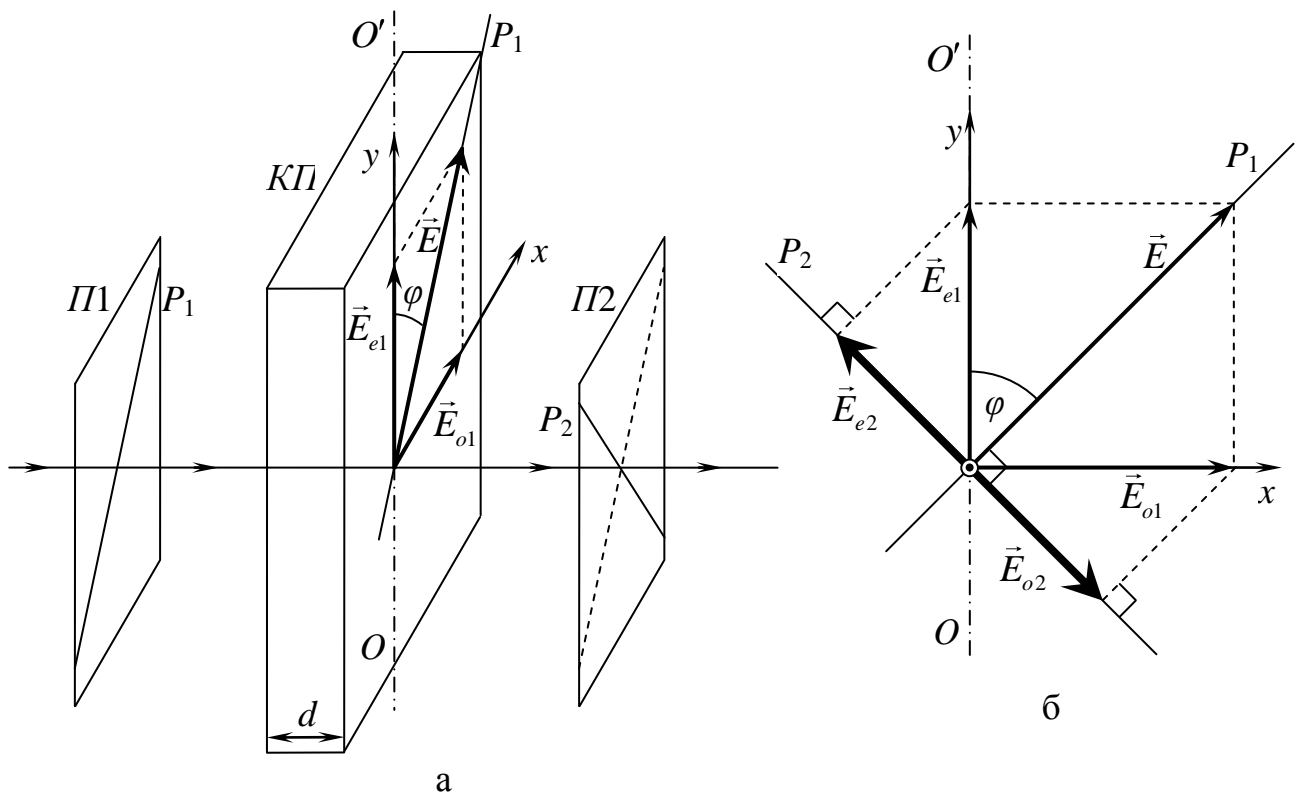


Рис. 18

пройдя через поляризатор $\Pi 1$, становится линейно поляризованным. Плоскость пропускания P_1 поляризатора $\Pi 1$ должна составлять с оптической осью OO' кристаллической пластинки угол φ , отличный от 0 и $\pi/2$. В этом случае, нормально падая на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси OO' , линейно поляризованная волна (\vec{E} – ее вектор-амплитуда) делится на две волны (обыкновенную с вектором-амплитудой \vec{E}_{o1} и необыкновенную с вектором-амплитудой \vec{E}_{e1}), линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Обыкновенная и необыкновенная волны в кристаллической пластинке распространяются, не разделяясь, но с различной скоростью, и за время прохождения пластинки толщиной d между ними появляется оптическая разность хода:

$$\Delta = (n_o - n_e)d,$$

которой соответствует разность фаз:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (3.2)$$

где λ_0 – длина волны в вакууме.

Вышедшие из кристаллической пластинки обыкновенная и необыкновенная волны интерферировать не могут, т. к. они линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому за пластинкой помещен поляризатор $П2$, плоскость пропускания P_2 которого не совпадает с плоскостью поляризации ни одной из вышедших из пластинки волн. Поляризатор $П2$ выделяет из обыкновенной и необыкновенной волн составляющие с векторами-амплитудами \vec{E}_{o2} и \vec{E}_{e2} , которые поляризованы уже в одной плоскости (Рис. 18, б), и тем самым создает необходимые условия для интерференции этих волн.

Результат интерференции вышедших из поляризатора $П2$ когерентных волн зависит от разности фаз (3.2), приобретаемой волнами при прохождении кристаллической пластинки (а, значит, и от длины волны λ_0 , толщины пластинки d), а также взаимного расположения плоскостей пропускания P_1 и P_2 . Интерференционная картина бывает наиболее отчетливой, когда амплитуды E_{o2} и E_{e2} складываемых волн одинаковы. Поэтому угол между плоскостью пропускания P_1 и оптической осью OO' пластинки обычно выбирают равный $\pi/4$. Если при этом свет монохроматический и толщина пластинки всюду одинакова, то на выходе из поляризатора $П2$ поле зрения будет иметь равномерную освещенность (без характерных для интерференционных картин чередующихся максимумов и минимумов), изменяющуюся при повороте плоскости поляризации P_2 относительно направления распространения света. Так, если например при параллельных плоскостях пропускания поляризаторов ($P_1 \parallel P_2$) поле зрения имеет максимальную освещенность, то при повороте плоскости поляризации P_2 относительно направления распространения света на $\pi/2$, поле зрения становится темным, т. е. наблюдается интерференционный минимум. Таким образом, интерференция поляризованных

волн в плоскопараллельной пластине проявляет себя в перераспределении световой энергии между взаимно перпендикулярными плоскостями.

Если на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает естественный свет, то распространяющиеся в пластинке и выходящие из нее обыкновенная и необыкновенная волны будут некогерентными, поскольку порождаются в основном разными цугами, входящими в состав естественного света.

4. РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Классическая электромагнитная теория света, объясняющая широкий круг явлений с распространением света и получившая всеобщее признание в конце XIX – в начале XX веков, столкнулась с непреодолимыми трудностями в связи с вопросом об излучении света и, в частности, с вопросом о тепловом излучении.

Тепловым излучением называют электромагнитное излучение, испускаемое телами за счет их внутренней энергии (энергии теплового движения их атомов и молекул). Как известно, характер излучения света, например, его интенсивность, и ее зависимость от частоты (т. е. спектральный состав излучения), определяется температурой и природой излучающего тела. Имеется, однако, случай, когда спектральный состав излучения не зависит от природы излучателя и определяется исключительно его температурой. Речь пойдет о так называемом *равновесном излучении*. Тепловое излучение – единственный вид излучения, который может быть равновесным.

Представим себе некоторую замкнутую полость со стенками, не проводящими тепла, и находящимися при определенной температуре T . Стенки полости будут одновременно и излучать, и поглощать электромагнитные волны. Так как все излучение заключено в замкнутой полости, то через некоторое время в системе установится состояние статистического равновесия. При этом стенки полости в единицу времени будут поглощать столько же энергии электромагнитных волн с частотами от ν до $\nu + d\nu$, сколько они излучают энергии, приходящейся на тот

же самый диапазон частот, и в полости установится система электромагнитных стоячих волн.

Объемная плотность w энергии соответствующего электромагнитного поля выражается формулой

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где E и H – напряженности соответственно электрического и магнитного полей электромагнитной волны в данной точке пространства в произвольный момент времени.

Тепловое излучение имеет непрерывный (сплошной) спектр, распределение электромагнитной энергии в котором характеризуется непрерывной функцией частоты ν или длины волны λ . Распределение объемной плотности энергии по частотам ν характеризуется ее *спектральной плотностью* ρ_ν , определяемой как:

$$\rho_\nu = \frac{dw}{d\nu},$$

где dw – объемная плотность энергии излучения, приходящейся на диапазон частот от ν до $\nu + d\nu$. В СИ $[\rho_\nu] = \text{Дж}\cdot\text{с}/\text{м}^3$.

В случае равновесного излучения спектральная плотность зависит только от частоты ν (циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$ или длины волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$, где c – скорость света в вакууме) и температуры T излучающего тела (излучающих стенок полости). Простой термодинамический подход показывает, что спектральная плотность не зависит от природы излучателя, в частности стенок (их излучательной и поглощательной способностей и состояния поверхности).

Рассмотрим две полости, стенки которых имеют одинаковую температуру T , но сделаны из разных материалов. Предположим, что спектральная плотность объемной плотности энергии излучения зависит от природы излучателя и различна в обеих полостях. Тогда, соединив полости, можно нарушить равновесие. Излучение будет переходить в ту полость, в которой его плотность меньше. В результате этого плотность излучения в этой полости вырастет, стенки полости бу-

дуг поглощать больше энергии, а их температура повысится. Между стенками обеих полостей возникает разность температур, которая может быть использована для получения полезной работы. Таким образом, сделанное предположение приводит к выводу о возможности построения вечного двигателя 2-го рода, что, как известно, невозможно. Таким образом, доказано, что $\rho(\nu, T)$ – есть универсальная функция частоты и температуры. Изучение излучательных и поглощательных свойств материальных тел привело Кирхгофа к установлению важной теоремы, названной теоремой (законом) Кирхгофа, формулировка которой будет приведена ниже.

Введем спектральные характеристики теплового излучения тела при фиксированной температуре T .

Излучательная способность тела $r_{\nu, T}$ (спектральная излучательная способность тела) – спектральная характеристика теплового излучения, равная

$$r_{\nu, T} = \frac{d\Phi_{\nu}}{dS d\nu}, \quad (4.1)$$

где $d\Phi_{\nu}$ – поток электромагнитной энергии, излучаемый элементом поверхности тела площадью dS в узком интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. В СИ $[r_{\nu, T}] = \text{Дж/м}^2$.

Излучательная способность тела зависит от частоты излучения, температуры этого тела, его химического состава и состояния излучающей поверхности.

Излучательную способность тела можно представить не только как функцию частоты, но и как функцию длины волны:

$$r_{\lambda, T} = \frac{d\Phi_{\lambda}}{dS d\lambda}, \quad (4.2)$$

где $d\Phi_{\lambda}$ – поток электромагнитной энергии, излучаемый элементом поверхности тела площадью dS в узком интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. В СИ $[r_{\lambda, T}] = \text{Вт/м}^3$.

Энергетическая светимость тела R (интегральная излучательная способность тела) – поток энергии электромагнитных волн всех частот, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dt dS}. \quad (4.3)$$

В СИ $[R] = \text{Вт/м}^2$.

Энергетическая светимость тела (интегральная излучательная способность) может быть представлена как:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu. \quad (4.4)$$

В общем случае падающее на тело излучение частично поглощается этим телом и частично отражается от него. *Поглощательная способность тела* $a_{\nu, T}$ показывает, какая доля потока электромагнитной энергии $d\Phi_{\nu}^{\text{пад}}$, падающего на единицу площади поверхности тела в узком интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, им поглощается:

$$a_{\nu, T} = \frac{d\Phi_{\nu}^{\text{погл}}}{d\Phi_{\nu}^{\text{пад}}},$$

где $d\Phi_{\nu}^{\text{погл}}$ – поглощаемый той же поверхностью тела поток энергии, приходящийся на тот же интервал частот.

Поглощательная способность любого реального тела $a_{\nu, T}$ зависит от частоты излучения, температуры этого тела, его химического состава, состояния поверхности.

Абсолютно черным телом называется тело, которое при любой температуре T полностью поглощает все падающее на него излучение. Его поглощательная способность $a_{\nu, T}^*$ для любой частоты ν равна единице:

$$a_{\nu, T}^* \equiv 1.$$

Серым называется тело, поглощательная способность которого меньше единицы и не зависит от частоты и температуры.

Абсолютно черных тел в природе не существует. Однако замкнутая полость с малым отверстием, температура стенок которой поддерживается постоянной, очень близка по своим свойствам к абсолютно черному телу.

Закон (теорема) Кирхгофа: отношение излучательной способности $r_{\nu,T}$ тела к его поглотительной способности $a_{\nu,T}$ не зависит от природы, геометрической формы и свойств тела, а является одинаковой для всех тел (т. е. *универсальной*) функцией частоты ν и температуры T :

$$\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = f(\nu, T), \quad (4.5)$$

где $f(\nu, T)$ – универсальная функция Кирхгофа.

Закон Кирхгофа отражает тот факт, что в случае равновесного излучения чем больше энергии излучается в единицу времени единичной площадью поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, тем больше энергии поглощается за то же время тем же участком поверхности в том же частотном интервале. Т. е. чем сильнее тело поглощает излучение какой-либо частоты, тем интенсивней оно испускает данное излучение.

Оказывается, что универсальная функция $f(\nu, T)$ связана простым соотношением со спектральной плотностью $\rho(\nu, T)$ объемной плотности энергии равновесного излучения:

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T),$$

где c – скорость света в вакууме.

Нахождение вида функции $\rho(\nu, T)$ (или $f(\nu, T)$) является основной задачей теории теплового излучения. Особый случай представляет собой изучение абсолютно черного тела, поскольку его поглотительная способность абсолютно черного тела $a_{\nu,T}^* = 1$, то излучательная способность $r_{\nu,T}^*$ абсолютно черного тела и есть универсальная функция Кирхгофа $f(\nu, T)$:

$$r_{\nu,T}^* = f(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T). \quad (4.6)$$

В природе не существует абсолютно черного тела, т. к. часть лучистой энергии всегда отразится, какой бы ни была поверхность тела. Однако замкнутая полость, которую мы рассматривали выше, является моделью абсолютно черного

тела. Действительно, все излучение, испускаемое стенками, ими же и поглощается. Если сделать в полости маленькое отверстие, то, изучая излучение, выходящее через него, можно экспериментально найти вид функции $\rho(\nu, T)$.

Связь между универсальными функциями Кирхгофа частоты $f(\nu, T)$ и длины волны $\varphi(\lambda, T)$ получим заменой переменной $\nu = \frac{c}{\lambda}$ (где c – скорость света в вакууме) в выражении (4.4) для энергетической светимости абсолютно черного тела с учетом (4.6)

$$R^* = \int_0^\infty r_{\nu, T}^* d\nu = \int_0^\infty f(\nu, T) d\nu = \left| \begin{array}{l} \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \\ \nu_1 = 0, \quad \lambda_1 = \infty \\ \nu_2 = \infty, \quad \lambda_2 = 0 \end{array} \right| = - \int_\infty^0 \frac{c}{\lambda^2} \cdot f\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{c}{\lambda^2} \cdot f\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) d\lambda = \int_0^\infty \varphi(\lambda, T) d\lambda,$$

откуда:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \cdot f\left(\frac{c}{\lambda}, T\right). \quad (4.7)$$

Излучательные способности $r_{\nu, T}$ и $r_{\lambda, T}$ связаны друг с другом выражением, аналогичным (4.7):

$$r_{\lambda, T} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot r_{c/\lambda, T}.$$

При данной температуре излучательная способность ($r_{\nu, T}^*$ или $r_{\lambda, T}^*$) абсолютно черного тела максимальна по сравнению с другими телами. Измеряя ее, можно экспериментально определить вид функции $f(\nu, T)$ или $\varphi(\lambda, T)$.

Результаты таких опытов приведены на рис. 19. Разные кривые $\varphi(\lambda, T)$ соответствуют различным фиксированным температурам. Все кривые обнаруживают характерное поведение: при малых длинах волн функция $\varphi(\lambda, T)$ увеличивается с ростом λ , затем проходит через максимум и после этого стремится к нулю. Положение максимума сдвигается в сторону коротких длин волн по мере повышения температуры T .

Все попытки найти вид функции $f(\nu, T)$ ($\varphi(\lambda, T)$), полностью описывающей экспериментальные кривые во всем диапазоне частот (длин волн), на основе классических представлений потерпели неудачу.

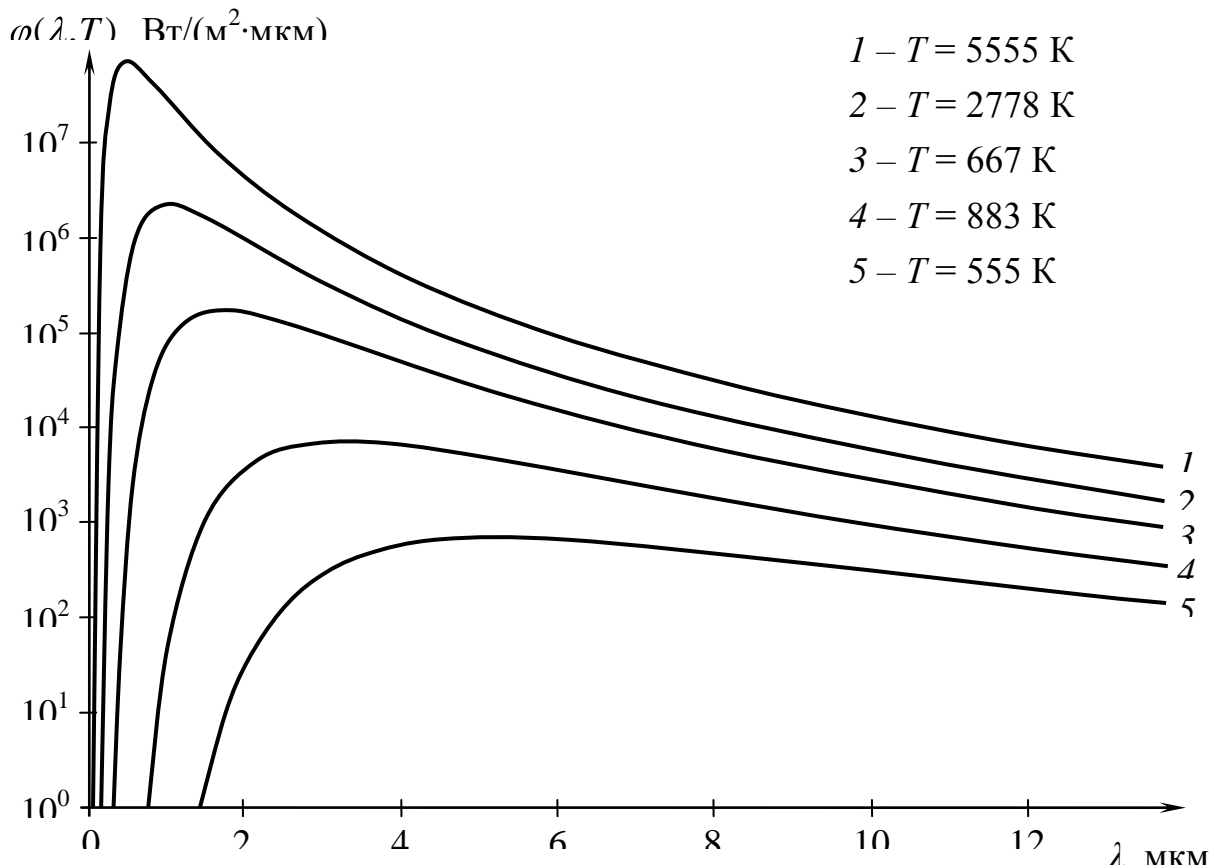


Рис. 19

4.1. Классическая теория черного излучения

Заметим сначала, что, не выходя за пределы термодинамики и электромагнитной теории света, можно кроме теоремы Кирхгофа вывести еще два закона

для черного излучения (равновесного излучения абсолютно черного тела): закон Стефана-Больцмана (1879 г. и 1884 г.) и закон смещения Вина (1893 г.).

