

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебно-методический комплекс
по курсу ФИЗИКА

для студентов всех специальностей БГУИР
заочной формы обучения

Минск 2007

УДК 537 (075.8)
ББК 22.33 я73
Э 45

Рецензент

доц. кафедры физики БГУИР, канд. физ.-мат. наук Г. Ф. Смирнова

Авторы:

В. В. Аксенов, А. В. Березин, В. Ф. Гременок, А. А. Григорьев, В. А. Морозов

Электромагнетизм: учебно-метод. комплекс по курсу «Физика»
Э 45 для студ. всех спец. БГУИР заоч. формы обуч. /В. В. Аксенов [и др.]. –
Минск : БГУИР, 2007. – 82 с.
ISBN 978-985-488-135-5

Представленный учебно-методический комплекс содержит разделы: «Электростатика», «Постоянный электрический ток» и «Магнетизм». Учтены особенности рабочей программы курса, даны основные формулы, примеры решения задач по каждой теме и контрольные задания.

УДК 537 (075.8)
ББК 22.33 я73

ISBN 978-985-488-135-5

© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2007

Содержание

Содержание рабочей программы курса.....	4
1. Электростатика	6
2. Постоянный электрический ток.....	14
Контрольная работа №3. Примеры решения задач.....	19
Таблица вариантов задач к контрольной работе №3	35
3. Магнетизм	47
Контрольная работа №4. Примеры решения задач.....	55
Таблица вариантов задач к контрольной работе №4	69
Литература	81

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ КУРСА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

1. Электростатическое поле в вакууме. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Напряженность электрического поля точечного заряда. Расчет электрического поля. Принцип суперпозиции. Поток вектора E . Теорема Гаусса и ее применение к расчету поля.

Теорема о циркуляции вектора E . Потенциал. Потенциал поля точечного заряда в системе зарядов. Связь потенциала и напряженности поля. Электрический момент диполя. Момент сил, действующий на диполь. Энергия диполя в поле. Сила, действующая на диполь.

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике. Емкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы.

2. Электрическое поле в диэлектрике. Связанные и сторонние заряды. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость.

Вектор D (электрическое смещение). Диэлектрическая проницаемость. Теорема Гаусса для вектора D . Поле в диэлектрике. Условия на границе двух диэлектриков.

Электрическая энергия системы зарядов. Энергия уединенного проводника и конденсатора.

3. Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока. Уравнение непрерывности. Закон Ома для однородного проводника. Сопротивление проводника. Закон Ома в локальной форме. Сторонние силы. Обобщенный закон Ома в локальной форме. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Разветвление цепи. Правила Кирхгофа. Закон Джоуля–Ленца (в интегральной и локальной формах). Мощность тока.

4. Магнитное поле в вакууме. Сила Лоренца. Магнитная индукция B . Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции полей. Закон Био–Саварра и его применение к расчету магнитного поля прямого и кругового токов.

Теорема Гаусса для вектора B . Теорема о циркуляции вектора B и ее применение к расчету полей. Поле соленоида. Сила Ампера. Магнитный момент контура с током. Сила, действующая на контур с током. Работа при перемещении контура с током.

5. Магнитное поле в веществе. Намагниченность. Токи намагничивания. Циркуляция намагниченности. Вектор H (напряженность магнитного поля). Теорема о циркуляции вектора H . Условия на границе двух магнетиков. Кривая намагничивания. Гистерезис. Остаточная намагниченность.

6. Явления электромагнитной индукции. Опыты Фарадея. Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции. Полный магнитный поток (потокосцепление). Токи Фуко. Явление самоиндукции. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Индуктивность соленоида. Ток при замыкании и размыкании цепи. Взаимная индуктивность.

Энергия контура с током. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.

7. Электромагнитные колебания. Квазистационарные токи. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления. Свободные затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания. Добротность.

Вынужденные электрические колебания. Векторная диаграмма. Резонансные кривые для напряжения и силы тока.

8. Уравнения Максвелла. Вихревое электрическое поле. Бетатрон. Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла. Относительность электрического и магнитного полей.