Закон Стефана – Больцмана: энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры T :

$$R^* = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) – постоянная Стефана – Больцмана.

Закон смещения Вина: при повышении температуры T абсолютно черного тела максимум его излучательной способности (спектральной плотности излучения) смещается в сторону коротких длин волн так, что выполняется соотношение

$$\lambda_m \cdot T = b = \text{const},$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности, $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Справедливость этих законов можно доказать на основе классической термодинамики и электромагнитной теории света с помощью эмпирически полученной *формулы Вина* для спектральной плотности излучения (*закон излучения Вина*):

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 \cdot F\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

где $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ – функция, зависящая только от отношения частоты к температуре, конкретный вид которой нельзя установить термодинамическими методами.

Для доказательства закона Стефана – Больцмана проинтегрируем формулу Вина по всему спектру частот:

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu.$$

Сделав замену переменных $x = \frac{\nu}{T}$ и $d\nu = T dx$, получим

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx.$$

Очевидно, что интеграл в правой части равенства даст просто число, т.е. действительно, если верна формула Вина, то полная энергия излучения (и энергетическая светимость) абсолютно черного тела оказывается пропорциональной четвертой степени температуры T .

Причина, по какой закон Вина называют «законом смещения», такова: экспериментально было обнаружено, что интенсивность излучения раскаленного тела, температура которого поддерживается постоянной, как функция длины волны ведет себя следующим образом (см. Рис. 19). При некоторой длине волны λ_m наблюдается максимум, который с изменением температуры смещается, в то время как произведение $\lambda_m T$ оказывается постоянным:

$$\lambda_m T = const.$$

Это можно легко доказать, используя формулу Вина. Запишем его через длину волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$:

$$\rho_\lambda(\lambda, T) = \frac{c^4}{\lambda^5} \cdot F\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

и найдем максимум полученной функции. Условие максимума функции:

$$\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = 0,$$

$$c^4 \left[-\frac{5}{\lambda^6} \cdot F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) - \frac{1}{\lambda^5} \cdot F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \cdot \frac{c}{\lambda^2 T} \right] = 0,$$

$$5F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{c}{\lambda T} \cdot F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0,$$

$$5F(x) = xF'(x).$$

Уравнение содержит всего одну неизвестную величину $x = \frac{c}{\lambda T}$, и его решение, если оно существует, должно иметь форму $\lambda \cdot T = const$. Значение постоянной нельзя определить, если не известен вид функции $F\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$. Таким образом, доказана справедливость закона смещения Вина.

Чтобы найти вид функции $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$, необходимо обратиться к конкретной модели. Исходя из термодинамики ясно, что форма закона, определенного той или иной функцией F , не должна зависеть от конкретного механизма излучения. Поэтому в качестве простейшей модели излучающего тела Макс Планк выбрал линейный гармонический осциллятор с собственной частотой ν . Для такого осциллятора можно рассчитать энергию, излучаемую за 1 с (она будет равна просто энергии излучения колеблющегося диполя) и работу, произведенную над осциллятором полем излучения за то же время. В случае равновесия обе эти величины должны совпадать. Тогда получается, что

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon}, \quad (4.8)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – энергия осциллятора, усредненная по некоторому промежутку времени, который велик по сравнению с периодом, но все же настолько мал, что излучением за это время можно пренебречь.

Таким образом, если мы знаем среднюю энергию осциллятора, то мы знаем также и спектральное распределение интенсивности черного излучения.

Значение $\bar{\varepsilon}$, определенное методами классической статистики, оказывается равным kT , где k – постоянная Больцмана. Это частный случай общего результата статистической механики – *закона о равном распределении средней энергии*. В соответствии с этим законом каждый член в гамильтониане H (полная энергия), пропорциональный квадрату координаты или импульса, дает один и тот же вклад

в среднюю энергию, а именно $\frac{kT}{2}$, а в гамильтониане осциллятора есть два таких

члена и, следовательно, его средняя энергия есть kT . Покажем это. По статистике Больцмана, при равновесии состояние осциллятора, характеризуемое энергией ε ,

встречается с относительной вероятностью $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Поэтому средняя энергия $\bar{\varepsilon}$

равна результату усреднения по всем состояниям. Введя обозначение $\beta = \frac{1}{kT}$, по-

лучим:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \cdot e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = kT.$$

Таким образом, подставляя полученный результат в (4.8), имеем

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (4.9)$$

Это выражение представляет собой **закон излучения Релея – Джинса** (1900, 1909 гг.). Заметим, что этот закон согласуется с законом Вина, чего и следовало ожидать. В длинноволновой области, т. е. при малых частотах, закон Релея – Джинса также очень хорошо согласуется с экспериментальной кривой распределения спектральной плотности излучения. В этой области плотность возрастает пропорционально второй степени частоты. Но для больших частот формула уже не верна. Из эксперимента известно, что, проходя через максимум, спектральная плотность излучения ведет себя так, как представлено на Рис. 19, чего не следует из полученной формулы. Мало того, что отсутствует максимум, так спектральная плотность $\rho(\nu, T)$ непрерывно возрастает как квадрат частоты, что приводит к расходимости интеграла:

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \rightarrow \infty,$$

откуда следует абсурдный вывод: при любой температуре T энергетическая светимость абсолютно черного тела принимает бесконечное значение ($R^* \rightarrow \infty$), а значит, тепловое равновесие между веществом и телом невозможно. Этот вывод, бесспорно противоречащий опыту, получил название «ультрафиолетовой катастрофы».

Эту явную несуразицу пытались устранить с помощью следующей гипотезы. Предположим, что для достижения равновесия требуется определенное время (время релаксации). Пусть для черного излучения это время очень велико, т. е. равновесие устанавливается не скоро. Но за это время, как нетрудно представить, в результате внешних воздействий свойства системы могут полностью изменить-

ся. Однако эти рассуждения не затрагивают существа дела. Действительно, мы всегда можем, по крайней мере, теоретически, как угодно долго поддерживать внешние условия неизменными. Тогда рано или поздно равновесие все же установится.

В такой ситуации Макс Планк (1900 г.) выдвинул смелую гипотезу, что все эти трудности можно обойти, допустив существование конечных дискретных квантов энергии ε_0 , таких, что энергия осциллятора может оказаться равной (помимо нулевого значения $\varepsilon = 0$) лишь $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots$. Именно таким образом мы и получим закон излучения Планка, который нашел блестящее экспериментальное подтверждение. Самое важное в этом случае – найти среднюю энергию. Для этого по-прежнему будем считать, что состояние с тем или иным значением энергии встречается с относительной вероятностью, определяемой больцмановским множителем $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$, но теперь в расчетах должны фигурировать уже не все энергии, как это было раньше, а лишь энергии вида $n\varepsilon_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому при нахождении среднего значения энергии $\bar{\varepsilon}$ вычисление интегралов заменим вычислением дискретных сумм:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \cdot e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (4.3), получаем:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}.$$

Чтобы это выражение не противоречило закону излучения Вина, который, будучи прямым следствием термодинамики, справедлив при всех обстоятельствах, необходимо принять, что

$$\varepsilon_0 = h\nu$$

где h – постоянная, носящая имя Планка.

Теперь отсюда прямо следует **закон излучения Планка**:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (4.10)$$

Как уже говорилось, эта формула отлично согласуется с опытом:

- В области малых частот $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$, поэтому разложение экспоненты в знаменателе (4.10) в ряд по степеням приводит к следующему результату:

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 + \dots \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Подставив последнее выражение в (4.10), получим:

$$\rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{kT} \right) - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

что полностью соответствует закону Релея – Джинса (4.9). Таким образом, в области малых частот закон Планка согласуется с классическими выражениями.

- В области больших частот $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, поэтому экспонента в знаменателе (4.10) гораздо больше 1. В этом случае единицей в знаменателе можно пренебречь:

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT},$$

тогда из (4.10) получим приближенный закон излучения для больших частот (коротких волн):

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (4.11)$$

Закон излучения в форме (4.11) был предложен ранее Вином (1896 г.), который пытался феноменологически описать результаты своих измерений в области больших частот.

Между областями применимости двух предельных законов (закона Рэля – Джинса (4.9) и закона Вина (4.11)) лежит обширная переходная область, где и находится максимум кривой распределения. При повышении температуры этот максимум в соответствии с законом Вина сдвигается в сторону более коротких длин волн.

Переходя к записи спектральной плотности излучения через длину волны λ , получаем:

$$\rho_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Функция $\rho_{\lambda}(\lambda, T)$ имеет максимум при длине волны λ_m , которую можно найти из условия

$$\frac{d\rho_{\lambda}}{d\lambda} = 0$$

или

$$8\pi hc \left[-\frac{5}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} + \frac{hce^{hc/\lambda kT}}{kT\lambda^7 (e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} \right] = 0.$$

Вводя обозначение $x = \frac{hc}{\lambda_m kT}$, получим

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5.$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает значение $x = 4,96$.

Таким образом,

$$\frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,96.$$

Это и есть закон смещения Вина.

Постоянная Планка h была впервые определена самим Планком с помощью закона Стефана – Больцмана и закона смещения Вина. Согласно первому закону, энергия, излучаемая с квадратного метра нагретой до температуры T поверхности за 1 с, есть

$$R^* = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана – Больцмана.

Значение постоянной Стефана – Больцмана можно получить и теоретически, интегрируя по всему спектру функцию распределения Планка. В результате получим:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

С другой стороны, измерения показывают, что постоянная в законе Вина $\lambda_m T = b = \frac{0,2014hc}{k} = 2,898 \cdot 10^{-3}$ м·К. Чтобы найти порядок этой величины, достаточно заметить, что максимум интенсивности в излучении Солнца, которое излучает как черное тело, при температуре $T = 6\,000$ К лежит в зеленой части спек-

тра, т. е. приблизительно при $\lambda = 450$ нм. Зная эти две эмпирические постоянные, можно рассчитать h и k :

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с},$$

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Найденные таким образом значения хорошо согласуются с оценками, полученными другими методами.

Из общего вида кривых распределения следует еще один вывод – коэффициент полезного действия (КПД), например, ламп накаливания и других осветительных приборов совершенно ничтожен. Действительно, область видимого света соответствует лишь узкой полосе в спектре теплового излучения, вся остальная энергия излучения пропадает даром для освещения.

Вернемся снова к истории открытия Планка. Его гипотеза встретила сначала яростное сопротивление физиков. Никто не хотел верить, что неперенным условием вывода закона излучения является обращение к гипотезе квантов. Считалось, что новые идеи представляют собой просто математический прием и рано или поздно найдут классическую интерпретацию этого явления. Однако все попытки подобного рода потерпели провал.

5. ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ

В конце XIX в. был открыт электрон. И примерно в это же время обнаружено явление *внешнего фотоэффекта*, заключающееся в вырывании электронов с поверхности веществ под действием света.

Со времени дифракционных опытов Юнга на двух щелях не было сомнений в том, что свет представляет собой электромагнитные волны. Волновая теория света давала следующее объяснение явлению внешнего фотоэффекта. Внешние электроны атомов металлов слабо связаны с атомами и под действием внешнего электромагнитного поля испытывают смещение. Вычислим величину этого смещения. Воспользуемся моделью атома, близкой к той, которая принята в современной квантовой теории. Согласно этой модели, внешний электрон рассматривается в виде шарового облака радиусом R . При смещении подобного шарового

заряда на расстояние x от центра атома возникает возвращающая сила, пропорциональная x . Вследствие этого электронное облако совершает гармонические колебания относительно центра атома, который представляет собой атомное ядро, окруженное облаком внутренних электронов, прочно связанных с ядром.

Пусть теперь на внешнее электронное облако действует электрическое поле (напряженность которого \vec{E}) падающей электромагнитной волны, уравнение которой на расстоянии y от источника запишем как обычно:

$$E = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot y\right).$$

Уравнение движения внешнего электронного облака (электрона) будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - |e|E$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{|e|E_0}{m} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot y\right),$$

где e – заряд электрона, m – его масса.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = -\frac{|e|E_0}{m \omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot y\right).$$

Таким образом, амплитуду E_{\max} колебаний свободного электрона в переменном электрическом поле можно представить в виде

$$E_{\max} = \frac{|e|E_0}{m \omega_0^2 - \omega^2},$$

поэтому можно было ожидать, что электрон, движущийся вблизи поверхности, покинет металл, как только амплитуда его колебаний E_{\max} превысит некоторое критическое значение. Попытки объяснить фотоэффект с позиций волновой теории света приводят к следующим выводам:

1) электроны не будут вылетать из металла до тех пор, пока амплитуда напряженности E_0 электрического поля электромагнитной волны не превысит определенного критического (порогового) значения;

2) кинетическая энергия испущенных электронов возрастает пропорционально E_0^2 , а значит пропорционально интенсивности I света (т. к. $I \sim E_0^2$);

3) если величину амплитуды E_0 (а значит, и интенсивность I) поддерживать постоянной, а частоту света ν (или ω) увеличивать, то число испускаемых электронов должно уменьшаться.

Однако экспериментальные наблюдения опровергли все эти предсказания:

1. Пороговой интенсивности света обнаружено не было. Число вылетающих электронов в единицу времени оказалось строго прямо пропорционально E_0^2 (а значит, и интенсивности I) при любой, сколь угодно малой интенсивности.

2. Кинетическая энергия вылетающих электронов оказалась не зависящей от величины E_0^2 .

3. Оказалось, что для каждого вещества существует своя минимальная частота $\nu_{кр}$ света (и соответствующая ей максимальная длина волны $\lambda_{кр}$), называемая *красной границей фотоэффекта*, ниже которой фотоэффект не наблюдается

3. Обнаружена зависимость кинетической энергии электронов от частоты света. При освещении вещества монохроматическим светом с частотой ν ($\nu > \nu_{кр}$) вырываемые электроны обладают различными кинетическими энергиями, значения которых лежат в промежутке от нуля до некоторого максимального значения W_{\max}^k . С ростом частоты ν света максимальная кинетическая энергия W_{\max}^k выбитых электронов линейно увеличивается.

В 1905 г. Эйнштейн дал правильное объяснение фотоэффекта. Он, развивая идеи Планка, выдвинул крамольную по тем временам гипотезу о представлении падающего монохроматического излучения (света) в виде потока световых квантов (фотонов), энергия ε каждого из которых равна

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}, \quad (5.1)$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с (или $h = \frac{h}{2\pi}$) – постоянная Планка; ν , ω и λ – частота, циклическая частота и длина волны монохроматического света соответственно.

С квантовой точки зрения фотоэффект возникает в результате неупругого столкновения поглощаемого фотона с электроном, при котором вся энергия фотона целиком передается электрону. Полученная при этом электроном энергия частично затрачивается на высвобождение его из вещества (металла), а оставшаяся часть переходит в кинетическую энергию вылетевшего из вещества электрона (фотоэлектрона).

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ – это минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону для его освобождения из вещества в вакуум. Она зависит от рода вещества.

При единичном акте поглощения электроном вещества одного фотона с энергией ϵ можно записать закон сохранения энергии в виде (**уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта**):

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{\text{max}}^k, \quad (5.2)$$

где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода, W_{max}^k – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

Соотношение (5.2) хорошо согласуется с полученным экспериментально графиком зависимости максимальной кинетической энергии W_{max}^k фотоэлектронов от частоты ν , изображенным на Рис. 20. Угол α между прямой $W_{\text{max}}^k(\nu)$ и осью абсцисс, одинаковый для всех веществ, связан с постоянной Планка h и позволяет экспериментально найти ее значение. Точка пересечения прямой $W_{\text{max}}^k(\nu)$ с осью абсцисс определяет частоту $\nu_{\text{кр}}$, соответствующую красной границе фотоэффекта, а точка пересечения продолжения прямой с осью ординат – работу выхода $A_{\text{вых}}$.

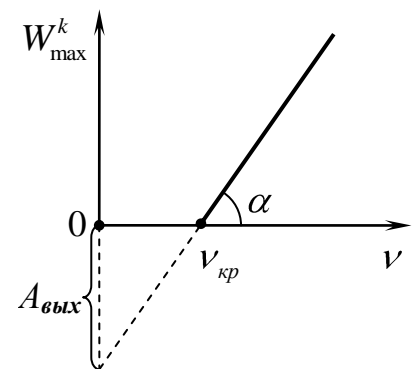


Рис. 20

Из формулы Эйнштейна (5.2) следует, что минимальная частота $\nu_{кр}$ (и соответствующая ей максимальная длина волны $\lambda_{кр}$) света, при которой еще возможен фотоэффект, связана с работой выхода $A_{вых}$:

$$A_{вых} = h\nu_{кр} = \frac{hc}{\lambda_{кр}},$$

что объясняет отличия ее значений для разных веществ.

Таким образом, теория внешнего фотоэффекта, базирующаяся на квантовых представлениях, сумела объяснить все экспериментальные закономерности этого явления.

6. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

В 1922-23 г.г. А. Комптон обнаружил, что в рассеянном на веществе (парафин, графит и др.) рентгеновском излучении наряду с исходной длиной волны λ появляется *смещенная линия* с длиной волны $\lambda' > \lambda$. Изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ в длинноволновую сторону спектра при рассеянии излучения называют *комптоновским смещением*, а само явление – *эффектом Комптона*. Объяснить это явление (как и внешний фотоэффект) можно только с позиций квантовых представлений, согласно которым эффект Комптона наблюдается в результате одиночного акта упругого столкновения фотона (кванта рентгеновского излучения) со свободным (или почти свободным) покоящимся электроном вещества, в ходе которого выполняются законы сохранения механики, конечно, с учетом релятивизма.

Следуя Эйнштейну, наряду с энергией $\varepsilon = h\nu$ фотон обладает импульсом \vec{p} , направленным в сторону распространения излучения, величина которого равна

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (6.1)$$

где c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка; ν и λ – частота и длина волны излучения соответственно.

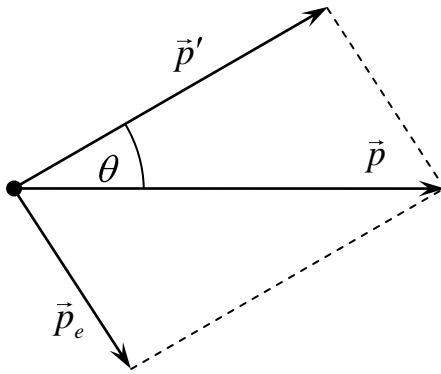


Рис. 21

направлению распространения (Рис. 21).

В результате упругого столкновения с фотоном электрон отдачи приобретает импульс \vec{p}_e , а его полная релятивистская энергия становится равной E_e , причем

$$\frac{E_e^2}{c^2} = p_e^2 + m_e^2 c^2. \quad (6.2)$$

Для расчета необходимо применять релятивистскую механику, поскольку скорость электрона отдачи может достигать значений, близких к скорости света в вакууме.

Согласно закону сохранения энергии, полная энергия системы «электрон и фотон» до и после соударения одинакова, т.е.

$$pc + m_e c^2 = p'c + E_e,$$

что можно переписать в виде

$$p - p' + m_e c^2 = \left(\frac{E_e}{c} \right)^2.$$

В соответствии с законом сохранения импульса

$$\vec{p} - \vec{p}' = \vec{p}_e.$$

Если возведем обе части этого уравнения в квадрат и вычтем из предыдущего, то получим

$$m_e^2 c^2 - 2pp' + 2pm_e c - 2p'm_e c + 2pp' \cos \theta = \frac{E_e^2}{c^2} - p_e^2,$$

откуда с учетом (6.2) величина импульса рассеянного фотона равна

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{p}{m_e c} (1 - \cos \theta)}.$$

Воспользовавшись выражением (6.1) импульса фотона через длину волны, получаем:

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)}$$

или

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_K (1 - \cos \theta), \quad (6.3)$$

где λ и λ' – длина волны соответственно падающего и рассеянного под углом θ фотона; $\lambda_K = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м – комптоновская длина волны для электрона.