9. Электромагнитные волны. Волновое уравнение для электромагнитной волны: скорость, поперечность, связь между E и H . Опыты Герца. Опыт Лебедева. Плотность энергии электромагнитной волны. Вектор Пойтинга. Излучение диполя. Эффект Доплера.

Студент обязан выполнить две контрольные работы, содержащие по восемь задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра его зачетки. Номера задач определяются по таблицам вариантов.

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика рассматривает электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами. Такие поля называются *электростатическими*. Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется *пробный заряд* – такой заряд, который не искажает исследуемое поле. *Силовой* характеристикой электростатического поля является *напряжённость* – векторная физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный (пробный) заряд, помещённый в исследуемую точку поля:

$$\vec{E} = \vec{F}/q.$$

Энергетической характеристикой электростатического поля является *потенциал* – скалярная физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещённого в исследуемую точку поля:

$$j = W/q.$$

Электростатическое поле изображают с помощью *силовых линий* (линий напряженности \vec{E}) и с помощью *эквипотенциальных поверхностей* (поверхностей равного потенциала j).

При помещении диэлектрика во внешнее электростатическое поле он поляризуется, т.е. приобретает *дипольный момент*. Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются *поляризованностью* \vec{P} – векторной физической величиной, определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i / V.$$

Вектор напряженности \vec{E} , переходя через границу двух диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчете электростатических полей. Поэтому вводят дополнительную (помимо \vec{E}) характеристику – вектор *электрического смещения* \vec{D} .

Графически поле в диэлектрике изображается как с помощью линий вектора напряженности \vec{E} , так и с помощью линий вектора электрического смещения \vec{D} . Отличие заключается только в том, что линии вектора E могут начинаться и заканчиваться на любых (свободных и связанных) зарядах, а линии вектора \vec{D} – лишь на свободных (сторонних) зарядах.

Помещение проводника во внешнее электростатическое поле вызывает искажение последнего: линии поля проводника становятся перпендикулярными его поверхности. Величина напряженности определяется поверхностной плотностью зарядов.

Поверхностные заряды на проводнике перераспределяются до тех пор, пока поле индуцированных зарядов не скомпенсирует внешнее поле внутри проводника. Поэтому электростатическое поле внутри проводника отсутствует, а весь объем проводника является эквипотенциальным.

Взаимодействие двух точечных неподвижных зарядов описывается **законом Кулона**. Величина кулоновской силы определяется формулой

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{|q_1q_2|}{r^2},$$

где F – сила взаимодействия между точечными зарядами q_1 и q_2 ; r – расстояние между ними; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 – электрическая постоянная.

Сила F является **силой притяжения**, если взаимодействующие заряды имеют разные знаки, и **силой отталкивания**, если они – одноименные.

Для решения задач удобно использовать **объемную ρ** , **поверхностную σ** и **линейную τ плотности заряда**:

$$\rho = \frac{dq}{dV}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \tau = \frac{dq}{dl}.$$

Потоком вектора напряжённости электростатического поля через произвольную поверхность S называется интеграл вида

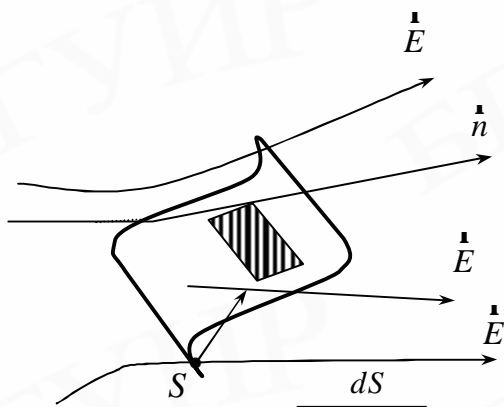


Рис. 1

$$\Phi_E = \int_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_S E_n dS,$$

где $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$; dS – элементарная площадка; \mathbf{n} – нормаль к ней; E_n – проекция вектора напряженности на направление нормали (рис. 1). Напряженность электростатического поля, образованного несколькими зарядами (или электрическим зарядом,

распределенным по некоторому телу), рассчитывается с помощью **принципа суперпозиции**:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

– для дискретного распределения зарядов, где \mathbf{E}_i – напряжённость

поля, создаваемого i – зарядом в данной точке поля;

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$$

– для непрерывного распределения заряда (интегрирование ведется по

объему заряженного тела), где $d\mathbf{E}$ – напряженность поля, создаваемого элементарным зарядом dq в данной точке пространства.

В том случае, когда известна конфигурация поля заряженного тела, при решении задач целесообразно использовать **теорему Гаусса** для электростатического поля в вакууме:

поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 :

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

– для непрерывного распределения заряда по объёму V ;

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

– для дискретного распределения зарядов q_i внутри замкнутой поверхности S .

Напряженность поля, создаваемого **равномерно заряженной** (с поверхностной плотностью заряда σ) **бесконечной плоскостью**, определяется как

$$E = s / 2\epsilon_0 e ,$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряженная плоскость. В этом случае электростатическое поле является *однородным*, т.к. его напряженность не зависит от расстояния до плоскости.

Напряженность поля, создаваемого *двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями* с одинаковой по модулю поверхностной плотностью зарядов, выглядит следующим образом:

$$E = s / \epsilon_0 e .$$

Такой вид поля реализуется в плоском конденсаторе. Сила, действующая на заряд, помещенный в любую точку данного поля – одинакова, т.е. поле, как и в предыдущем случае, является однородным.

Напряженность поля, создаваемого *равномерно заряженной сферической поверхностью* в окружающем ее пространстве, рассчитывается так же, как напряженность поля точечного заряда; внутри сферы электростатическое поле отсутствует:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} & \text{при } r > R, \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$$

где R – радиус сферы, q – заряд на ее поверхности; r – расстояние от центра сферы до исследуемой точки поля.

Напряженность поля, создаваемого *равномерно заряженным* (с линейной плотностью заряда τ) *бесконечным цилиндром*:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{\tau}{r} & \text{при } r \geq R, \\ 0 & \text{при } r < R. \end{cases}$$

Электростатическое поле цилиндра обладает *аксиальной симметрией*. Силовые линии поля перпендикулярны боковой поверхности цилиндра.

Электростатическое поле является *потенциальным*; работа кулоновских сил по перемещению заряда не зависит от формы траектории последнего, а определяется только положением начальной и конечной точек. Если перемещать заряд по замкнутой траектории, то работа полем не совершается.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль (замкнутого) контура L также равна нулю:

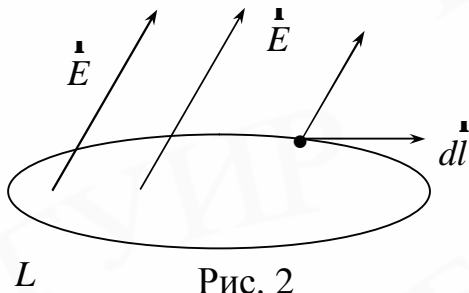


Рис. 2

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L E_l dl = 0,$$

где $d\vec{l}$ – элемент контура L , по направлению совпадающий с направлением обхода контура; E_l – проекция вектора \vec{E} на направление $d\vec{l}$ (рис. 2).

Напряженность и потенциал – две характеристики электростатического поля. Поскольку обе они относятся к одному и тому же физическому объекту – электростатическому полю, – то между ними существует определенная связь.

Связь между потенциалом электростатического поля и его напряженностью:

$$\vec{E} = -\text{grad}j, \quad \text{где} \quad \text{grad}j = \frac{dj}{dx} \vec{i} + \frac{dj}{dy} \vec{j} + \frac{dj}{dz} \vec{k}.$$

Знак «минус» показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

Для описания электростатического поля в диэлектриках пользуются понятием **электрического диполя** – системы двух равных по модулю разноименных электрических зарядов, расположенных на расстоянии l (рис. 3).