Результаты опытов по рассеянию рентгеновского излучения на веществах, в атомах которых электроны слабо связаны с ядром (графите, парафине и др.), показали, что комптоновское смещение $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от материала рассеивающего образца и длины волны λ падающего излучения, а определяется только углом θ между направлениями рассеянного и падающего излучений. Соотношение (6.3) очень хорошо согласуется с наблюдаемой на опыте зависимостью комптоновского смещения $\Delta\lambda$ от угла рассеяния θ .

7. ВНУТРЕННИЙ ФОТОЭФФЕКТ

Внутренним фотоэффектом называется явление возрастания электропроводности полупроводников и диэлектриков под действием облучения. Это явление также называют фотопроводимостью. Рост электропроводности полупроводников и диэлектриков происходит за счет увеличения в них числа свободных носителей тока. Это явление можно объяснить с помощью зонной теории кристаллических тел. Для полупроводников характерно наличие не очень широкой ($\Delta E = 0,5 \div 2$ эВ) запрещенной зоны. Валентная зона собственного полупроводника заполнена полностью. В зону проводимости электроны могут переходить из валентной, получив извне для такого перехода энергию не менее энергии активации ΔE (ширина запрещенной зоны). При этом в зоне проводимости образуются

вакантные места, называемые «дырки». Эти пары разноименно заряженных носителей тока (электрон в зоне проводимости и «дырка» в валентной зоне) способны под действием внешнего электрического поля придать упорядоченное движение, образуя электрический ток. Одним из способов получения дополнительного количества свободных носителей заряда в полупроводнике является поглощение им световой энергии.

Электрон, находящийся в валентной зоне, поглощая фотон, переходит в зону проводимости, а в валентной зоне появляется «дырка». Очевидно, что концентрация электронов и «дырок», а также зависящая от нее электропроводность вещества пропорциональны числу фотонов, падающих на единицу поверхности вещества в единицу времени, т. е. интенсивности монохроматического света. Исходя из того, что энергия поглощаемого электроном фотона не должна быть меньше энергии активации ΔE , можно определить граничную частоту ν_0 для данного вещества – «красную границу» фотоэлемента:

$$h\nu_0 = \Delta E.$$

Эта граничная частота ν_0 фотона при поглощении его электроном обеспечивает переход последнего с самого верхнего уровня валентной зоны на самый нижний уровень зоны проводимости.

Введение в полупроводник малого количества примесей значительно повышает его электропроводность. Такое поведение полупроводников объясняется тем, что наличие примеси обуславливает появление в запрещенной зоне добавочных энергетических уровней. Если валентность атомов примеси на единицу больше валентности атомов полупроводника, то добавочные энергетические уровни располагаются вблизи дна зоны проводимости и называются *донорными* уровнями. Если валентность атомов примеси на единицу меньше валентности атомов полупроводника, то добавочные энергетические уровни располагаются вблизи верхнего края валентной зоны и называются *акцепторными* уровнями.

В примесных полупроводниках с небольшим содержанием примесей вероятность поглощения фотонов электронами примесных атомов мала. Поэтому изменение проводимости под действием света в основном связано либо с переходом

электронов с донорских уровней в зону проводимости (электронная проводимость или проводимость n -типа), либо из валентной зоны на акцепторные уровни (дырочная проводимость или проводимость p -типа).

Запрещенная зона различных полупроводников имеет ширину от десятых долей до двух электронвольт ($\Delta E = 0,5 \div 2$ эВ), поэтому фотопроводимость может обнаруживаться в инфракрасной, видимой и ультрафиолетовой области спектра. Некоторая фотопроводимость обнаруживается и при частоте света чуть меньше граничной ν_0 (т.е. вызываемая квантами с энергией меньше энергии активации). Это объясняется двумя причинами: 1) отдельные электроны могут оказаться под суммарным воздействием энергии фотонов и энергии тепловых колебаний решетки; 2) ширина запрещенной зоны подвержена флуктуациям, так как тепловые колебания решетки приводят к изменению мгновенных расстояний между атомами, от которых она зависит.

Изменение электрических свойств полупроводников под влиянием электромагнитного излучения носит временный характер. После прекращения облучения проводимость за время от нескольких микросекунд до нескольких часов (для различных веществ) возвращается к тому значению, которое она имела до облучения.

8. КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ БОРА И БОРОВСКАЯ МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА

Согласно теории Резерфорда, атом состоит из тяжелого положительного ядра и окружающих его электронов. Из законов классической механики следует, что такая система может находиться в равновесии лишь при условии, если электроны будут вращаться вокруг ядра по каким-либо орбитам. Однако, с точки зрения классической электродинамики, такой атом был бы все же неустойчив, так как при движении с ускорением электроны должны были бы непрерывно излучать энергию в виде электромагнитных волн и, следовательно, постепенно падать на ядро. Вместе с тем при этих условиях частота обращения должна была бы меняться непрерывно, и в результате чего спектр испускания изолированных атомов должен быть сплошным. Тот факт, что этого на самом деле не наблюдается и

спектр атома состоит из отдельных достаточно узких спектральных линий, указывает на замечательную устойчивость атомной системы, противоречащую классической электродинамике.

Выход из подобной ситуации был предложен Нильсом Бором, который развил идею о квантах, высказанную Планком в применении к обмену энергии между полем излучения и линейными осцилляторами (стенками).

Основу разработанной Бором теории строения атома составляют сформулированные им два важнейших постулата квантовой физики:

1. Атомы и атомные системы устойчивы только в определенных состояниях – *стационарных*, в которых, несмотря на происходящее в них движение заряженных частиц, они не излучают и не поглощают энергию. В этих состояниях атомные системы обладают энергиями, образующими дискретный ряд: E_1, E_2, \dots, E_n . Эти состояния характеризуются устойчивостью: всякое изменение энергии в результате поглощения или испускания электромагнитного излучения или в результате соударения может происходить только при полном переходе (скачком) из одного стационарного состояния в другое.

2. При переходе из одного стационарного состояния в другое атомы испускают или поглощают излучение только строго определенной частоты. При переходе атома из стационарного состояния с большей энергией E_m в стационарное состояние с меньшей энергией E_n , происходит излучение кванта света (фотона), частота ν которого определяется из условия

$$h\nu = E_m - E_n. \quad (8.1)$$

Такое же соотношение выполняется и при поглощении атомом фотона частотой ν , в результате которого атом переходит из стационарного состояния с меньшей энергией E_n в стационарное состояние с большей энергией E_m .

Оба эти постулата резко противоречат требованиям классической электродинамики. Так в соответствии с первым постулатом атомы не излучают, несмотря на то, что образующие их электроны совершают ускоренное движение, а со вто-

рым – испускаемые частоты не имеют ничего общего с частотами периодических движений электронов в атомах.

Сформулированные выше квантовые постулаты Бора были экспериментально подтверждены в опытах Джеймса Франка и Густава Герца в 1913 г.

В своей полуклассической модели Бор предположил, что в атоме водорода, находящемся в стационарном состоянии, электрон равномерно движется вокруг неподвижного положительно заряженного ядра только по тем круговым орбитам, радиусы которых удовлетворяют *правилу квантования*:

$$m_e v_n r_n = n \hbar, \quad (8.2)$$

где m_e – масса электрона, v_n – его скорость на орбите радиусом r_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ – главное квантовое число (номер разрешенной орбиты), $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Согласно второму закону Ньютона кулоновская сила сообщает электрону, равномерно движущемуся по круговой орбите радиусом r_n со скоростью v_n , нормальное ускорение:

$$m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2}, \quad (8.3)$$

где $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

С помощью правила квантования (8.2) из уравнения (8.3) можно получить выражение для радиуса n -ой стационарной орбиты:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \cdot n^2 = r_1 \cdot n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.4)$$

где $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-10}$ м – радиус первой боровской орбиты (боровский радиус).

Энергия (полная) E_n электрона, движущегося в электростатическом поле ядра по круговой орбите радиусом r_n со скоростью v_n , равна:

$$E_n = E_n^k + E_n^p = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n}, \quad (8.5)$$

где $E_n^k = \frac{m_e v_n^2}{2}$ – кинетическая энергия электрона, $E_n^p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n}$ – его потенци-

альная энергия. Учитывая правило квантования (8.2) и формулу для радиуса n -ой стационарной орбиты (8.4) выражение для энергии E_n электрона в атоме водорода, находящегося в стационарных состояниях (уровней энергий стационарных состояний атома водорода), принимает вид:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad (8.6)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – главное квантовое число; $E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,61$ эВ – энергия атома водорода в *основном* ($n = 1$) состоянии (т. е. с наименьшей энергией).

В заключение следует отметить, что в ходе развития квантовой физики представления об орбитах электронов были отвергнуты. Согласно *квантовой механике* – последовательной теории микроявлений, созданной к 1926 г., состояние электрона в атоме следует описывать с помощью волновой функции, определяющей, в частности, вероятность нахождения электрона в том или ином месте пространства. Уравнения квантовой механики позволяют в принципе найти эти функции для любого состояния любой микросистемы (атома, молекулы и т.д.). В случае атома водорода получены точные решения этих уравнений, полностью согласующиеся с результатами точнейших экспериментов. Из этих решений следует, что формула для уровней энергии (8.6) не требует пересмотра, а формулу (8.4) следует понимать как приближенную оценку для расстояния электрона от ядра в атоме водорода.

9. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

9.1. Гипотеза де Бройля

В начале 20-х годов XX века в оптике сложилась парадоксальная, но подтверждаемая опытами двойственная ситуация: в одних явлениях (интерференция, дифракция, поляризация и др.) свет проявляет себя как волны, а в других явлениях (внешний фотоэффект, эффект Комптона и др.) с не меньшей убедительностью свет обнаруживает свои корпускулярные свойства.

В связи с этим Луи Виктор де Бройль в 1923 г., основываясь на единстве природы, выдвинул гипотезу, согласно которой движущаяся частица (с отличной от нуля массой m) наряду с корпускулярными свойствами, характеризуемыми энергией E и импульсом \vec{p} , обладает и волновыми свойствами, которые характеризуются частотой ν (или циклической частотой $\omega = 2\pi\nu$) и волновым числом k , связанным с длиной волны λ соотношением $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Таким образом, с движущейся с постоянной скоростью \vec{v} свободной частицей связана плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в направлении скорости \vec{v} (например вдоль оси Ox), уравнение которой можно записать в виде:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i\omega t - kx} = \Psi_0 \exp -i\omega t - kx, \quad (9.1)$$

где Ψ_0 – некоторая комплексная постоянная.

Волны типа (9.1) называют *волнами де Бройля*. О природе этих волн, т. е. о физическом смысле функции Ψ в то время де Бройль не высказал ничего определенного. Как выяснилось позже, эти волны имеют специфическую природу, не имеющую аналога в классической физике.

Связь между корпускулярными и волновыми характеристиками частицы выражаются следующими соотношениями:

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (9.2)$$

$$\text{и } p = \hbar k = \frac{h}{\lambda_B}, \quad (9.3)$$

где E и p – энергия и импульс частицы соответственно; ν и ω – частота и цикли-

ческая частота волны де Бройля соответственно; k – волновое число; λ_B – длина волны де Бройля; $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка.

Революционная гипотеза де Бройля в скором времени (1927 г.) была блестяще подтверждена в многочисленных экспериментах по дифракции микрочастиц (электронов, атомов, молекул) К. Дж. Дэвиссоном, Л. Х. Джермером, П. С. Тартаковским, Дж. П. Томсоном, О. Штерном и др.

9.2. Принцип неопределенностей Гейзенберга

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Измеренное значение любой физической величины всегда отличается от ее истинного значения, которое всегда неизвестно, так как при выполнении любого измерения неизбежна ошибка. Источников ошибок много. Они связаны с несовершенством измерительных приборов, изменением условий опыта, неполнотой теоретической модели и приближенным характером используемого метода измерений, округлением при вычислениях и т. д. Поэтому необходимым условием выполнения любого измерения является нахождение некоторого интервала значений, в который с высокой вероятностью должно попасть истинное значение измеряемой величины. Измерение, например, координаты x материальной точки, должно сопровождаться определением ошибки измерения Δx , измерение компоненты импульса p_x – ошибки Δp_x .

В классической физике не было принципиальных ограничений на точность измерений. Считалось, что при достаточно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодно высокой точностью. Однако для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений получается не всегда. В некоторых случаях существуют принципиальные ограничения на точность измерений, которые не определяются совершенством измерительной аппаратуры, метода измерений и т. д. Каждое из этих принципиальных ограничений на точность измерений является фундаментальным свойством материи, проявляющимся только в микромире.

Известно, что в классической механике основными динамическими пере-

менными, описывающими состояние материальной точки, являются её радиус-вектор \vec{r} и импульс \vec{p} , которые могут быть в одно и то же время измерены со сколь угодно большой точностью. Поскольку микрочастица одновременно проявляет и корпускулярные, и волновые свойства, то её мгновенное состояние нельзя характеризовать точными заданиями радиус-вектора \vec{r} и импульса \vec{p} .

Однако поведение микрочастиц можно изучать лишь по результатам их действия на подчиняющиеся законам классической физики макроскопические приборы, поэтому для описания частиц в квантовой механике также используются понятия и величины классической физики. Но в этом случае существует принципиальный предел точности одновременного измерения некоторых пар физических величин, который не может быть превзойден никаким совершенствованием приборов и методов измерений.

Существование принципиальных ограничений на точность измерения физических величин отражено в *принципе неопределенности*, впервые сформулированном Вернером Гейзенбергом в 1927 г. и носящим его имя.

Количественные соотношения, выражающие этот принцип в конкретных случаях, называются *соотношениями неопределенностей Гейзенберга*. Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое из них ограничивает точности одновременного измерения координат и одноименных проекций импульса частицы. Например, для оси Ox оно имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (9.4)$$

где Δx – неопределенность координаты x частицы; Δp_x – неопределенность проекции ее импульса p_x на ось Ox .

Соотношение (9.4) определяет допустимый принципиальный предел неточностей Δx и Δp_x , с которыми состояние микрочастицы можно характеризовать классически, т. е. координатой x и одноименной проекцией импульса p_x . Истинный смысл соотношения неопределенностей (9.4) отражает тот факт, что в при-

роде объективно не существует состояний микрочастиц с точно определенными значениями обеих переменных x и p_x .

Второе соотношение устанавливает предел точности ΔE измерения энергии за данный промежуток времени Δt :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (9.5)$$

Соотношение (9.5) означает, что чем короче время существования какого-либо состояния частицы или время, отведенное для его наблюдения (измерения энергии E этого состояния), тем с меньшей точностью можно установить энергию этого состояния и наоборот. Если состояние частицы стационарно, то оно может существовать достаточно долго. Именно по этой причине энергия стационарного состояния имеет вполне определенное значение.

Принцип неопределенности Гейзенберга стал важным шагом в интерпретации закономерностей микромира и создании квантовой механики.

9.3. Волновая функция, ее физический смысл

Основная задача классической механики заключается в определении положения макрообъекта в любой момент времени. Для этого составляется система уравнений, решение которой позволяет выяснить зависимость радиус-вектора \vec{r} от времени t . В классической механике состояние частицы при ее движении в каждый момент времени задается двумя величинами: ее радиус-вектором \vec{r} и импульсом \vec{p} .

Задать аналогичным образом состояние микрочастицы невозможно. Этому препятствует корпускулярно-волновой дуализм и соотношения неопределенностей Гейзенберга.

С учетом наличия у микрочастицы волновых свойств ее состояние в квантовой механике описывается комплекснозначной функцией координат и времени $\Psi(x, y, z, t) = \Psi(\vec{r}, t)$, называемой **волновой функцией** или **пси-функцией** частицы, причем функции Ψ и $c\Psi$, где c – произвольное комплексное число, описывают одно и то же состояние. В случае одномерного движения частицы вдоль оси Ox волновая функция зависит лишь от координаты x и времени t , т. е. $\Psi = \Psi(x, t)$.

Если частица может находиться в состояниях, описываемых функциями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ (n – любое), то существует состояние, описываемое функцией

$$\Psi = \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i,$$

где c_i – произвольные комплексные числа. Это утверждение носит название ***принципа суперпозиции состояний***.

Таким образом, множество пси-функций образует комплексное линейное пространство, называемое *пространством состояний частицы*.

Скалярным произведением Ψ_1, Ψ_2 пси-функций называют величину

$$\Psi_1, \Psi_2 = \int_{R^3} \Psi_1^* \Psi_2 dV,$$

где символ «*» означает комплексное сопряжение, $dV = dx dy dz$, а интегрирование производится по всему трехмерному координатному пространству R^3 . Если волновая функция Ψ удовлетворяет условию:

$$\Psi, \Psi = \int_{R^3} \Psi^* \Psi dV = \int_{R^3} |\Psi|^2 dV = 1,$$

то она называется *нормированной*.

Для понимания физического смысла нормированной волновой функции обратимся к опытам по дифракции электронов. Оказывается, что четкие дифракционные картины обнаруживаются даже в том случае, если направлять на мишень одиночные электроны, т. е. когда каждый последующий электрон испускается после того, как предыдущий достигнет экрана. После достаточно продолжительной бомбардировки картина на экране будет в точности соответствовать той, которая получается при одновременном направлении на мишень большого числа электронов. Из этого можно сделать вывод, что движение любой микрочастицы по отдельности, в том числе и место ее обнаружения, подчиняются статистическим (вероятностным) закономерностям. При направлении на мишень одиночного электрона, точку экрана, в которой он будет зафиксирован, заранее со 100 % вероятностью предсказать невозможно.

В дифракционных опытах Дж. П. Томсона на фотопластинке образовывалась

система темных концентрических колец. Следовательно, можно с уверенностью сказать, что вероятность обнаружения (попадания) каждого испущенного электрона в различных местах фотопластинки неодинакова. В области темных концентрических колец эта вероятность больше, чем в остальных местах экрана. Распределение электронов по всему экрану оказывается таким же, каким является распределение интенсивности электромагнитной волны в аналогичном дифракционном опыте: в тех местах экрана, где интенсивность рентгеновской волны велика, частиц в опыте Томсона регистрируется много, а там, где интенсивность мала – частицы почти не появляются. С волновой точки зрения наличие максимума числа электронов в некоторых направлениях означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волны де Бройля, уравнение которой имеет вид (9.1). Это послужило основанием для статистического (вероятностного) истолкования волны де Бройля. Волновая функция как раз и является той величиной, которая позволяет отыскать все квантовые вероятности. Однако из всех этих вероятностей в дальнейшем рассмотрим лишь одну, описывающую вероятность распределения координаты x частицы. Для одномерного движения вероятность dP обнаружения частицы в промежутке между точками x и $x+dx$ в момент времени t равна

$$dP = |\Psi(x, t)|^2 dx,$$

где $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$ – квадрат модуля волновой функции.

В общем случае движения частицы в трехмерном пространстве вероятность dP нахождения частицы в момент времени t в окрестности точки с радиус-вектором \vec{r} внутри элемента объема dV , содержащего эту точку, задается аналогичным выражением:

$$dP = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV.$$

Квадрат модуля нормированной волновой функции равен *плотности вероятности* w (*плотности распределения координат частицы*)

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = \frac{dP}{dV} = w, \quad (9.6)$$

и является экспериментально наблюдаемой величиной.

Впервые вероятностную интерпретацию волновой функции дал Макс Борн в 1926 г.

Если мы точно уверены, что частица существует в пространстве объемом V (как во всем бесконечном трехмерном координатном пространстве, так и в пределах некоторой ограниченной его области), то вероятность P обнаружить частицу во всем этом пространстве V равна единице:

$$\int_V dP = \int_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1. \quad (9.7)$$

Выражение (9.7) называется **условием нормировки** волновой функции Ψ .

В простейшем случае одномерного движения частицы вдоль оси Ox ($-\infty < x < +\infty$) условием нормировки волновой функции $\Psi(x, t)$, описывающей состояние этой частицы, является:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1,$$

а среднее значение ее координаты вычисляется следующим образом:

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot |\Psi(x, t)|^2 dx.$$

Таким образом, точно предсказать в дифракционных опытах, в каком месте экрана будет зафиксирован тот или иной электрон, невозможно, даже заранее зная его волновую функцию. Можно лишь с определенной вероятностью предположить, что электрон будет зафиксирован в конкретном месте. В этом заключается отличие поведения квантовых объектов от классических. В классической механике при описании движения макротел мы со 100 % вероятностью заранее знали, в каком месте пространства будет находиться материальная точка (например, космическая станция) в любой момент времени.