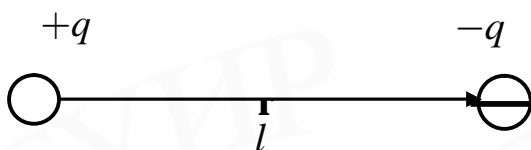


Рис. 3

Электрический момент диполя

(дипольный момент): $\vec{p} = |q| \vec{l}$, где q – электрический заряд; l – плечо диполя.

В электростатическом поле диэлектрик поляризуется. Количественной характеристикой степени поляризации является **поляризованность**. Вектор поляризованности определен выше.

Между **поляризованностью** вещества и **напряженностью** электростатического поля в изотропном диэлектрике существует *связь*, выражаемая формулой

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

где ϵ – диэлектрическая *восприимчивость* вещества, определяемая как

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r.$$

Диэлектрическая *проницаемость* ϵ_r показывает, во сколько раз диэлектрик ослабляет внешнее поле. Для более рационального описания электростатического поля в диэлектрике вводят вектор **электрического смещения**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:

поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов:

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^n q_i \quad - \text{ для дискретного распределения зарядов } q_i \text{ внутри замкнутой поверхности } S;$$

той поверхности S ;

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho dV \quad - \text{ для непрерывного распределения заряда по объёму } V.$$

Таким образом, электростатическое поле в диэлектрике характеризуется тремя физическими величинами \mathbf{P} , \mathbf{D} и \mathbf{E} . Связь между векторами электрического смещения \mathbf{D} , поляризованности \mathbf{P} и напряженности \mathbf{E} электростатического поля для изотропного диэлектрика задается формулой

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Вектор электрического смещения \mathbf{D} определяется объемной плотностью сторонних зарядов в диэлектрике:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = r,$$

где $\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$; D_x, D_y, D_z – проекции вектора \mathbf{D} на координатные оси.

Вектор \mathbf{P} определяется объемной плотностью связанных зарядов в диэлектрике:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -r'.$$

На границе раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями линии векторов \vec{D} и \vec{E} испытывают преломление:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma ; P_{2n} - P_{1n} = \sigma' ; \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} ,$$

где s и s' – поверхностные плотности сторонних и связанных зарядов; \vec{n} – нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую; \vec{t} – орт, касательный к поверхности; ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические проницаемости первой и второй среды соответственно.

У поверхности заряженного проводника в вакууме касательная и нормальная составляющая вектора \vec{E} определяется формулами

$$E_t = 0, E_n = s/\epsilon_0 ,$$

а внутри проводника электрическое поле отсутствует.

Уединенный проводник обладает *электрической емкостью*:

$$C = q/j ,$$

где q – заряд проводника, j – его потенциал.

Два разноименно заряженных проводника, между которыми помещен слой диэлектрика, образуют *конденсатор*. Конденсаторы различной формы обладают различной электрической емкостью. Электрическая емкость конденсаторов:

плоского –

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} ,$$

где S – площадь одной из пластин, d – расстояние между пластинами;

цилиндрического –

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} ,$$

где l – длина конденсатора; r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы обкладок конденсатора соответственно;

сферического –

$$C = 4\pi\epsilon_0 e \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы обкладок конденсатора соответственно.

Для варьирования емкости конденсаторы соединяют в *батареи*.

Электрическая емкость *параллельно соединенных* конденсаторов рассчитывается как

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Электрическая емкость *последовательно соединенных* конденсаторов рассчитывается как

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Любое заряженное тело и электростатическое поле, им созданное, обладают энергией. *Энергия* заряженного *уединенного проводника* рассчитывается по формулам

$$W = \frac{Cj^2}{2} = \frac{qj}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где q – заряд проводника; j – его потенциал; C – емкость проводника.

Электростатическое поле заряженного *конденсатора* обладает энергией

$$W = \frac{C(\Delta j)^2}{2} = \frac{q(j)}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где $C, q, \Delta j$ – емкость конденсатора, заряд на его обкладках и разность потенциалов между ними.

Энергия, приходящаяся на единицу объема, называется *объемной плотностью энергии* электростатического поля и рассчитывается по формуле

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 e E^2}{2} = \frac{\dot{E} \cdot \dot{D}}{2};$$

все величины, входящие в формулу, определены выше.

2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрическим током называется всякое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. Упорядоченное движение свободных электрических зарядов, возникающее в проводнике под действием электрического поля, называется током проводимости. За направление электрического тока условно принимается направление движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока является *сила тока* I – скалярная физическая величина, равная электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1)$$

Ток называется *постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются со временем:

$$I = q/t.$$

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется *плотностью тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (2)$$

Сила тока в проводнике равна
$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_S j_n dS,$$

где j_n – проекция вектора плотности тока на нормаль.

Для постоянного тока

$$I = jS. \quad (3)$$

Кулоновские силы электростатического взаимодействия между зарядами приводят к перераспределению их в проводнике, поле в проводнике исчезает, потенциалы во всех точках выравниваются. Поэтому для поддержания тока необходимы неэлектростатические, *сторонние электрические силы*, способные поддерживать разность потенциалов. Такие силы создаются *источником тока* (аккумулятор, генератор и т.д.).

Для любой точки внутри проводника, по которому течет ток,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}',$$

где \vec{E} – напряженность поля в данной точке; \vec{E}_0 – напряженность кулоновского поля; \vec{E}' – напряженность поля сторонних сил.

Произведение тока на сопротивление данного участка 1–2 цепи численно равно сумме разности потенциалов и ЭДС, действующей на этом участке цепи:

$$IR = \int_1^2 (\vec{E}_0 \cdot d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}' \cdot d\vec{l}), \quad (4)$$

где I – сила тока, R – сопротивление участка цепи, $d\vec{l}$ – вектор, численно равный элементу dl длины проводника и направленный по касательной к проводнику в ту же сторону, что и вектор j .

ЭДС на участке 1–2:

$$e_{12} = \int_1^2 (\vec{E}' \cdot d\vec{l}). \quad (5)$$

ЭДС равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда.

Разность потенциалов:

$$j_1 - j_2 = \int_1^2 (\vec{E}_0 \cdot d\vec{l}). \quad (6)$$

Напряжением U_{12} (падением напряжения) на участке цепи 1–2 называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда:

$$U_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{l} = j_1 - j_2 + e_{12}.$$

Сопротивление участка цепи:

$$R = r l / S, \quad (7)$$

где r – удельное сопротивление проводника, l – длина проводника, S – его сечение.

Закон Ома для участка цепи:

$$U=IR. \quad (8)$$

Для замкнутой цепи:

$$j_1=j_2, \quad e=IR, \quad (9)$$

где R – суммарное сопротивление всей цепи.

Найдем связь между плотностью тока j и полем E . Из (8) следует $I=U/R$, представим ток $I=jS$ (3), напряжение $U=El$ и сопротивление $R=r l/S$, подставив эти величины, получим

$$jS = \frac{E \cdot l \cdot S}{r \cdot l}.$$

Тогда в векторном виде

$$\mathbf{j} = \frac{1}{r} \mathbf{r} E = s \mathbf{E}, \quad (10)$$

где s – *удельная электрическая* проводимость. Выражение (10) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме.

Закон Джоуля–Ленца можно записать как

$$Q = IUt = I^2 t = \frac{U^2}{R} t. \quad (11)$$

Удельной тепловой мощностью w называется количество энергии, выделяющейся за единицу времени в единице объема проводника:

$$w = \frac{Q}{V \cdot t}.$$

Используя соотношение $j=sE$, можно записать закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \frac{I \cdot U \cdot t}{S \cdot l \cdot t} = jE = sE^2. \quad (12)$$

Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$r = r_0(1 + at), \quad (13)$$

где r_0 – удельное сопротивление при 0°C ; a – температурный коэффициент сопротивления.

Электронная теория проводимости. Согласно теории Друде–Лоренца носители тока в металлах – электроны проводимости. Они свободно движутся, образуя электронный газ, между узлами кристаллической решетки, где располагаются ионы металла. Электроны при движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. Электроны обладают такой же энергией теплового движения, как молекулы идеального газа, и можно найти среднюю скорость теплового движения электронов $\langle u \rangle$:

$$\langle u \rangle = \sqrt{8kT/pm_e},$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона. При $T = 300^0 \text{ К}$, $\langle u \rangle \approx 10^5 \text{ м/с}$.