9.4. Уравнение Шредингера. Стационарные состояния

Для отыскания вида волновой функции необходимо составить уравнение, учитывающее движение микрочастицы и взаимодействие ее с другими частицами вещества. Решением этого уравнения и должна являться волновая функция. Вероятностное истолкование волн де Бройля и соотношений неопределенностей указывают, что уравнение движения в квантовой механике должно быть таким, чтобы оно позволяло объяснять наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Поскольку состояние частицы в пространстве в данный момент времени описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$, то основное уравнение квантовой механики, описывающее эволюцию состояний частицы во времени, должно быть *волновым уравнением* относительно функции $\Psi(x, y, z, t)$.

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики было найдено Эрвином Шредингером (1926 г.). Как и уравнения движения Ньютона, лежащие в основе классической механики и поэтому не выводимые, уравнение Шредингера постулируется. Справедливость уравнения Шредингера доказывается тем, что все выводы, полученные с помощью этого уравнения в атомной и ядерной физике, с высокой степенью точности согласуются с опытными данными. Для случая движения частицы в потенциальных силовых полях, характеризуемых потенциальной функцией $U(x, y, z, t)$, где U – потенциальная энергия, *уравнение Шредингера* (временное) имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (9.8)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$); Δ – оператор Лапласа («лапласиан»), который в прямоугольной декартовой системе координат записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (9.9)$$

Вид Ψ -функции для конкретной микрочастицы определяется потенциальной энергией $U(x, y, z, t)$. Если она не зависит от времени, т. е. $U = U(x, y, z)$ то Ψ -функцию можно представить в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от координат, а другой – только от времени:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right), \quad (9.10)$$

где E – полная энергия частицы.

Подставим выражение (9.10) в уравнение (9.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) + U \psi \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) = i \hbar \psi \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right).$$

После деления уравнения на множитель $\exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$, имеем:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = i \hbar \psi \left(-i \frac{E}{\hbar}\right), \text{ или}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = E \psi.$$

Полученное соотношение называется **уравнением Шредингера для стационарных состояний** (поле стационарно, когда его характеристики не зависят от времени). Это уравнение чаще записывают в виде

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (9.11)$$

В стационарных состояниях ни одна из квантово-механических вероятностей не изменяется с течением времени. Средние значения всех физических величин также не зависят от времени. В частности, постоянным по времени оказывается среднее значение координаты $\langle x \rangle$. Стационарность состояния не исключает зависимость волновой функции от времени, а только ограничивает ее гармоническим законом $\exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$. Состояние стационарно, так как равен единице модуль множителя $\exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$, то есть

$$\left| \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \right| = \sqrt{\exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \exp\left(i \frac{E}{\hbar} t\right)} = 1.$$

Поэтому плотность распределения координат частиц

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi(x, y, z, t) \cdot \Psi^*(x, y, z, t) =$$

$$= \psi(x, y, z) \cdot \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \cdot \psi^*(x, y, z) \cdot \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right) = \psi(x, y, z)\psi^*(x, y, z) = |\psi(x, y, z)|^2$$

от времени не зависит. В стационарном состоянии плотность вероятности выражается только через $\psi(x, y, z)$. Поэтому $\psi(x, y, z)$ также называется волновой функцией, хотя, строго говоря, она является только координатной частью всей волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$ стационарного состояния.

Функция $\psi(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению (9.11), должна иметь некоторые общие свойства для любых полей $U(x, y, z)$, а именно: она должна быть однозначной, ограниченной и непрерывной во всем координатном пространстве R^3 , а также обладать непрерывными частными производными во всех точках, кроме тех, где функция $U(x, y, z)$ делает бесконечно большой скачок. Частица не может проникнуть в области пространства, где потенциальная энергия принимает бесконечно большое значение $U = \infty$. Поэтому на границах этих областей волновая функция должна обращаться в нуль. Перечисленные требования носят название *стандартных условий*.

Рассмотрим движение частицы вдоль оси Ox в отсутствие силового поля. В этом случае потенциальная энергия свободно движущейся частицы $U = 0$. Согласно гипотезе де Бройля движение такого микрообъекта моделируется монохроматической волной, занимающей все пространство. Поэтому можно предположить, что Ψ -функция будет иметь следующий вид

$$\Psi = \Psi_0 \exp -i(\omega t - kx) , \quad (9.12)$$

где Ψ_0 – амплитуда волны.

Круговая частота ω и волновое число k связаны с полной энергией частицы E и ее импульсом p соотношениями $\omega = \frac{E}{\hbar}$ и $k = \frac{p}{\hbar}$. С учетом этого волновая функция (9.12) приобретает вид:

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right). \quad (9.13)$$

Покажем, что вид Ψ -функции (9.13) не противоречит уравнению Шредингера. Для этого сделаем следующее:

1. Найдем $\Delta\Psi(x, t) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$ и выразим из полученного выражения p^2 :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi_0 \cdot \frac{i}{\hbar} p \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right) = \frac{i}{\hbar} p \Psi,$$

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \Psi_0 \left(\frac{i}{\hbar} p\right)^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right) = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi.$$

$$p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \Delta\Psi.$$

2. Найдем $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ и выразим из полученного соотношения полную энергию E :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi_0 \left(-\frac{i}{\hbar} E\right) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right) = -\frac{i}{\hbar} E \Psi.$$

$$E = -\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

3. Воспользуемся соотношением между энергией частицы E и ее импульсом p :

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

В результате получим:

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \Delta\Psi\right)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi \quad \text{или}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Полученное соотношение совпадает с уравнением Шредингера (9.8) для случая $U = 0$.

9.5. Частица в потенциальной яме. Квантование энергии

Простейшим примером пространственно-ограниченного движения является одномерное движение квантовой частицы в силовом поле, имеющим вид очень глубокой потенциальной ямы с вертикальными непроницаемыми стенками (Рис. 22). В этом силовом поле график потенциальной энергии $U(x)$ частицы имеет вид,

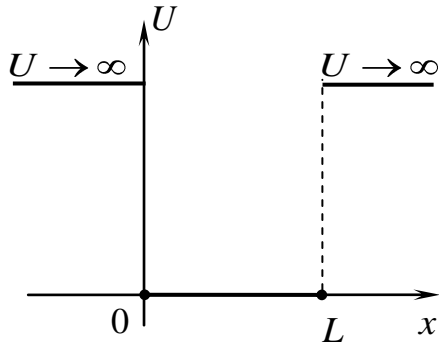


Рис. 22

показанный на том же рисунке. Непроницаемость стенок выражается в неограниченном возрастании потенциальной энергии $U(x)$ в точках $x = 0$ и $x = L$.

Частица может находиться лишь на участке $0 < x < L$. Значение потенциальной энергии частицы в пределах этого участка $U(x) = 0$. Так как частица не выходит из промежутка $0 < x < L$, то вероятность ее обнаружения вне этого промежутка равна нулю, что возможно лишь в случае равенства нулю ее волновой функции вне этого участка. Следовательно, уравнение Шредингера должно быть дополнено граничными условиями: $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Решение уравнения Шредингера позволяет найти волновую функцию частицы в области $0 < x < L$. Пусть силовое поле не меняется с течением времени, поэтому воспользуемся уравнением для стационарных состояний, которое в случае $U = 0$ принимает вид

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (9.14)$$

Для упрощения записи в дальнейшем введем в уравнение волновое число

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (9.15)$$

тогда уравнение (9.14) для одномерного случая приобретет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0.$$

Общим решением данного однородного дифференциального уравнения второго порядка является функция

$$\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), \quad (9.16)$$

где A и B – некоторые комплексные коэффициенты, не зависящие от x . Для нахождения их значений воспользуемся граничными условиями. Так как $\psi(0) = 0$, то $A + B = 0$ и, следовательно, $B = -A$. Тогда выражение (9.16) принимает вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \exp(ikx) - \exp(-ikx) = A \cos(kx) + i \sin(kx) - \cos(kx) + i \sin(kx) = \\ &= 2A i \sin(kx), \end{aligned}$$

С учетом того, что $\psi(L) = 0$, получим $\sin kL = 0$. Откуда $k = \frac{\pi n}{L}$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Случай $n = 0$ должен быть отброшен, так как при $\psi(x) = 0$ вероятность обнаружения частицы внутри ямы равна нулю, что не соответствует тому, что частица локализована именно в области $0 < x < L$. Чтобы показать, что волновое число k частицы принимает не непрерывный, а дискретный набор значений, волновому числу дописывают индекс n , то есть, записывают k_n . Тогда

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.17)$$

Так как волновая функция определяется волновым числом k_n , то и для нее используют тот же индекс n : ψ_n . Вместо A удобно ввести новую комплексную постоянную $C = 2iA$, тогда

$$\psi_n(x) = C \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Для нахождения амплитуды C волновой функции воспользуемся условием нормировки:

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi n x}{L} \right) dx = 1.$$

Так как

$$\int_0^L \sin^2 \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos 2 \frac{\pi n x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} L - \frac{L}{4\pi n} \int_0^L \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) d \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) = \frac{L}{2},$$

то $C = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Таким образом, нормированные волновые функции частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме, имеют вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.18)$$

Из (9.15) выразим полную энергию частицы через волновое число и с учетом (9.17), находим энергетический спектр частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме:

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar n}{L} \right)^2, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.19)$$

Этот энергетический спектр дискретен. Во всем дискретном диапазоне значений энергии есть уровень, на котором энергия частицы минимальна. Этот уровень соответствует $n = 1$ и называется *основным уровнем энергии*. На этом уровне энергия частицы $E_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar}{L} \right)^2 > 0$. Отсюда следует, что микрочастица не может обладать энергией, равной нулю, что означает невозможность остановки микрочастицы в классическом смысле.

10. АТОМНОЕ ЯДРО

10.1. Состав и характеристики атомного ядра.

Ядерные реакции

Экспериментально установлено, что атомное ядро состоит из протонов и нейтронов, которые имеют общее название – *нуклоны*.

Протон (p) – элементарная частица, обладающая положительным элементарным зарядом $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса которой $m_p = 1,00728$ а.е.м.

Нейтрон (n) – элементарная частица, не имеющая электрического заряда, масса которой $m_n = 1,00866$ а.е.м.

Зарядовое число Z ядра равно количеству протонов, содержащихся в нем, и определяет заряд ядра $q_{\text{я}} = Z|e|$.

Массовое число A ядра равно количеству нуклонов (протонов и нейтронов) содержащихся в нем.

Число N нейтронов в ядре равно $N = A - Z$.

Символически характеристики ядра химического элемента X обозначаются так:



Из-за сильного взаимодействия нуклонов в ядре, масса ядра не равна (всегда меньше) сумме масс образующих это ядро свободных нуклонов. Разность суммарной массы образующих ядро нуклонов в свободном состоянии и массы ядра $m_{\text{я}}$ называют *дефектом масс* Δm :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}.$$

Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра – это минимальная работа, которую необходимо совершить против действия ядерных сил притяжения между нуклонами для разделения ядра на составляющие его свободные нуклоны. Учитывая взаимосвязь энергии покоя частицы с ее массой ($E_0 = mc^2$, где c – скорость света в вакууме), энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра ${}^A_Z X$ может быть вычислена по формуле:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2 = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} \cdot c^2. \quad (10.1)$$

Т. к. энергия покоя, соответствующая 1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, равна

$$E_0 = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 2,998^2 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 14,9246 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 931,5 \text{ МэВ},$$

то $E_{\text{св}} = \Delta m \cdot 931,5 \text{ МэВ} = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} \cdot 931,5 \text{ МэВ}$, где все массы выражены в атомных единицах массы (а.е.м.).

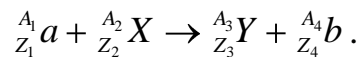
Энергия связи, приходящаяся в среднем на один нуклон ядра, называется *удельной энергией связи* $\varepsilon_{\text{св}}$:

$$\varepsilon_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A},$$

где $E_{\text{св}}$ – энергия связи ядра, A – его массовое число.

Ядерными реакциями называются превращения атомных ядер при их взаимодействии с элементарными частицами или друг с другом. Наиболее распространенным типом ядерной реакции является взаимодействие частицы a с ядром

X , в результате чего образуется ядро Y и частица b . Символически ядерную реакцию можно записать в виде:



В любой ядерной реакции полное число нуклонов остается неизменным, т. е. $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$. Протекание ядерных реакций происходит в строгом соответствии с законами сохранения электрического заряда ($Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$), энергии, импульса, момента импульса и др.

Т. к. полная энергия в ходе ядерной реакции сохраняется, то

$$E_{01} + E_1^k = E_{02} + E_2^k, \quad (10.2)$$

где E_{01} – суммарная энергия покоя исходных ядер и частиц (до реакции), E_1^k – сумма их кинетических энергий; E_{02} – суммарная энергия покоя продуктов реакции (ядер и частиц после реакции), E_2^k – сумма их кинетических энергий.

Энергией ядерной реакции Q называют разность суммарных энергий покоя ядер и частиц до и после реакции $E_{01} - E_{02}$, которая согласно (10.2) равна приращению суммарной кинетической энергии $E_2^k - E_1^k$:

$$Q = E_{01} - E_{02} = E_2^k - E_1^k. \quad (10.3)$$

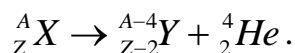
Если ядерная реакция сопровождается выделением энергии ($Q > 0$), то она называется *экзотермической*. Если в ходе ядерной реакции энергия поглощается ($Q < 0$), то – *эндотермической*.

10.2. Радиоактивность

Самопроизвольное (спонтанное) превращение одних ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц, называется *радиоактивностью*. Ядро, испытывающее радиоактивный распад называют материнским, а возникающее ядро – дочерним.

Различают следующие основные типы радиоактивного распада:

1) α -распад – самопроизвольное испускание атомным ядром α -частицы (ядра гелия ${}^4_2\text{He}$), в результате чего образуется дочернее ядро с массовым числом на четыре меньшим массового числа материнского ядра, и зарядовым числом на два меньшим зарядового числа материнского ядра (Рис. 23, а):



2) β -распад – самопроизвольное превращение атомного ядра в другое ядро с тем же массовым числом, но с зарядовым числом, отличающимся от исходного на ± 1 , которое сопровождается испусканием электрона (позитрона) или его захватом

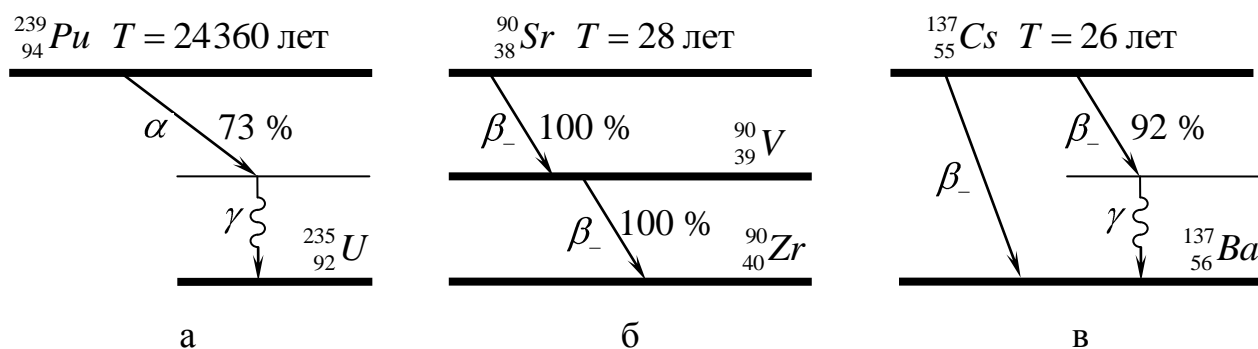
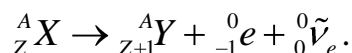


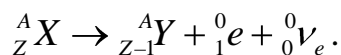
Рис. 23

из электронной оболочки атома. Различают три разновидности β -распада:

а) электронный β_- -распад, при котором ядро испускает электрон и его зарядовое число увеличивается на единицу (рис. 23, б, в):



б) позитронный β_+ -распад, при котором ядро испускает позитрон и его зарядовое число уменьшается на единицу:



в) электронный захват (K -захват), при котором ядро захватывает один из электронов электронной оболочки атома (обычно из K -оболочки) и его зарядовое число уменьшается на единицу. На освободившееся место в K -оболочке переходит электрон с другой оболочки, и поэтому электронный захват всегда сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

При радиоактивном распаде существует вероятность образования ядра в возбужденном состоянии с последующим переходом в основное. При переходе ядра с верхнего энергетического уровня на нижний излучается гамма-квант (γ -излучение) с энергией, равной разности энергий уровней, между которыми происходит переход (рис. 23, а, в).

Радиоактивный распад атомных ядер как явление, происходящее в микромире, имеет случайную природу и может быть понят только на основе вероятностной интерпретации экспериментальных данных.

Естественной статистической величиной, описывающей радиоактивный распад, является вероятность распада одного ядра в единицу времени λ (В СИ [λ] = с^{-1}). Эта величина называется также *постоянной* радиоактивного распада и является важнейшей характеристикой нестабильных (радиоактивных) ядер. Известно, что постоянная распада λ в широких пределах не зависит от внешних факторов (температуры, давления и т.д.), в частности от начала отсчета времени.

Поэтому число распавшихся ядер dN в наблюдаемом малом временном интервале dt определяется только величиной этого интервала и числом ядер N в момент времени t . Экспериментальное соотношение, связывающее убыль радиоактивных ядер, имеет вид

$$-dN = \lambda N dt. \quad (10.4)$$

Отсюда при условии, что $\lambda = \text{const}$ в результате интегрирования и учета, что в момент времени $t_0 = 0$ количество ядер было N_0 , получим *основной закон радиоактивного распада*:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.5)$$

где N – количество нераспавшихся (оставшихся) ядер к моменту времени t .

Закон радиоактивного распада справедлив только для средних значений входящих в него величин. Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада T и среднее время жизни τ радионук-

лида (нуклид – общее название атомных ядер с данным числом протонов и нейтронов).

Период полураспада T – время, в течение которого распадается в среднем половина первоначального количества ядер. Эта величина определяется условием

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

откуда связь между периодом полураспада T и постоянной распада λ :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Среднее время жизни τ радионуклида совпадает с промежутком времени, в течение которого число радиоактивных ядер убывает в e раз. Это время не зависит ни от способа получения ядер, ни от внешних условий, в которых ядра находятся. Среднее время жизни τ связано с постоянной радиоактивного распада λ и периодом полураспада T следующим образом:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}.$$

Активность A радиоактивного вещества является характеристикой интенсивности излучения большой совокупности радиоактивных ядер в целом и равна среднему числу распадов в единицу времени:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right|.$$

В СИ $[A] = 1 \text{ Бк} = 1 \text{ расп/с}$ (беккерель). Однако наиболее употребительной является внесистемная единица кюри: $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с}$.

Из (10.4) и (10.5) следует, что активность A убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.6)$$

где $A_0 = \lambda N_0$ – активность радиоактивного вещества в начальный момент времени.

Именно активность образца является той величиной, которая непосредственно может быть измерена экспериментально.

Среднее число распадов в единицу времени, отнесенное к единице массы или объема вещества, называется *удельной активностью*.

Удельная активность может быть выражена различными единицами измерений: Бк/мл, Бк/г, Бк/см³, Бк/л, Ки/кг и т. д.

11. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В 1907 г. Эйнштейн показал, что формула Планка для средней энергии осциллятора

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}$$

непосредственно подтверждается тепловыми свойствами твердых тел. Из опыта известно, что при высоких температурах справедлив закон, называемый *законом Дюлонга и Пти*, который утверждает, что теплоемкость одного моля любого твердого вещества составляет примерно 6 кал/град. С классической точки зрения этот закон вполне понятен. В твердом теле каждый атом можно рассматривать как трехмерный гармонический осциллятор, поскольку, согласно нашим представлениям, атом удерживается в определенном положении равновесия некоторой квазиупругой силой. Поэтому по правилам классической статистики ему следует приписать в среднем полную энергию $3kT$, так что один моль вещества будет обладать энергией $U_m = 3 N_A kT = 3RT$, где R – универсальная газовая постоянная, равная приблизительно 2 кал/град. Отсюда легко найти теплоемкость как приращение энергии, соответствующее повышению температуры на 1 градус. Итак, молярная теплоемкость твердого тела равна

$$C_m = \frac{dU_m}{dT} = 3R \approx 6 \text{ кал/град.}$$

Однако на опыте наблюдаются отклонения от этого правила: чем тверже тело, т. е. чем крепче «привязаны» атомы к положению равновесия, тем заметнее эти отклонения. Так, например, для алмаза теплоемкость одного моля составляет при комнатной температуре всего лишь около 1 кал/град.

Эйнштейн объяснил эти отклонения тем обстоятельством, что в этом случае нельзя пользоваться классическим выражением для средней энергии: необходимо обратиться к формуле Планка для средней энергии квантового осциллятора. Тогда энергия одного моля вещества будет равна

$$U_m = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = 3RT \cdot \frac{h\nu/kT}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

В этой формуле $h\nu$ есть элементарный квант колебательной энергии осциллятора; он тем больше, чем прочнее удерживается атом в положении равновесия, так что слабая связь эквивалентна малой колебательной энергии, а значит, и малой частоте. Важный вопрос состоит в том, какая из величин больше, $h\nu$ или kT .

Обычно при комнатных температурах $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$, так что формулу для средней энергии можно упростить разложением в ряд. В этом случае она переходит в классическую формулу

$$U_m = 3RT \frac{h\nu/kT}{(1 + h\nu/kT + \dots) - 1} = 3RT + \dots$$

и, таким образом, приводит к закону Дюлонга и Пти.

При больших значениях температуры теплоемкость приближается к классическому пределу 6 кал/град, а при малых температурах убывает, обращаясь в нуль при $T = 0$. Экспериментальные исследования, целью которых являлась проверка предсказаний теории, были проведены в основном Нерстом и его сотрудниками. Результаты этих исследований показали, что имеет место приблизительное согласие между экспериментом и теорией, особенно в связи с тем фактом, что теплоемкость стремится к нулю по мере приближения к нулю температуры. Тем не менее, были обнаружены и расхождения, свидетельствующие о том, что теория в той форме, в какой она тогда существовала, нуждалась еще в некоторых уточнениях.

Эти уточнения были сделаны Дебаем и независимо Борном и Карманом (1912 г.). Они основываются на следующих соображениях. До сих пор считалось, что каждый отдельно взятый атом в твердом теле совершает гармонические колебания совершенно независимо от других атомов. Однако на самом деле это вовсе

не так, поскольку атомы кристаллической решетки, вне сомнения, очень сильно связаны друг с другом. Поэтому не следует думать, что N_A атомов кристалла колеблются с одинаковой частотой. Скорее необходимо рассматривать связанную систему $3N_A$ различных колебаний (соответственно $3N_A$ степеням свободы N_A атомов, находящихся в одном моле). Поэтому энергия системы N_A атомов (одного моля твердого вещества) будет иметь вид

$$U_m = \sum_{r=1}^{3N_A} \frac{h\nu_r}{e^{h\nu_r/kT} - 1},$$

где ν_r – частота r -го колебания.

Непосредственное вычисление этой суммы на основе какой-либо конкретной модели задача довольно не простая. Дебаем была получена приближенная формула для атомов одного сорта. Он рассматривал нормальные колебания атомов кристаллической решетки как колебания кристалла в целом и получил для энергии одного моля вещества выражение

$$U_m = 3RT \frac{3}{x_{\max}^3} \int_0^{x_{\max}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (11.1)$$

где $x_{\max} = \frac{h\nu_{\max}}{kT} = \frac{\Theta_D}{T}$, ν_{\max} – это максимально возможная частота, величина

$\Theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k} = x_{\max} T$ называется *характеристической температурой Дебая*. Харак-

теристическая температура Θ для каждого вещества определяет область температур ($T \ll \Theta$), где становится существенным квантование энергий колебаний. Формула (11.1) дает более точное приближение к действительности, чем эйнштейновская модель.

Продифференцировав выражение (11.1) по переменной T , получим *формулу Дебая для молярной теплоемкости*:

$$C_m = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - 3 \left(\frac{\Theta}{T} \right) \frac{1}{e^{\Theta/T} - 1} \right]. \quad (11.2)$$

При низких температурах ($T \ll \Theta$) отношение $\frac{\Theta}{T} \rightarrow \infty$, тогда верхний предел интегрирования в (11.2) можно заменить бесконечностью, а второе слагаемое считать равным нулю. В этом случае молярную теплоемкость кристаллических тел можно представить в виде:

$$C_m = \frac{12\pi^4 R}{5\Theta^3} \cdot T^3. \quad (11.3)$$

Таким образом, в области низких температур теплоемкость твердого тела пропорциональна кубу его температуры. Эта зависимость известна как предельный закон Дебая.

При высоких температурах ($T \gg \Theta$) при разложении экспонент в (11.2) в ряд можно ограничиться линейными членами: $e^x = 1 + x + \dots$ и $e^{\Theta/T} = 1 + \frac{\Theta}{T} + \dots$, тогда формула Дебая переходит в закон Дюлонга и Пти: $C_m = 3R$.

12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

Распределение свободных электронов в металле по энергиям при $T = 0$

$$dn \varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon,$$

где $dn \varepsilon$ – концентрация электронов, энергия которых заключена в пределах от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; m_e – масса электрона.

Это выражение справедливо при $\varepsilon < \varepsilon_F$ (где ε_F – энергия или уровень Ферми).

Энергия Ферми в металле при $T = 0$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} 3n\pi^2 \quad ^{2/3},$$

где n – концентрация электронов в металле.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Примеры решения задач

Пример 1. На тонкий стеклянный клин с показателем преломления $n = 1,5$, находящийся в воздухе, нормально падает плоская монохроматическая световая волна длиной $\lambda = 0,6$ мкм. В отраженном свете наблюдается система интерференционных полос. При этом на отрезок длиной $\ell = 1$ см приходится $N = 10$ интерференционных полос. Определить угол α между гранями клина.

Решение. Плоская монохроматическая световая волна, падая нормально на грань клина, испытывают отражение и от верхней, и от нижней грани (Рис. 24). Эти отраженные волны когерентны. Поэтому на поверхности клина в отраженном свете будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол α между гранями клина мал, то отраженные световые волны 1 и 2 будут практически параллельны, а их оптическая разность хода Δ на участке клина толщиной h_m состав-

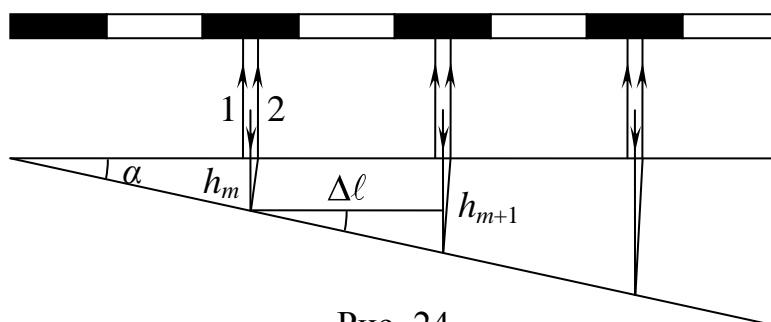


Рис. 24

ляет:

$$\Delta = 2nh_m + \frac{\lambda}{2}, \quad (5.1.1)$$

где учтено, что при отражении от верхней грани клина (от оптически более плотной среды) у отраженной волны 1 происходит скачок фазы на π , т. е. эта волна «теряет» полудлину волны $\frac{\lambda}{2}$. Если в данном месте клина наблюдается темная полоса, то оптическая разность хода (5.1.1) должна удовлетворять условию возникновения интерференционного минимума:

$$2nh_m + \frac{\lambda}{2} = 2m + 1 \frac{\lambda}{2} \quad (\text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда толщина клина в месте отражения волн 1 и 2, образующих m -й минимум, равна

$$h_m = \frac{m\lambda}{2n}. \quad (5.1.2)$$

Толщина h_{m+1} клина в месте, где наблюдается соседняя $(m+1)$ -я темная полоса, равна

$$h_{m+1} = \frac{m+1}{2n} \lambda,$$

причем,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_{m+1} - h_m}{\Delta \ell} = \frac{\lambda}{2n\Delta \ell} = \frac{\lambda N}{2n\ell}, \quad (5.1.3)$$

где $\Delta \ell = \frac{\ell}{N}$ – ширина интерференционной полосы.

Учитывая, что при малых углах $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, из (5.1.3) находим угол α между гранями клина

$$\alpha = \frac{\lambda N}{2n\ell}.$$

Подставляя значения физических величин, получим

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (рад)}.$$

Пример 2. Плоская монохроматическая волна с $\lambda = 500$ нм падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на $d = 1$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии $\ell = 2,5$ м, образуется система интерференционных полос (опыт Юнга). Чему равно расстояние между соседними темными полосами на экране?

Решение. Как видно из Рис. 25, оптическую разность хода Δ двух волн, сходящихся на экране в точке P с координатой y_m , можно определить из следующего соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_m}{\ell} = \frac{\Delta}{d \cos \alpha}. \quad (5.2.1)$$

Так как угол α мал, то $\cos \alpha \approx 1$. Тогда для оптической разности хода Δ двух интерферирующих волн можно записать

$$\Delta = \frac{y_m d}{\ell}. \quad (5.2.2)$$

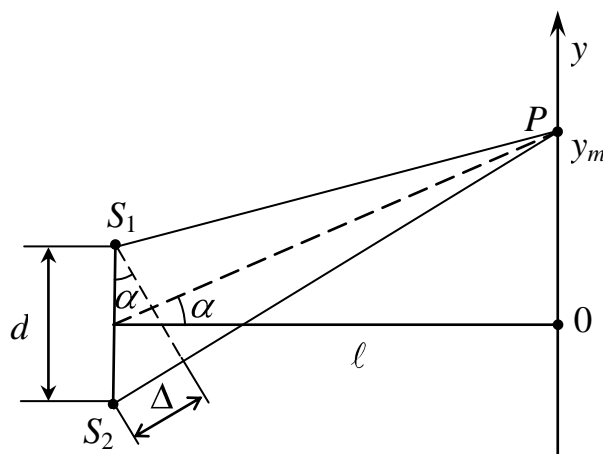


Рис. 25

На экране в точке P будет наблюдаться темная интерференционная полоса, если оптическая разность хода (5.2.2) будет удовлетворять условию возникновения интерференционного минимума:

$$\frac{y_m d}{\ell} = 2m + 1 \frac{\lambda}{2} \quad (\text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда координата y_m m -й темной полосы

$$y_m = \frac{(2m + 1)\ell\lambda}{2d}.$$

Расстояние Δy между соседними m -й и $(m+1)$ -й минимумом выражается через их координаты следующим образом:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{2(m+1)+1}{2d} \ell\lambda - \frac{(2m+1)\ell\lambda}{2d} = \frac{\ell\lambda}{d}.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$\Delta y = \frac{2,5 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{10^{-3}} = 1,25 \text{ (мм)}.$$

Пример 3. На мыльную пленку ($n = 1,33$) под углом $\alpha = 35^\circ$ падает пучок белого цвета. Толщина пленки $d = 0,104$ мкм. Какой цвет имеет пленка в отраженном свете?

Решение. Пленку можно представить как плоскопараллельную пластинку. Оптическая разность хода между волнами с длиной λ , отраженными от верхней и нижней поверхности плоскопараллельной пластинки толщиной d , равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}, \quad (5.3.1)$$

где учтено, что при отражении от верхней поверхности пленки (от оптически более плотной среды) у отраженной волны происходит скачок фазы на π , т. е. эта волна «теряет» полудлину волны $\frac{\lambda}{2}$.

Цвет пленки будет определяться теми отраженными волнами, которые будут усилены в результате интерференции. Найдем длину λ волн, для которых в отраженном свете будет наблюдаться интерференционный максимум. Тогда оптическая разность (5.3.1) таких волн должна удовлетворять условию возникновения интерференционного максимума:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (\text{где } m = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда длина волн, для которых в отраженном свете будет наблюдаться интерференционный максимум, равна

$$\lambda = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{2m + 1}.$$

Вычислим λ для $m = 0$:

$$\lambda = 4 \cdot 0,104 \cdot 10^{-6} \sqrt{(1,33)^2 - 0,537^2} = 506 \cdot 10^{-9} \text{ (м)} = 506 \text{ (нм)}.$$

Так как вследствие интерференции в отраженном свете будут преобладать волны, длина которых составляет 506 нм, то в отраженном свете пленка будет иметь зеленый цвет.

Пример 4. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия R , расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ . Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R = 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в нуль?

Решение. Интенсивность света в центре экрана станет равной нулю, когда радиус диафрагмы совпадает с радиусом второй зоны Френеля. Известно, что число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (5.4.1)$$

где a – расстояние от источника света до диафрагмы; b – расстояние от диафрагмы до экрана.

Так как фронт падающей волны плоский, то $a \rightarrow \infty$, тогда формулу (5.4.1) можно записать в виде

$$m = \frac{R^2}{\lambda b},$$

откуда

$$R = \sqrt{m\lambda b}. \quad (5.4.2)$$

Так как $m = 2$, то окончательно получаем, что интенсивность света в центре экрана впервые обратится в нуль при

$$R = \sqrt{2\lambda b}.$$

Пример 5. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,20$ мкм, если угол между максимумами первого и второго порядков спектра $\Delta\varphi = 15^\circ$.

Решение. Пусть φ_1 и φ_2 – углы дифракции, соответствующие максимумам первого $m_1 = 1$ и второго $m_2 = 2$ порядков. По условию

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (5.5.1)$$

Из уравнения дифракционной решетки, определяющего положения главных максимумов,

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (5.5.2)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – порядок главного максимума, следует, что

$$d \sin \varphi_1 = \lambda, \quad (5.5.3)$$

$$d \sin \varphi_2 = 2\lambda. \quad (5.5.4)$$

Разделив почленно (5.5.3) на (5.5.4), получим

$$\sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1$$

и, учитывая (5.5.1):

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1 \quad (5.5.5)$$

Решив это тригонометрическое уравнение относительно $\sin \varphi_1$, найдем

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}} \quad (5.5.6)$$

Теперь из (5.5.3) с учетом (5.5.6) определим искомую величину:

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}.$$

Подставим в формулу числовые значения величин:

$$\lambda = \frac{2,20 \cdot 10^{-6} \cdot 0,259}{\sqrt{5 - 4 \cdot 0,966}} = 0,54 \text{ (мкм)}.$$

Пример 6. При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом $d = 2,9$ мкм можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ($\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм)?

Решение. Число штрихов N решетки связано с ее разрешающей способностью R и порядком спектра m соотношением $R = mN$, откуда

$$N = \frac{R}{m}.$$

Минимальному значению N_{\min} соответствует минимальное значение разрешающей способности R_{\min} и наибольший порядок максимума m_{\max} , т.е.

$$N_{\min} = \frac{R_{\min}}{m_{\max}}. \quad (5.6.1)$$

Минимальная разрешающая сила решетки R_{\min} , необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через величины λ_1 и λ_2 по формуле

$$R_{\min} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (5.6.2)$$

Из уравнения дифракционной решетки, определяющего положения главных максимумов,

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (5.6.3)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – порядок максимума, следует, что $m = m_{\max}$ при $\sin \varphi \rightarrow 1$ и $\lambda = \lambda_2$ (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым номером m_{\max} будут видны), тогда

$$m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda_1} \right] = \left[\frac{2,9 \cdot 10^{-6}}{589,6 \cdot 10^{-9}} \right] = 4,9186 = 4. \quad (5.6.4)$$

Подставив выражения (5.6.2) и (5.6.4) в соотношение (5.6.1), найдем

$$N_{\min} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{589 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}} = 245,42 \approx 246 \text{ штрихов.}$$

Пример 7. На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол $\varphi_2 = 60^\circ$ из положения, соответствующего наибольшему пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3,0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света:

$$I = I_e + I_n,$$

где I – интенсивность частично поляризованного света, I_e и I_n – интенсивности естественной и поляризованной составляющих соответственно частично поляризованного света.

Максимальное I_{\max} и минимальное I_{\min} значения интенсивности частично поляризованного света выражаются через интенсивности естественной I_e и поляризованной I_n его составляющих следующим образом:

$$I_{\max} = \frac{I_e}{2} + I_n$$

$$\text{и } I_{\min} = \frac{I_e}{2}.$$

Тогда степень поляризации P частично поляризованного света равна

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_n}{I_e + I_n} = \frac{1}{I_e/I_n + 1}. \quad (5.7.1)$$

Из закона Малюса следует, что после прохождения николя интенсивность естественного света уменьшается в 2 раза, интенсивность плоскополяризованного света уменьшается в $\cos^2 \varphi$ раз, где φ – угол между направлением колебаний светового вектора и плоскостью пропускания николя. Положение николя, при котором пропускание света наибольшее, соответствует углу $\varphi_1 = 0$. В этом положении николя интенсивность I_1 прошедшего через него частично поляризованного света равна

$$I_1 = \frac{I_e}{2} + I_n. \quad (5.7.2)$$

При повороте николя на угол φ_2 интенсивность I_2 прошедшего через него частично поляризованного света составляет

$$I_2 = \frac{I_e}{2} + I_n \cos^2 \varphi_2. \quad (5.7.3)$$

По условию задачи $I_1 = \eta I_2$, откуда с учетом выражений (5.7.2) и (5.7.3) получим:

$$\frac{I_e}{I_n} = \frac{2(1 - \eta \cos^2 \varphi_2)}{\eta - 1}.$$

После подстановки последнего выражения в (5.7.1) находим степень поляризации падающего на николь света и вычисляем ее значение:

$$P = \frac{\eta - 1}{1 + \eta} = 0,8.$$

Пример 8. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет $\alpha = 60^\circ$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность I_0 естественного света: 1) при прохождении его через один николь N_1 ; 2) при его прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе $k = 0,05$. Потери на отражение света не учитывать.

Решение. 1. Естественный свет, падая на грань призмы Николя (Рис. 26), вследствие двойного лучепреломления расщепляется на два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба луча одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного луча (e) лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного луча

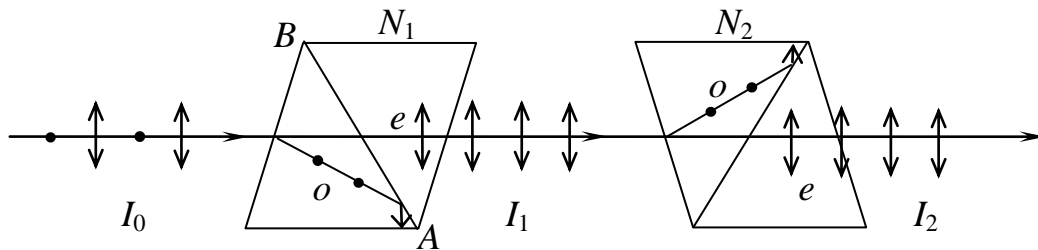


Рис. 26

(o) перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный луч света (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч (e) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность I_1 света, прошедшего через первую призму, равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2} (1 - k) .$$

Тогда

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1 - k} . \quad (5.8.1)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1 - 0,05} = 2,1$$

Таким образом, интенсивность естественного света при прохождении через один николь уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивностью I_1 падает на второй николю N_2 и также разделяется на два луча различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный луч полностью поглощается призмой, поэтому его интенсивность нас не интересует. Интенсивность I_2 необыкновенного луча, вышедшего из призмы N_2 , определяется законом Малюса, и с учетом поглощения света во втором николе равна

$$I_2 = I_1 (1 - k \cos^2 \alpha),$$

где α – угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью пропускания николя N_2 .

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2 \alpha}.$$

Учитывая выражение (5.8.1), получаем

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2 \cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения естественного света через два николя его интенсивность уменьшится в 8,86 раза.

Пример 9. Плоскополяризованный монохроматический свет падает на поляроид и полностью им гасится. Когда на пути света поместили кварцевую пластину, его интенсивность I после поляроида стала равна половине интенсивности света, падающего на поляроид. Определить минимальную толщину кварцевой пластины. Поглощением и отражением света поляроидом пренебречь, постоянную вращения кварца принять равной $\alpha = 48,9$ град/мм.

Решение. Полное гашение света поляроидом означает, что плоскость пропускания поляроида (штриховая линия на Рис. 27) перпендикулярна плоскости колебаний (I – I) плоскополяризованного света, падающего на него. Введение кварцевой пластины приводит к повороту плоскости колебаний света на угол

$$\varphi = \alpha \ell, \quad (5.9.1)$$

где ℓ – толщина пластины.

Зная, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении его через поляроид, определим угол β , который установится между плоскостью пропускания поляроида и новым направлением (II – II) плоскости колебаний падающего на поляроид плоскополяризованного света. Для этого воспользуемся законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \beta.$$

Поскольку $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то можно записать

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (5.9.2)$$

Из равенства (5.9.2) с учетом (5.9.1) получим:

$$\alpha \ell = \arcsin \sqrt{\frac{I}{I_0}},$$

откуда искомая толщина ℓ пластины

$$\ell = \frac{1}{\alpha} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{I}{I_0}}.$$

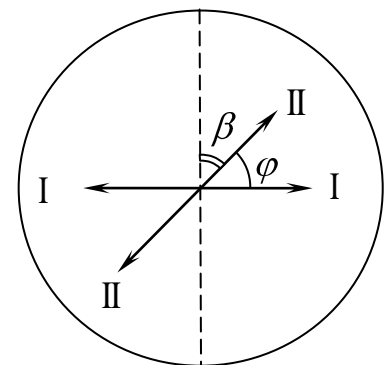


Рис. 27

Произведем вычисления во внесистемных единицах:

$$\ell = \frac{\arcsin \sqrt{0,5}}{\alpha} = \frac{45^0}{48,5^0} \cdot 1 \text{ мм} = 0,93 \text{ мм}.$$

Пример 10. Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, $\lambda_m = 0,58$ мкм. Определить энергетическую светимость R^* поверхности тела.

Решение. Энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела в соответствии с законом Стефана-Больцмана прямо пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры T :

$$R^* = \sigma T^4, \quad (5.10.1)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

Температуру T абсолютно черного тела можно найти с помощью закона смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (5.10.2)$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Тогда энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела равна

$$R^* = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4.$$

Произведем вычисления:

$$R^* = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,58 \cdot 10^{-6}} \right)^4 = 3,54 \cdot 10^7 \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Пример 11. Солнечная постоянная $C = 1,4$ кДж/(м²·с). Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить температуру его поверхности, а также длину волны, на которую приходится максимум солнечного излучения. Расстояние от Земли до центра Солнца равно $\ell = 1,49 \cdot 10^{11}$ м, радиус Солнца $R_C = 6,95 \cdot 10^8$ м.

Решение. Световой поток Φ , излучаемый Солнцем, можно выразить через солнечную постоянную C следующим образом:

$$\Phi = C \cdot 4\pi\ell^2. \quad (5.11.1)$$

Излучательная способность единицы поверхности Солнца:

$$R^* = \frac{\Phi}{4\pi R_C^2} = C \left(\frac{\ell}{R_C} \right)^2. \quad (5.11.2)$$

По закону Стефана-Больцмана энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры T :

$$R^* = \sigma T^4, \quad (5.11.3)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

Приравнивая правые части выражений (5.11.2) и (5.11.3), получаем

$$\sigma T^4 = C \left(\frac{\ell}{R_C} \right)^2, \quad (5.11.4)$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{C}{\sigma} \left(\frac{\ell}{R_C} \right)^2}. \quad (5.11.5)$$

Длину волны λ_m , на которую приходится максимум солнечного излучения, найдем на основе закона смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (5.11.6)$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Произведем вычисления:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{5,67 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1,49 \cdot 10^{11}}{6,95 \cdot 10^8} \right)^2} \approx 5760 \text{ (К)}.$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{5760} = 0,503 \cdot 10^{-6} \text{ (м)} = 0,503 \text{ (мкм)}.$$

Пример 12. На металлическую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,413$ мкм. Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает $U = 1,00$ В. Определить работу выхода в электрон-вольтах и красную границу фотоэффекта.

Решение. Поглощение фотона с энергией $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ (λ – длина световой волны, h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме) электроном, находящимся на поверхности металла, описывается уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + W_{\text{max}}^k, \quad (5.12.1)$$

где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода, W_{max}^k – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

Так как даже самые быстрые фотоэлектроны полностью задерживаются электрическим полем, пройдя в нем разность потенциалов U , то их начальная кинетическая энергия W_{max}^k связана с величиной U соотношением

$$W_{\text{max}}^k = |e|U, \quad (5.12.2)$$

где e – заряд электрона.

Из уравнения (5.12.1) с учетом соотношения (5.12.2) найдем работу выхода $A_{\text{вых}}$:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda} - |e|U. \quad (5.12.3)$$

Из формулы Эйнштейна (5.12.1) следует, что красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}}$ (максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект, т. е. для случая $W_{\text{max}}^k = 0$), связана с работой выхода $A_{\text{вых}}$:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}}.$$

Принимая во внимание равенство (5.12.3), получаем выражение для красной гра-

ницы фотоэффекта $\lambda_{кр}$:

$$\lambda_{кр} = \frac{hc\lambda}{hc - |e|U\lambda}.$$

Сделаем вычисления:

$$A_{вых} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,413 \cdot 10^{-6}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,00 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 2,0 \text{ (эВ)},$$

$$\lambda_{кр} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0,413 \cdot 10^{-6}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,413 \cdot 10^{-6}} = 0,619 \cdot 10^{-6} \text{ (м)} = 0,619 \text{ (мкм)}.$$

Пример 13. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ -излучением с длиной волны $\lambda_2 = 1$ пм. Работа выхода для серебра $A_{вых} = 4,7$ эВ.

Решение. Запишем уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A_{вых} + W_{max}^k, \quad (5.13.1)$$

где $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ – энергия фотона, λ – длина волны излучения, h – постоянная Планка,

c – скорость света в вакууме, $A_{вых}$ – работа выхода, W_{max}^k – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

Максимальная кинетическая энергия W_{max}^k фотоэлектрона массой m_e может быть выражена или по классической формуле (в случае $v_{max} \ll c$)

$$W_{max}^k = \frac{m_e v_{max}^2}{2}, \quad (5.13.2)$$

или по релятивистской формуле (в случае $v_{max} \sim c$)

$$W_{max}^k = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{max}^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (5.13.3)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Значение скорости фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия ε фотона много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_e c^2 = 0,51$ МэВ, то может быть применена формула (5.13.2), если же ε сравнима по величине с E_0 , то нужно пользоваться формулой (5.13.3).

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения:

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)} = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ (эВ)} = 8,0 \text{ (эВ)}$$

Поскольку $\varepsilon_1 \ll E_0$, то для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (5.13.1) может быть выражена по классической формуле (5.13.2):

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2(hc - \lambda A_{\text{вых}})}{m_e \lambda}}.$$

Подставив значения величин в формулу (5.30), найдем

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2(6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 - 7,52 \cdot 10^{-19} \cdot 0,155 \cdot 10^{-6})}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,155 \cdot 10^{-6}}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

2. Вычислим энергию фотона γ -излучения:

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} = 1,988 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)} = \frac{1,988 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ (эВ)} = 1,24 \text{ (МэВ)}.$$

Т. к. $\varepsilon_2 \gg A_{\text{вых}}$, то для данного случая уравнение (5.13.1) принимает вид:

$$\varepsilon_2 = W_{\text{max}}^k.$$

Отсюда следует, что максимальная кинетическая энергия $W_{\text{max}}^k = 1,24$ МэВ электрона больше его энергии покоя $E_0 = 0,51$ МэВ, поэтому для вычисления максимальной скорости v_{max} электрона необходимо воспользоваться релятивистской формулой (5.13.3):

$$W_{\max}^k = \varepsilon_2 = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\max}^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

откуда

$$v_{\max} = \frac{c \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_2 + 2m_e c^2}}{\varepsilon_2 + m_e c^2}.$$

Произведем вычисления, воспользовавшись вычисленным ранее значением энергии $\varepsilon_2 = 1,988 \cdot 10^{-13}$ Дж фотона γ -излучения:

$$v_{\max} = \frac{3 \cdot 10^8 \sqrt{1,988 \cdot 10^{-13} \cdot 1,988 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}}{1,988 \cdot 10^{-13} + 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 2,87 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

**Таблица распределения задач по вариантам
к контрольной работе № 5**

Вариант	Номера задач							
0	501	511	521	531	541	551	561	571
1	502	512	522	532	542	552	562	572
2	503	513	523	533	543	553	563	573
3	504	514	524	534	544	554	564	574
4	505	515	525	535	545	555	565	575
5	506	516	526	536	546	556	566	576
6	507	517	527	537	547	557	567	577
7	508	518	528	538	548	558	568	578
8	509	519	529	539	549	559	569	579
9	510	520	530	540	550	560	570	580

501. Найти все длины волн из видимого диапазона света (от 800 нм до 400 нм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены, если разность хода интерферирующих волн равна 2,0 мкм.

502. Расстояние между двумя когерентными источниками света с длиной волны 600 нм составляет 0,12 мм. В средней части экрана расстояние между светлыми полосами равно 1 см. Определить расстояние от источника до экрана. Каким станет это расстояние, если расстояние между светлыми полосами уменьшится на 0,2 см.

503. Щели в опыте Юнга расположены на расстоянии 1 мм друг от друга, а экран находится на расстоянии 3 м от них. Расстояние между соседними максимумами интерференционной картины равно 1,5 мм. Найти длину волны источника света.

504. В опыте Юнга расстояние между щелями 0,8 мм, а экран от них находится на расстоянии 2,5 м. Найти ширину интерференционной полосы, если длина световой волны равна 600 нм. Как изменится ширина интерференционной полосы при приближении экрана на 1 м?

505. Расстояние от щелей до экрана в опыте Юнга равно 2,1 м. На экране 10 темных интерференционных полос укладываются на отрезке 1,4 см. Найти расстояние между щелями при длине волн $\lambda_1 = 700$ нм и $\lambda_2 = 550$ нм.

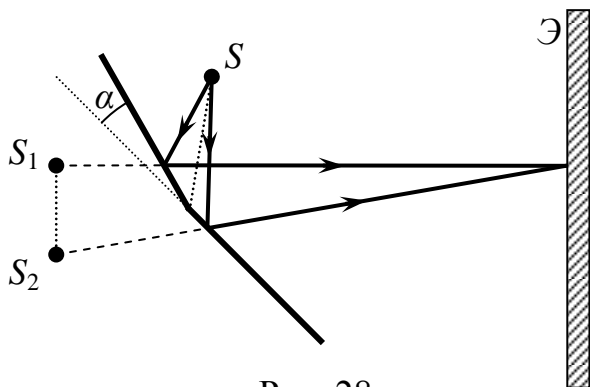


Рис. 28

506. В опыте с зеркалами Френеля (Рис. 28) расстояние между мнимыми изображениями источника света 0,5 мм, расстояние от них до экрана 3 м. Найти расстояние между двумя смежными интерференционными максимумами при длине волны 600 нм.

507. Угол между зеркалами Френеля (Рис. 28) $\alpha = 12'$, расстояние от источника S до линии пересечения зеркал $r = 10$ см, а от линии пересечения зеркал до экрана – 1,3 м. Найти ширину интерференционной полосы при длине волны света 550 нм.

508. В опыте Ллойда (Рис. 29) расстояние от источника до экрана равно 1 м. При некотором положении источника относительно экрана ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x_1 = 0,3$ мм. После того, как источник отодвинули от зеркала на $\Delta h = 0,6$ мм, ширина полос стала $\Delta x_2 = 0,2$ мм. Найти длину волны света.

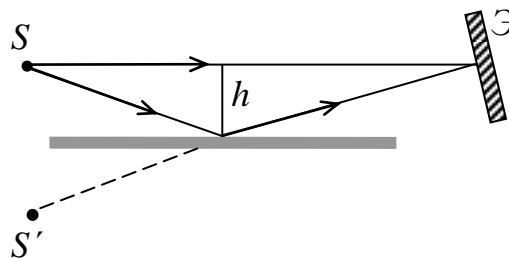


Рис. 29

Начертить оптическую схему.

509. В опыте Ллойда (Рис. 29) источник света с длиной волны $\lambda = 600$ нм находится от зеркала на расстоянии $h = 0,5$ мм, расстояние от источника до экрана составляет 2 м. Найти ширину интерференционной полосы на экране.

510. Расстояние от источника света до бипризмы Френеля с показателем преломления $n = 1,5$ равно $a = 25$ см, а от бипризмы до экрана – 1 м. Преломляющий угол призмы $\alpha = 20'$, ширина интерференционной полосы $\Delta x = 0,4$ мм. Найти длину волны света.

511. На мыльную пленку ($n = 1,3$) падает нормально пучок белого света. При какой минимальной толщине пленки она будет казаться в отраженном свете зеленой ($\lambda = 550$ нм)? Начертить оптическую схему.

512. На тонкую глицериновую пленку толщиной $1,2$ мкм падает нормально белый свет. Определить длины волн видимого спектра (от 400 нм до 800 нм), которые будут ослаблены в результате интерференции.

513. На тонкую пленку ($n = 1,4$) нормально падает свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм. Отраженный от нее свет максимально усилен вследствие интерференции. Найти наименьшую толщину пленки.

514. Между пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой с радиусом кривизны $R = 0,5$ м находится жидкость. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего темного кольца Ньютона в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 700$ нм равен $0,82$ мм.

515. На стеклянной пластинке лежит плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 1$ м. Радиус пятого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете, равен $1,1$ мм. Определить длину волны света, если показатели преломления стекла и линзы одинаковы и равны $1,5$.

516. Для наблюдения колец Ньютона используется нормально падающий свет с длиной волны 650 нм. Радиус кривизны линзы $R = 10$ мм. Определить толщину воздушного промежутка в том месте, где наблюдается четвертое светлое кольцо в отраженном свете.

517. На тонкую пленку ($n = 1,33$) падает белый свет под углом падения $\alpha = 52^\circ$. При какой минимальной толщине пленки отраженный свет будет окрашен в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)?

518. Между двумя тонкими прозрачными плоскопараллельными пластинами находится проволока толщиной $0,01$ мм на расстоянии 10 см от точки их соприкосновения, образуя воздушный клин. На пластины падает нормально света с длиной волны 650 нм. Найти ширину интерференционных полос в отраженном свете.

519. На стеклянный клин ($n = 1,55$) с углом $3 \cdot 10^{-4}$ радиан падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ . Число интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете на отрезке клина длиной 1 см, равно 15. Определить длину волны λ .

520. Плоская монохроматическая световая волна с $\lambda = 640$ нм падает нормально на стеклянный клин ($n = 1,6$). На участке клина расстояние между двумя соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете равно 0,5 мм. Найти угол между поверхностями клина.

521. На дифракционную решетку с периодом 5 мкм под углом 45° падает монохроматический свет с длиной волны 500 нм. Найти угол дифракции, соответствующий третьему главному максимуму. Начертить оптическую схему.

522. На экран со щелью, ширина которой 0,06 мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны 700 нм. Найти угол отклонения лучей, соответствующий первому дифракционному максимуму. Каково будет угловое расстояние между максимумами второго порядка?

523. На щель шириной 0,15 мм падает нормально монохроматический свет длиной волны 550 нм. Линза, находящаяся прямо за щелью, проецирует на экран дифракционную картину. Определить ширину центрального максимума, угловое расстояние между максимумами третьего и четвертого порядка, если расстояние от линзы до экрана 1,5 м.

524. Какое наименьшее число штрихов должна иметь дифракционная решетка с периодом 5 мкм, чтобы в спектре второго порядка были видны отдельно две линии натрия $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм? Какова длина такой решетки?

525. Дифракционная решетка с периодом 5 мкм имеет 500 штрихов. Найти разрешение спектральных линий в желтой области 600 нм. Как изменится разрешение, если уменьшить период на 0,5 мкм?

526. На дифракционную решетку, содержащую 100 штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимумы второго порядка, угловое расстояние между которыми 16° . Найти

длину волны падающего света. Как изменится угловое расстояние, если перейти на третий порядок?

527. На дифракционную решетку, имеющую 600 штрихов на 1 мм, падает белый свет, содержащий волны с длинами от 400 нм до 800 нм. Спектр проецируется линзой, помещенной вблизи решетки, на экран. Расстояние от линзы до экрана 1 м. Найти длину спектра второго порядка.

528. На дифракционную решетку с периодом 4 мкм падает нормально свет с длиной волны 500 нм. Линза, помещенная вблизи решетки, проецирует дифракционную картинку на экран. Найти расстояние между линзой и экраном, если максимумы первого порядка расположены на расстоянии 12 см друг от друга.

529. На дифракционную решетку нормально падает свет с длиной волны 600 нм. Линза проецирует дифракционную картинку на экран, удаленный от линзы на 1 м. Расстояние между максимумами первого порядка на экране составляет 20,2 см. Определить период решетки. Сколько главных максимумов дает дифракционная решетка.

530. Постоянная дифракционной решетки равна 4 мкм. На решетку нормально падает свет с длиной волны 680 нм. Сколько главных максимумов дает эта решетка? Каков максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему максимуму?

531. Пластинку кварца толщиной 2,6 см поместили между двумя николями, в результате чего плоскость поляризации повернулась на угол $\varphi = 50^\circ$. Какой наименьшей толщины следует изготовить пластинки, чтобы поле зрения стало а) совершенно темным; б) максимально светлым.

532. Предельный угол полного внутреннего отражения на границе жидкость–воздух равен 52° . Найти угол падения света на жидкость, при котором отраженный свет максимально поляризован.

533. Найти угол поворота φ плоскости поляризации при прохождении света длиной волны 628 нм через пластинку толщиной 2,5 см, если различие в показателях преломления для право- и левополяризованного света $\Delta n = 10^{-6}$.

534. В кварцевой пластике, толщиной 1 мм, плоскость поляризации для света длиной волны 471 нм поворачивается на угол $21,72^{\circ}$. Найти разность показателей преломления Δn кварца для лево- и правополяризованного света.

535. Частично поляризованный свет (степень поляризации составляет 0,8) падает на николю. Во сколько раз уменьшилась интенсивность прошедшего света при повороте николя на угол $\alpha = 60^{\circ}$ из положения, соответствующего максимуму пропускания света?

536. Естественный свет проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол 40° . Коэффициент поглощения каждого николя равен 0,15. Во сколько раз уменьшается интенсивность света после прохождения двух николей?

537. Естественный свет, проходя через систему двух николей, плоскости пропускания которых образуют между собой угол 45° , ослабляется в 8 раз. Пренебрегая потерей света при отражениях, определить коэффициент поглощения и пропускания николей.

538. Два поляроида расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет 30° . Найти, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении: а) через один поляроид; б) через два поляроида. Коэффициент поглощения каждого поляроида равен 0,1.

539. В сахариметре монохроматический свет линейной поляризации, проходя через кювету с 30 % раствором сахара, поворачивается на угол $\varphi_1 = 45^{\circ}$. Если на пути света поставить кювету вдвое меньшей длиной с неизвестной концентрацией сахара, то угол поворота составит $\varphi_2 = 45^{\circ}$. Найти концентрацию раствора сахара.