Наложение внешнего электрического поля упорядочивает движение электронов, т.е. возникает электрический ток. Плотность тока в проводнике

$$J = ne \langle v \rangle, \quad (14)$$

где n – концентрация молекул, $\langle v \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения.

Выбрав $j = 10^7 \text{ А/м}^2$, $n = 10^{28} \text{ м}^{-3}$, получим величину $\langle v \rangle \sim 10^{-3} \text{ м/с}$, т.е. $\langle v \rangle = \langle u \rangle$. Поэтому при вычислении результирующей скорости $\langle v \rangle + \langle u \rangle$ можно заменить на $\langle u \rangle$.

При соударении электрона с ионами решетки энергия полностью передается иону, а в постоянном поле E электрон приобретает ускорение $a = eE/m_e$. Время пробега между двумя столкновениями t , длина свободного пробега l и в конце пробега скорость упорядоченного движения равна

$$v_{\max} = at = \frac{eEt}{m_e} = \frac{eE}{m_e} \cdot \frac{l}{\langle u \rangle}. \quad (15)$$

Среднее значение скорости $\langle v \rangle = 1/2 v_{\max} = eEl/2m_e \langle u \rangle$, тогда плотность тока равна

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 l}{2m_e \langle u \rangle} E. \quad (16)$$

Сравнив (10) с (16), запишем для проводимости

$$S = \frac{ne^2l}{2m_e \langle u \rangle}. \quad (17)$$

Классическая теория объяснила законы Ома и Джоуля–Ленца, вместе с тем встретила со значительными затруднениями. Из (17) следует, что сопротивление металлов r должно возрасти пропорционально \sqrt{T} , т.к. n и l от температуры не зависят, а $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$. Это противоречит опытным данным, согласно которым $r \sim T$.

Второе затруднение классической электронной теории связано со значением молярной теплоемкости твердых тел. Согласно закону Дюлонга–Пти теплоемкость кристаллической решетки равна $C_v = 3R = 25$ Дж/моль К. С учетом теплоемкости электронного газа $3/2R$, атомная теплоемкость металла должна быть $4,5R = 37,4$ Дж/моль К, что отличается от молекулярной теплоемкости диэлектриков ($C_v = 3R$). Хотя эксперимент показывает, что теплоемкости металлов и диэлектриков практически одинаковы.

Классическая электронная теория также не объясняет явление сверхпроводимости у металлов.

Эти затруднения можно объяснить только квантовой теорией металлов. Однако классическая теория не утратила своего значения и во многих случаях дает правильные результаты.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Примеры решения задач

Пример 1. Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Кольцо имеет заряд q . На единицу длины нити приходится заряд λ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

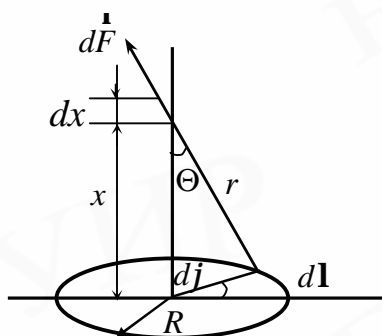


Рис. 3.1

Решение. Выделим на нити на расстоянии x от ее конца элемент длиной dx , на котором локализован заряд, $dq = \lambda dx$, а на кольце – элемент длиной $dl = R d\varphi$, на котором находится заряд (рис. 3.1):

$$dq_1 = \frac{q}{2\pi R} R d\varphi = \frac{q}{2\pi} d\varphi .$$

Сила взаимодействия между этими зарядами

$$dF = \frac{dq dq_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx q d\varphi}{2\pi r^2}, \quad (3.1)$$