540. При прохождении света через сахариметр с длиной трубки 26 см и концентрацией сахара 40 % плоскость поляризации повернулась на угол 26° . На какой угол повернется плоскость поляризации света при прохождении его через сахариметр с длиной трубки 13 см и концентрацией сахара 26 %.

541. При прохождении света через трубку длиной 25 см с раствором сахара концентрации 15 % плоскость поляризации повернулась на угол 10° , в другой

трубке длиной 15 см с раствором сахара плоскость поляризации повернулась на угол $12,5^\circ$. Определить концентрацию сахара во второй трубке.

542. Свет проходит через трубку длиной 20 см с раствором сахара концентрации 12 %, и плоскость поляризации при этом поворачивается на угол 30° . На какой угол повернется плоскость поляризации света при прохождении его через трубку длиной 15 см с раствором сахара, концентрация которого составляет 8 %.

543. Пластинку кварца толщиной 0,15 мм поместили между двумя параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол 53° . Какой наименьшей толщины надо взять пластинку кварца, чтобы поле зрения поляриметра стало а) темным; б) светлым?

544. Пластинка кварца толщиной 1,2 мм поворачивает плоскость поляризации красного света на угол 11° . На какой угол повернет плоскость поляризации света той же длины волны пластинка кварца толщиной 3,6 мм?

545. Свет падает на плоскопараллельную алмазную пластинку ($n = 1,55$), нижняя поверхность которой находится в воде. При каком угле падения свет, отраженный от границы алмаз–вода, будет максимально поляризован? Как изменится этот угол на границе алмаз–глицерин? Показатель преломления воды равен 1,33, глицерина – 1,47.

546. Свет переходит из некоторой жидкости в стекло. Угол падения света равен 60° , угол преломления – 44° . При каком угле падения свет, отраженный от границы раздела жидкость–стекло, будет максимально поляризован?

547. Естественный свет проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол 50° , а коэффициент поглощения каждого николя составляет 0,15. Определить, во сколько раз интенсивность света, последовательно прошедшего через оба николя, будет меньше интенсивности света, падающим на первый николь. Потерями на отражение пренебречь.

548. Естественный свет интенсивностью I_0 падает на два николя, которые расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет 45° . Коэффициент поглощения в первом николе равен 0,08, а во втором – 0,1. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света: а) при прохождении через

первый николю; б) при прохождении через оба николя. Потерями на отражение пренебречь.

549. Два поляроида образуют угол 40° между плоскостями пропускания. Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в 6 раз. Пренебрегая потерями света при отражении, определить коэффициент поглощения света, который одинаков для обоих поляроидов.

550. Естественный свет последовательно проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол 25° . Коэффициент поглощения каждого николя равен 0,18. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света: а) при прохождении через первый николю; б) при прохождении через оба николя. Потерями на отражение пренебречь.

551. На какую длину волны приходится максимум плотности энергии излучения абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре человеческого тела, т.е. $36,6^\circ\text{C}$? На сколько процентов изменится максимальная длина волны и плотность излучения, если температура больного человека будет 41°C ?

552. Из отверстия печи размером 8 см^2 излучается за 1 секунду энергия в 24 Дж. Определить температуру печи, частоту и длину волны излучения, соответствующие максимуму плотности энергии излучения.

553. Мощность излучения абсолютно черного тела равна 10 кВт. Найти площадь излучающей поверхности тела, если известно, что длина волны, на которую приходится максимум плотности энергии излучения, равна $7 \cdot 10^{-5}\text{ см}$.

554. Абсолютно черное тело находится при температуре 3900 К. При остывании длина волны, на которую приходится максимум плотности энергии излучения, изменилась на 0,3 мкм. До какой температуры охладилось тело?

555. Мощность излучения абсолютно черного тела равна 34 кВт. Найти температуру этого тела, если известно, что его поверхность равна $0,6\text{ м}^2$. Определить длину волны, на которую приходится максимум плотности энергии излучения.

556. Температура абсолютно черного тела равна 2900 К. При нагревании тела длина волны, на которую приходится максимум плотности излучения, изменилась на 400 нм. До какой температуры нагрелось тело?

557. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму плотности энергии излучения, если источником света служит: 1) спираль электрической лампочки ($T = 3000$ К), 2) поверхность Солнца ($T = 6000$ К) и 3) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура около 10^7 К?

558. Найти, какое количество энергии с 1 см^2 поверхности излучает абсолютно черное тело за 1 с, если известно, что максимальная плотность энергии излучения приходится на длину волны в 484 нм.

559. Плотность энергии излучения абсолютно черного тела составляет 4 Вт/см^2 . Найти температуру этого тела и длину волны, на которую приходится максимум плотности энергии излучения.

560. Максимум плотности энергии излучения абсолютно черного тела соответствует длине волны 580 нм. Найти температуру и энергетическую светимость этого тела.

561. Металл, для которого работа выхода составляет 1,9 эВ, последовательно освещается светом с длиной волны 0,35 мкм, а затем – 0,54 мкм. Во сколько раз отличаются максимальные скорости фотоэлектронов?

562. Фототок, возникающий в электрической цепи при освещении вольфрамового катода светом с длиной волны 286,2 нм, прекращается при включении задерживающей разности потенциалов в 2,1 В. Найти работу выхода для вольфрама.

563. На фотоэлемент с катодом из лития падает свет с длиной волны 200 нм. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов, которую нужно приложить к фотоэлементу для прекращения фототока. Работа выхода для лития составляет 2,3 эВ.

564. Металлическая пластина освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны 0,25 мкм. Фототок прекращается при минимальной задерживаю-

щей разности потенциалов 96 В. Определить работу выхода для этого металла и красную границу фотоэффекта.

565. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны 0,1 мкм. Красная граница фотоэффекта для этого металла составляет 0,3 мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение фотоэлектрону кинетической энергии?

566. На цинковую пластину направлен монохроматический свет. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов 1,5 В. Определить длину волны света, падающего на пластину и красную границу фотоэффекта. Работа выхода для цинка составляет 4 эВ.

567. Определить красную границу фотоэффекта для калия и серебра, работы выхода для которых равны соответственно 2,2 эВ и 4,7 эВ. Пригодны ли эти металлы для использования их в фотоэлементе при освещении видимым светом?

568. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны 0,2 мкм. Красная граница фотоэффекта для этого металла составляет 0,3 мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение фотоэлектрону кинетической энергии?

569. На металлическую пластину падает монохроматический свет с частотой $7,3 \cdot 10^{14}$ Гц. Красная граница фотоэффекта для данного материала равна 560 нм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов и работу выхода.

570. Определить длину волны γ -излучения, падающего на платиновую пластину, если максимальная скорость фотоэлектронов составляет $2,9 \cdot 10^8$ м/с? Работа выхода для платины равна 5,29 эВ.

571. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырванных с поверхности калия γ -квантами, равна 1,53 МэВ. Определить частоту γ -квантов. Работа выхода для калия составляет 2,15 эВ.

572. Скорость фотоэлектронов при фотоэффекте составляет 0,98 скорости света. Найти длину волны падающего излучения. Считать, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов значительно больше работы выхода.

573. Найти максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла излучением $1,65$ пм. Считать, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов значительно больше работы выхода для этого металла.

574. Найти максимальную скорость фотоэлектрона, вырываемого с поверхности меди фотоном с энергией $1,27$ МэВ. Работа выхода для меди составляет $4,47$ эВ.

575. Фотон с энергией $1,5$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Определить угол рассеяния, если энергия рассеянного фотона составляет $0,9$ МэВ.

576. Наблюдаемое изменение длины волны фотона при рассеянии его на электронах в графите равно $1,72$ пм. Под каким углом произошло рассеяние?

577. Определить дополнительную энергию, которую надо сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от $0,2$ мкм до $0,1$ мкм.

578. Кинетическая энергия электрона равна $1,02$ МэВ. Во сколько раз изменится дебройлевская длина волны электрона, если его кинетическую энергию уменьшить в 2 раза.

579. Протон обладает кинетической энергией 1 кэВ. Найти дополнительную энергию, которую надо сообщить, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в 2 раза.

580. Кинетическая энергия электрона равна $1,02$ МэВ. Во сколько раз и как уменьшится дебройлевская длина волны электрона, если его кинетическую энергию увеличить в 2 раза?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Примеры решения задач

Пример 1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1) $U_1 = 51$ В; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Решение. Длина волны де Бройля для частицы зависит от величины ее импульса p :

$$\lambda_B = \frac{h}{p}, \quad (6.1.1)$$

где h – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия W^k . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия W^k частицы много меньше ее энергии покоя E_0) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия W^k сравнима с энергией покоя E_0 частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2mW^k}, \quad (6.1.2)$$

где m — масса частицы.

В релятивистском случае

$$p = \frac{\sqrt{2E_0 + W^k} W^k}{c} = \frac{\sqrt{2mc^2 + W^k} W^k}{c}, \quad (6.1.3)$$

где $E_0 = mc^2$ – энергия покоя частицы, c – скорость света в вакууме.

Формула (6.1.1) с учетом соотношений (6.1.2) и (6.1.3) запишется:
в нерелятивистском случае

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mW^k}}, \quad (6.1.4)$$

в релятивистском случае

$$\lambda_B = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 + W^k}} \quad (6.1.5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51$ В и $U_2 = 510$ кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (6.1.4) или (6.1.5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия W^k электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U , равна

$$W^k = |e|U, \quad (6.1.6)$$

где $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

В первом случае $W_1^k = |e|U_1 = 51$ эВ = $0,51 \cdot 10^{-4}$ МэВ, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = mc^2 = 0,51$ МэВ. Следовательно, в этом случае для нахождения длины волны де Бройля электрона можно воспользоваться формулой (6.1.4), которая с учетом (6.1.6) принимает вид:

$$\lambda_{B1} = \frac{h}{\sqrt{2m|e|U_1}}$$

Сделаем вычисления:

$$\lambda_{B1} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 51}} = 1,72 \cdot 10^{-10} \text{ (м)} = 172 \text{ (нм)}.$$

Во втором случае $W_2^k = |e|U_2 = 510$ кэВ = $0,51$ МэВ, т.е. равна энергии покоя электрона. В этом случае для определения длины волны де Бройля электрона необходимо применить формулу (6.1.5), которая с учетом (6.1.6) принимает вид:

$$\lambda_{B2} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 + |e|U_2}}$$

Подставим значения и произведем вычисления:

$$\lambda_{B2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 \cdot 10^4}} = 1,40 \text{ (нм)}.$$

Пример 2. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 13,61 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Соотношение неопределенностей для координаты и одноименной имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (6.2.1)$$

где Δx – неопределенность координаты x электрона; Δp_x – неопределенность проекции на Ox импульса электрона; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры ℓ , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = \frac{\ell}{2}.$$

Соотношение неопределенностей (6.2.1) можно записать в этом случае в виде

$$\frac{\ell}{2} \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

откуда

$$\ell \geq \hbar \cdot \Delta p_x. \quad (6.1.2)$$

Физически разумная неопределенность проекции импульса Δp_x во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p , т. е. $\Delta p_x \leq p$. Импульс p частицы связан с ее кинетической энергией W^k соотношением $p = \sqrt{2mW^k}$. Заменяем Δp_x значением $\sqrt{2mW^k}$ (такая замена не увеличит ℓ). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$\ell_{\min} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mW^k}}.$$

Произведем вычисления:

$$\ell_{\min} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 13,61 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Пример 3. Найти импульс и энергию фотона с длиной волны 440 нм.

Решение. Импульс p фотона связан с его длиной волны соотношением:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

$$p = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{440 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ (Н·с)}.$$

Энергия ε фотона равна

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

$$\varepsilon = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{440 \cdot 10^{-9}} = 4,52 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 2,8 \text{ (эВ)}.$$

Пример 4. Волновая функция $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi x}{\ell}$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной яме шириной ℓ . Вычислить вероятность нахождения частицы в средней трети ямы, т. е. в области $\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3}$.

Решение. Вероятность dP обнаружения частицы в промежутке между точками x и $x+dx$ пропорциональна этому интервалу dx и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние:

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx = \frac{2}{\ell} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) dx.$$

Знак модуля опущен, так как в данном случае функция $\Psi(x)$ не является комплексной.

Для вычисления вероятности P нахождения частицы в области $\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3}$

необходимо проинтегрировать последнее уравнение в пределах от $\frac{\ell}{3}$ до $\frac{2\ell}{3}$:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\ell/3}^{2\ell/3} \frac{2}{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{\ell} \int_{\ell/3}^{2\ell/3} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right] dx = \frac{1}{\ell} \left[\int_{\ell/3}^{2\ell/3} dx - \int_{\ell/3}^{2\ell/3} \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) dx \right] = \\
 &= \frac{1}{\ell} \left[\left(\frac{2\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\right) - \frac{\ell}{2\pi} \int_{\ell/3}^{2\ell/3} \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \cdot d\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \Big|_{\ell/3}^{2\ell/3} = \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,603.
 \end{aligned}$$

Т. о., вероятность нахождения частицы в области $\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3}$ составляет

$P = 60,9 \%$.

Пример 5. Какова максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если его характеристическая температура $\Theta = 94$ К.

Решение. По теории Дебая характеристическая температура Θ кристалла связана с максимальной энергией $h\nu_{\max}$ фононов выражением:

$$\Theta = \frac{h\nu_{\max}}{k},$$

где k – постоянная Больцмана.

Тогда максимальная энергия фонона равна

$$h\nu_{\max} = \Theta \cdot k.$$

Произведем вычисления:

$$h\nu_{\max} = 94 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} = 1,297 \cdot 10^{-21} \text{ (Дж)} = 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ (эВ)}.$$

Пример 6. Определить количество теплоты Q , необходимое для нагревания кристалла NaCl массой $m = 20$ г от температуры $T_1 = 2$ К до температуры $T_2 = 4$ К. Характеристическую температуру Дебая Θ_D для NaCl принять равной 320 К и условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

Решение. Количество теплоты Q , подводимое для нагревания тела от температуры T_1 до T_2 , может быть вычислено по формуле

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT, \quad (6.6.1)$$

где C_T – теплоемкость тела.

Теплоемкость C_T тела связана с молярной теплоемкостью C_m вещества этого тела соотношением

$$C_T = \frac{m C_m}{M} \quad (6.6.2)$$

где m – масса тела; M – молярная масса вещества тела. Молярная масса NaCl равна $M = (23 + 35,5) \cdot 10^{-3}$ кг/моль = $58,5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставив выражение (6.6.2) в формулу (6.6.1), получим

$$Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \quad (6.6.3)$$

В общем случае теплоемкость C_m есть сложная функция температуры, поэтому выносить ее за знак интеграла нельзя. Однако если выполнено условие $T \ll \Theta_D$, то нахождение Q облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, согласно которому теплоемкость пропорциональна кубу термодинамической температуры T :

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3, \quad (6.6.4)$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Подставляя выражение молярной теплоемкости C_m (6.6.4) в равенство (6.6.3), получим

$$Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT.$$

Выполним интегрирование:

$$Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{T_2^4}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

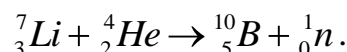
Переписав полученную формулу в виде

$$Q = \frac{3\pi^4 m R T_2^1 - T_1^4}{5M \Theta_D^3},$$

произведем вычисления:

$$Q = \frac{3 \cdot 3,14^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 4^4 - 2^4}{5 \cdot 58,5 \cdot 10^{-3} \cdot 320^2} = 46,7 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)} = 46,7 \text{ (мДж)}.$$

Пример 7. Вычислить энергию ядерной реакции



Освобождается или поглощается энергия?

Решение. Энергию Q разность суммарных энергий покоя ядер и частиц до и после реакции $E_{01} - E_{02}$: ядерной реакции вычислим как

$$Q = E_{01} - E_{02},$$

где E_{01} – сумма энергий покоя исходных ядер (${}^7_3\text{Li}$ и ${}^4_2\text{He}$), E_{02} – сумма энергий покоя продуктов реакции (${}^{10}_5\text{B}$ и нейтрона).

Взяв из таблиц массы ${}^7_3\text{Li}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^{10}_5\text{B}$ и нейтрона в атомных единицах массы и учитывая, что энергия покоя, соответствующая 1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, равна 931 МэВ, получим

$$\begin{aligned} Q &= 7,01601 + 4,0026 - 10,01294 - 1,00866 \cdot 931,5 \text{ МэВ} = \\ &= -0,00299 \cdot 931,5 \text{ МэВ} = -2,79 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Т. к. $Q < 0$, то в ходе данной ядерной реакции энергия поглощается.

Пример 8. Определить число ядер, распавшихся за 2 суток, в радиоактивном изотопе йода ${}^{131}_{53}\text{I}$ массой 1 мг. Период полураспада изотопа $T = 8$ сут.

Решение. Количество ΔN распавшихся ядер радиоактивного изотопа к моменту времени t можно найти как разность между исходным числом N_0 ядер и количеством N оставшихся ядер к этому моменту времени. Тогда согласно основному закону радиоактивного распада искомое количество ΔN равно

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}), \quad (6.8.1)$$

где λ – постоянная радиоактивного распада, связанная с периодом полураспада T данного изотопа как

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (6.8.2)$$

Исходное число N_0 ядер в изотопе йода ${}^{131}_{53}\text{I}$ массой m равно

$$N_0 = \frac{m N_A}{M}, \quad (6.8.3)$$

где N_A – постоянная Авогадро, $M = 131 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса йода.

С учетом равенств (6.8.2) и (6.8.3) выражение (6.8.1) для количества ΔN распавшихся ядер радиоактивного изотопа йода ${}^{131}_{53}\text{I}$ к моменту времени t принимает вид:

$$\Delta N = \frac{m N_A}{M} \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Проведем вычисления:

$$\Delta N = \frac{10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{131 \cdot 10^{-3}} \left(1 - 2^{-\frac{2}{8}} \right) = 7,31 \cdot 10^{23}.$$

Пример 9. 1 г изотопа радия ${}^{88}_{226}\text{Ra}$ за секунду излучает $3,61 \cdot 10^{10}$ α -частиц. Определить постоянную радиоактивного распада и период полураспада этого изотопа.

Решение. Найдем число N ядер изотопа радия ${}^{88}_{226}\text{Ra}$, содержащихся в образце массой $m = 1$ г:

$$N = \frac{m N_A}{M} = \frac{10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{226 \cdot 10^{-3}} = 2,66 \cdot 10^{21}, \quad (6.9.1)$$

где N_A – постоянная Авогадро, $M = 226 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса радия.

Т. к. найденное число $N = 2,66 \cdot 10^{21}$ ядер радия много больше числа $3,61 \cdot 10^{10}$ ядер, распавшихся за секунду (числа излучаемых за секунду α -частиц), то можно считать, что в течение рассматриваемого промежутка времени число N радиоактивных ядер остается практически неизменным. Поэтому для нахождения постоянной распада λ воспользуемся законом радиоактивного распада в дифференциальной форме:

$$-dN = \lambda N dt,$$

откуда

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N,$$

где $\left| \frac{dN}{dt} \right| = 3,61 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Тогда

$$\lambda = \left| \frac{dN}{dt} \right| \cdot \frac{1}{N} = \frac{3,61 \cdot 10^{10}}{2,66 \cdot 10^{21}} = 1,35 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}.$$

Период полураспада T радиоактивного вещества связан с постоянной распада λ соотношением:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Подставим числовые значения и вычислим:

$$T = \frac{\ln 2}{1,36 \cdot 10^{-11}} = 5,1 \cdot 10^{10} = 1620 \text{ лет.}$$

Пример 10. Определить начальную активность A_0 радиоактивного препарата магния ${}_{12}^{27}\text{Mg}$ массой $m = 0,2$ мкг, а также его активность A_1 в момент времени $t_1 = 6$ ч. Период полураспада магния равен 10 мин.

Решение. Активность A изотопа является характеристикой интенсивности излучения большой совокупности радиоактивных ядер в целом и равна среднему числу распадов в единицу времени:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \left| \frac{dN}{dt} \right|. \quad (6.10.2)$$

Знак « \rightarrow » показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Зависимость $N(t)$ числа нераспавшихся (оставшихся) от времени t определяется законом радиоактивного распада:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.10.2)$$

где N_0 – число радиоактивных ядер в начальный момент времени, λ – постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (6.10.2) по времени:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.10.3)$$

Подставив выражение (6.10.3) в (6.10.1), получим зависимость $A(t)$ активности препарата от времени t :

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.10.4)$$

Постоянная распада λ связана с периодом полураспада T радиоактивного вещества соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (6.10.5)$$

Исходное число N_0 ядер радиоактивного препарата магния ${}^{27}_{12}\text{Mg}$ массой m равно

$$N_0 = \frac{m N_A}{M}, \quad (6.10.6)$$

где N_A – постоянная Авогадро, $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса магния.

С учетом выражений (6.10.5) и (6.10.6) зависимость (6.10.4) принимает вид:

$$A(t) = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m N_A}{M} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m N_A}{M} \cdot 2^{-\frac{t}{T}}. \quad (6.10.6)$$

Активность A_0 препарата в начальный момент времени получим при $t_0 = 0$:

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m N_A}{M},$$

а активность A_1 магния в момент времени через t_1 равна

$$A_1 = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{mN_A}{M} \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $m = 0,2 \text{ мкг} = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ г} = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$,

$T = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$, $t_1 = 6 \text{ ч} = 6 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ с}$:

$$A_0 = \frac{\ln 2}{600} \cdot \frac{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3}} = 5,15 \cdot 10^{12} \text{ (Бк)};$$

$$A_1 = \frac{\ln 2}{600} \cdot \frac{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot 2^{-\frac{6 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{600}} = 74,95 \text{ (Бк)}.$$

**Таблица распределения задач по вариантам
к контрольной работе № 6**

Вариант	Номера задач							
0	601	611	621	631	641	651	661	671
1	602	612	622	632	642	652	662	672
2	603	613	623	633	643	653	663	673
3	604	614	624	634	644	654	664	674
4	605	615	625	635	645	655	665	675
5	606	616	626	636	646	656	666	676
6	607	617	627	637	647	657	667	677
7	608	618	628	638	648	658	668	678
8	609	619	629	639	649	659	669	679
9	610	620	630	640	650	660	670	680

601. Определить энергию и импульс фотона с длиной волны видимого излучения $\lambda_1 = 600$ нм и рентгеновского излучения $\lambda_2 = 0,2$ Å.

602. При изучении космического излучения были обнаружены фотоны с длиной волны $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_2 = 200$ Å. Найти энергию и импульс этих фотонов.

603. Импульс фотона составляет $9 \cdot 10^{-28}$ Н·с. Найти длину волны и энергию этого фотона. Как изменится длина волны и энергия при уменьшении импульса в 3 раза?

604. Энергия фотона равна 3,8 эВ. Определить импульс и длину волны этого фотона.

605. В электроннолучевой трубке импульс электрона составляет 10^{-24} Н·с. Определить длину волны и энергию фотона, который имеет импульс равный импульсу электрона.

606. Длина волны фотона $\lambda_2 = 560$ нм. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с этой длиной волны?

607. Найти импульс и энергию фотона для красных лучей света $\lambda_1 = 700$ нм, рентгеновских лучей $\lambda_2 = 0,3 \text{ \AA}$ и гамма лучей $\lambda_3 = 10^{-2} \text{ \AA}$.

608. Энергия фотона равна 3,3 эВ. Определить импульс и длину волны этого фотона.

609. Энергия фотона равна 2,8 эВ. Определить импульс и длину волны этого фотона.

610. Определить скорость, с которой должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 480$ нм.

611. Определить энергию, которую необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от $\lambda_1 = 0,24$ мкм до $\lambda_2 = 0,18$ мкм.

612. Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму в виде узкой прямоугольной щели, ширина которой $d = 6$ мкм. Определить скорость этих электронов, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии 4 см, ширина центрального дифракционного максимума составит 10 мкм.

613. Из рентгеновской трубки поток моноэнергетических электронов направлен нормально на диафрагму с прямоугольной щелью шириной 0,9 нм. Найти ускоряющее напряжение трубки, если известно, что на экране, отстоящем на щели на расстоянии 5 см, образуется центральный максимум шириной 15 мкм.

614. Протон обладает кинетической энергией 1,5 кэВ. Определить дополнительную энергию, которую необходимо сообщить протону для того, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в два раза.

615. Движущемуся электрону соответствует длина волны де Бройля $\lambda = 12$ нм. Какую дополнительную энергию нужно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась на $\Delta\lambda = 4$ нм.

616. Определить длины волн де Бройля для электрона, протона, α -частицы и ядра урана ${}_{92}^{235}\text{U}$, если известно, что их кинетические энергии одинаковы и равны 200 эВ.

617. Электрон обладает кинетической энергией 1,53 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если электрон получит дополнительную энергию 0,51 МэВ.

618. Кинетическая энергия движущегося электрона составляет 1,02 МэВ. Если кинетическая энергия его возрастает в полтора раза, как и во сколько раз изменится дебройлевская длина волны электрона?

619. Электрон без начальной скорости прошел ускоряющую разность потенциалов 51 В, затем при получении некоторой дополнительной энергии его дебройлевская длина волны уменьшилась на 5 пм. Найти величину этой дополнительной энергии для электрона.

620. Пучок электронов, имеющих скорость $4 \cdot 10^6$ м/с, направлен на узкую щель. В результате дифракции на экране, отстоящем на расстоянии 10 см от щели, возникает чередование максимумов и минимумов. Расстояние между двумя максимумами первого порядка составило 4,5 мкм. Найти ширину щели.

621. В атоме водорода определить радиусы трех первых боровских орбит и скорости электрона на этих орбитах.

622. Определить, исходя из постулатов Бора, радиусы орбит, скорость электрона на орбите, период вращения электрона по орбите. Рассчитать значения этих величин для случая $n = 1$.

623. Найти потенциальную, кинетическую и полную энергию электрона, находящегося в основном состоянии в атоме водорода.

624. Для атома водорода определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения.

625. Найти энергию ионизации и ионизационный потенциал для ионов гелия и лития.

626. Для водородоподобного иона гелия He^+ определить радиус первой боровской орбиты, скорость движения электрона на ней и первый потенциал возбуждения.

627. Для иона гелия He^+ вычислить радиус орбиты, скорость электрона, период вращения на второй боровской орбите.

628. Вычислить энергии фотонов, испускаемых при переходе электрона в атоме водорода с пятого энергетического уровня на первый, второй и третий.

629. Фотон, поглощенный атомом водорода, находящегося в основном состоянии, выбивает электрон с кинетической энергией 8 эВ. Определить энергию (эВ) этого фотона и скорость электрона.

630. Фотон, энергия которого составляет 17,5 эВ, выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. Найти скорость электрона вдали от атома.

631. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет 3,4 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить линейные размеры атома.

632. Оценить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $1,5 \cdot 10^6$ м/с, если точность определения скорости 10 %. Сравнить эту неточность с размерами атома водорода ($d_H = 10,6$ нм).

633. Оценить наименьшие ошибки Δp в определении импульса электрона и протона, если координаты центра масс этих частиц могут быть установлены с неопределенностью $\Delta x = 5$ мкм.

634. Пучок электронов с энергией 12 эВ падает на щель шириной a . Считая неточность координаты $\Delta x \cong a$, оценить неточность импульса при $a_1 = 10^{-8}$ м, $a_2 = 10^{-10}$ м.

635. α -частица находится в «потенциальной яме» с энергией 8 МэВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить размеры «ямы».

636. Принять минимальную энергию нуклонов в ядре атома $W \cong 10$ МэВ. Оценить размеры ядра.

637. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии 10 нс. При переходе излучается длина волны $\lambda = 400$ нм. Оценить относительную ширину спектральной линии $\Delta\lambda/\lambda$.

638. При переходе атома в нормальное состояние излучается фотон с длиной волны 600 нм. Продолжительность излучения 10 нс. Оценить ширину спектральной линии.

639. Время жизни возбужденного атома 1 нс, длина волны излучения 5 нм. С какой наибольшей точностью ΔE может быть установлена энергия измерения.

640. Считая, что электрон можно локализовать в области 10 нм, найти неопределенность его импульса.

641. Частица находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике в основном состоянии. Определить вероятность обнаружения частицы в первой четверти ящика.

642. Электрон в бесконечно глубокой потенциальной яме находится в состоянии $n = 2$. Найти вероятность нахождения электрона в первой трети ямы.

643. Частица находится в бесконечно глубоком, одномерном потенциальном ящике шириной L в состоянии $n = 3$. Найти вероятность нахождения частицы в интервале от $L/4$ до $L/2$.

644. В прямоугольной потенциальной яме шириной L с непроницаемыми стенками находится электрон в состоянии $n = 2$. Определить вероятность нахождения его области от $L/3$ до $L/2$.

645. В бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике шириной L находится частица в состоянии $n = 4$. Найти вероятность нахождения ее в интервале от $L/5$ до $L/3$.

646. Электрон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной L в состоянии $n = 3$. Определить вероятность обнаружения его в области от $L/6$ до $L/3$.

647. Частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной L . В каких точках ящика плотности вероятности нахождения частицы одинаковы для $n = 2$ и $n = 3$?

648. В прямоугольной потенциальной яме шириной L с непроницаемыми стенками находится электрон. В каких точках ямы плотности вероятности нахождения электрона одинаковы для $n = 2$ и $n = 4$?

649. Электрон находится в бесконечно глубоком, одномерном потенциальном ящике шириной L . В каких точках ящика плотности вероятности нахождения одинаковы для $n = 1$ и $n = 3$?

650. Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид $\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$, где A – положительная постоянная, a – первый боровский радиус. Найти для этого состояния наиболее вероятное расстояние электрона от ядра.

651. При $T = 15$ К молярная теплоемкость железа $C_m = 0,25$ Дж/(К·моль). Найти характеристическую температуру Θ Дебая для железа, считая условие $T \ll \Theta$ выполненным.

652. Кристалл калия массой $m = 0,1$ кг нагревают от температуры $T_1 = 4$ К на один градус. Определить теплоту, необходимую для нагревания. Принять характеристическую температуру Θ Дебая для калия, равной 100 К и условие $T \ll \Theta$ выполненным.

653. Медь массой $m = 200$ г нагревают от температуры $T_1 = 12$ К до $T_2 = 18$ К. Определить теплоту, необходимую для нагревания меди, считая характеристическую температуру Θ Дебая для меди, равной 300 К, условие $T \ll \Theta$ выполненным.

654. Вычислить по теории Дебая теплоемкость цинка массой 300 г при температуре $T = 15$ К. Характеристическая температура Θ Дебая для цинка 320 К и условие $T \ll \Theta$ выполнено.

655. По теории Дебая характеристическая температура алмаза $\Theta = 2000$ К. Найти его удельную теплоемкость при температуре $T = 50$ К, считая условие $T \ll \Theta$ выполненным.

656. При температуре $T = 20$ К молярная теплоемкость серебра составила 1,7 Дж/(К·моль). Определить по значению теплоемкости характеристическую температуру Дебая, считая, что условие $T \ll \Theta$ выполнено.

657. Молярная теплоемкость железа составляет $0,28 \text{ Дж/к} \cdot \text{ моль}$ при температуре 29 К . определить характеристическую температуру Θ Дебая для железа, считая условие $T \ll \Theta$ выполненным.

658. Определить по теории Дебая теплоемкость серебра массой 400 г при температуре 8 К . Характеристическая температура серебра $\Theta = 170 \text{ К}$ и условие $T \ll \Theta$ выполнено.

659. Найти удельную теплоемкость кристалла золота при температуре $T = 6 \text{ К}$. Характеристическая температура Дебая золота $\Theta = 180 \text{ К}$.

660. Образец цинка массой 50 г нагревается от температуры 4 К на 2 градуса. Определить теплоту для нагревания цинка, приняв его характеристическую температуру по Дебаю $\Theta = 320 \text{ К}$.

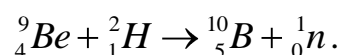
661. При делении ядра урана с массовым числом $A = 235$ под действием нейтрона образовались осколки с массовыми числами $A_1 = 90$ и $A_2 = 143$. Найти число нейтронов, вылетевших из ядра в этом акте деления. Определить энергию и скорость осколков, если они разлетаются в противоположные стороны, а их суммарная кинетическая энергия равна 160 МэВ .

662. При делении ядра урана с массовым числом $A = 235$ освобождается энергия 200 МэВ . Найти энергию, выделяющуюся при делении ядер урана массой $m = 1 \text{ кг}$. Какую массу угля нужно сжечь, чтобы получить такую энергию? Удельная теплота сгорания угля $29,1 \text{ МДж/кг}$.

663. У атомного ледокола мощность двигателя составляет 15 МВт , а его КПД равен 30% . Какова расходуемая масса расходуемого за месяц урана ${}_{92}^{235}\text{U}$. Считать, что при делении одного ядра урана выделяется энергия 200 МэВ .

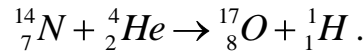
664. Найти минимальную энергию, необходимую для разделения ядра неона ${}_{10}^{20}\text{Ne}$ на две α -частицы и ядро углерода ${}_{6}^{12}\text{C}$. Энергия связи на один нуклон в ядре неона составляет $8,03 \text{ МэВ}$, в ядре углерода – $7,07 \text{ МэВ}$, а в ядре гелия – $7,68 \text{ МэВ}$.

665. Вычислить энергию ядерной реакции



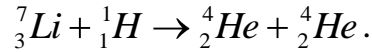
Освобождается или поглощается энергия?

666. Вычислить энергию ядерной реакции



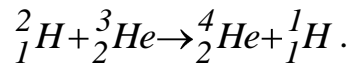
Освобождается или поглощается энергия?

667. Вычислить энергию ядерной реакции

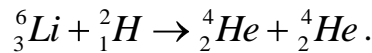


Освобождается или поглощается энергия?

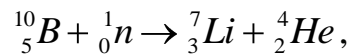
668. Найти энергию, выделяющуюся при термоядерной реакции



669. Найти энергию, выделяющуюся при термоядерной реакции



670. Определить скорости продуктов реакции



протекающей при бомбардировке тепловыми нейтронами покоящихся ядер бора.

671. Активность радиоактивного изотопа за 12 суток уменьшилась на 25 % по сравнению с первоначальной. Найти период полураспада этого изотопа.

672. Период полураспада изотопа актиния составляет 10 суток. Определить, какая доля этого изотопа распадается в течение 5 суток.

673. Счетчик α -частиц при измерении регистрировал $N_1 = 1400$ частиц в минуту, а через время $\tau = 4$ часа регистрировал $N_2 = 400$ частиц в минуту. Найти период полураспада этого изотопа.

674. Период полураспада изотопа фосфора составляет 14,3 суток. Во сколько раз уменьшится активность этого образца за 18 суток?

675. Определить число ядер, распадающихся в изотопе фосфора ${}^{32}_{15}\text{P}$ массой 2 мг в течение: а) 2 минут; б) 2 суток. Период полураспада изотопа фосфора составляет 14,3 суток.

676. Изотоп йода ${}^{131}_{53}\text{I}$ имеет период полураспада 8 суток. Определить массу этого изотопа, если его активность составляет 28 ГБк.

677. Во сколько раз уменьшится активность изотопа радона ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ за 38 часов, если период полураспада радона 3,8 суток.

678. Определить период полураспада радиоактивного элемента, если его активность уменьшилась на 40 % по сравнению с первоначальной за двое суток.

679. На сколько процентов уменьшится активность изотопа магния ${}^{27}_{12}\text{Mg}$ за 6 мин, если период полураспада этого изотопа равен 10 мин.

680. Определить число ядер, распавшихся за 10 мин, в радиоактивном изотопе йода ${}^{131}_{53}\text{I}$ массой 5 мг. Период полураспада этого изотопа равен 196 часов.

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$ e $	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Масса электрона	m_e	$9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² К ⁴)
Постоянная Вина	b	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Атомная единица массы	а. е. м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг

Относительная атомная масса некоторых изотопов и элементарных частиц

Изотоп	Относительная атомная масса, а.е.м.	Изотоп	Относительная атомная масса, а.е.м.
1_1p (протон)	1,00728	${}^{10}_5B$ (бор)	10,01294
1_0n (нейтрон)	1,00866	${}^{11}_5B$ (бор)	11,00931
1_1H (протий)	1,00783	${}^{12}_6C$ (углерод)	12,00000
2_1H (дейтерий)	2,01410	${}^{14}_6C$ (углерод)	14,00324
3_1H (тритий)	3,01605	${}^{14}_7N$ (азот)	14,00307
3_2He (гелий)	3,01602	${}^{15}_7N$ (азот)	15,00011
4_2He (гелий)	4,00260	${}^{16}_8O$ (кислород)	15,99491
6_3Li (литий)	6,01513	${}^{17}_8O$ (кислород)	16,99913
7_3Li (литий)	7,01601	${}^{27}_{13}Al$ (алюминий)	26,98146
8_4Be (бериллий)	8,00531	${}^{30}_{13}Al$ (алюминий)	29,99817

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М. Высш. шк., 1985.
2. Детлаф А.А., Явровский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1973–1979. Т.1, 2.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1972–1974. Т. 1, 2.
4. Савельев И.В. Курс физики. – М.: Наука, 1989. Т.1,2.
5. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – Высш. шк., 1981.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – Наука, 1988.
7. Рубан И.И., Жаврид С.М., Великевич Н.Е., Лагутина Ж. П. Задания к практическим занятиям. – Мн. Высш. шк., 1989.
8. Сергеева – Некрасова М.С., Морозов В.А., Смирнова Г.Ф. Фундаментальные законы механики и электромагнетизма в решении задач. – М., БГУИР, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание программы курса.....	3
1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА.....	4
1.1. Интерференционная картина.....	5
2. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА.....	6
2.1. Принцип Гюйгенса-Френеля.....	7
2.2. Дифракция Френеля.....	7
2.3. Дифракция Фраунгофера от щели.....	9
2.4. Дифракционная решетка.....	11
2.5. Параметры решетки как спектрального прибора.....	13
2.6. Дифракция на пространственных структурах.....	14
3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА.....	14
3.1 Поляризованный и естественный свет.....	15
3.2. Типы поляризации.....	15
3.3. Степень поляризации.....	16
3.4. Способы получения поляризованного света.....	17
3.5. Закон Малюса.....	18
3.6. Интерференция поляризованного света.....	19
4. РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.....	20
4.1. Классическая теория черного излучения.....	23
5. ФОТОЭФФЕКТ.....	28
6. ЭФФЕКТ КОМПТОНА.....	30
7. ВНУТРЕННИЙ ФОТОЭФФЕКТ.....	32
8. ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА И КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ БОРА.....	33
9. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	
9.1. Принцип неопределенностей Гейзенберга.....	34
9.2. Волновая функция, ее физический смысл.....	35
9.3. Уравнение Шредингера. Стационарные состояния.....	36
9.4. Частица в потенциальной яме. Квантование энергии.....	39
10. РАДИОАКТИВНОСТЬ.....	41
11. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.....	43
12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ.....	45
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5 Примеры решения задач.....	46
Таблица вариантов задач к контрольной работе № 5.....	57
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 Примеры решения задач.....	65
Таблица вариантов задач к контрольной работе № 6.....	73
Основные физические постоянные.....	79
Литература.....	81

Учебное издание

Авторы:

Аксенов Валерий Васильевич,
Березин Александр Васильевич,
Морозов Владимир Алексеевич,
Савилова Юлия Ивановна

**ОПТИКА,
АТОМНАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА**

**Учебно-методический комплекс
по курсу «Физика»**

**ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Редактор Н.В. Гриневич

Подписано в печать 23.03.2005	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс»	Печать ризографическая	Усл. печ. л. 5.0 .
Уч-изд.л. 4,3 .	Тираж 450 экз.	Заказ 7

Издатель и полиграфическое исполнение:

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.

Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.

220013, Минск, П. Бровка, 6.