где $r^2 = x^2 + R^2$. Эта сила направлена под углом Θ по отношению к нити. Разложим силу $d\vec{F}$ на составляющую, параллельную нити dF_{\parallel} и составляющую dF_{\perp} , перпендикулярную нити:

$$\begin{aligned} dF_{\parallel} &= dF \cos \Theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda q dx d\varphi \cos \Theta}{2\pi r^2}, \\ dF_{\perp} &= dF \sin \Theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda q dx d\varphi \sin \Theta}{2\pi r^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из соображений симметрии следует, что суммирование по dF_{\perp} приведет к нулю. Поэтому учитываем лишь

$$dF_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda q dx d\varphi}{2\pi (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.3)$$

Результирующую силу взаимодействия найдем, если проинтегрируем выражение (3.3) по φ от 0 до 2π и по x от 0 до ∞ .

$$dF_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.4)$$

Обозначим $x^2 + R^2 = y^2$, $xdx = ydy$.

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \int_R^\infty \frac{ydy}{(y^2)^{3/2}} = \int_R^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{R}.$$

Окончательно имеем

$$dF_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda q}{R}, \quad F = F_p = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Пример 2. Круглая пластинка радиусом $R = 5$ см равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1,5 \times 10^{-5}$ Кл/м². Необходимо: 1) определить напряженность поля в точке, лежащей на расстоянии $a = 6,0$ см от пластинки на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через ее геометрический центр; 2) показать, что полученная формула переходит в формулу напряженности поля бесконечной заряженной плоскости, если $a \rightarrow 0$, или в формулу для напряженности поля точечного заряда, если $a \gg R$.

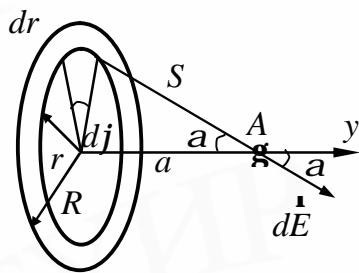


Рис. 3.2

Решение. 1. Введем полярную систему координат. Выделим в этой системе координат на пластинке элемент поверхности (рис. 3.2)

$$dS = r dj dr. \quad (3.5)$$

На этом элементе поверхности будет локализован заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma r dj dr. \quad (3.6)$$

Этот заряд в точке A создает напряженность электрического поля

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 S^2} = \frac{\sigma r dj dr}{4\pi\epsilon_0 S^2}, \quad (3.7)$$

направленную под углом α к оси OY . Разложим напряженность $d\vec{E}$ на составляющую $d\vec{E}_\perp$, перпендикулярную этой

оси. Из соображений симметрии следует, что результирующая составляющая электрического поля, направленная перпендикулярно оси, будет равна нулю. Составляющая напряженности электрического поля, направленная вдоль оси OY , будет равна

$$dE_y = dE \cos \alpha = \frac{S r dj dr}{4\pi \epsilon_0 S^2} \cos \alpha. \quad (3.8)$$

Так как $S^2 = x^2 + R^2$, а $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$, то

$$dE_y = \frac{\sigma r \alpha d\varphi dr}{4\pi \epsilon_0 S^2} (r^2 + a^2). \quad (3.9)$$

Результирующая напряженность в точке A

$$E = E_y = \frac{S a}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} dj \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{S a}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

Для вычисления интеграла введем подстановку

$$r^2 + a^2 = u^2, \quad r dr = u du.$$

Тогда

$$E = E_y = \frac{S a}{2\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{u du}{u^3} = \frac{S a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) = \frac{S}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right). \quad (3.11)$$

$A \rightarrow 0$ $E = E_y = \frac{S}{2\epsilon_0}$, что совпадает с напряженностью поля, создаваемой бесконечной заряженной плоскостью.

2. Если $R = a$, то

$$\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/a^2}} \approx 1 - \frac{R}{2a^2}.$$

При этом

$$E = E_y = \frac{S R^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^2}. \quad (3.12)$$

Пример 3. Тонкое непроводящее кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, где λ_0 – постоянная, j – азимутальный угол. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в центре кольца.

Решение. Выделим элемент длины кольца $dl = R d\varphi$, расположенный под углом φ на кольце (рис. 3.3). Заряд, находящийся на этом элементе dl , равен

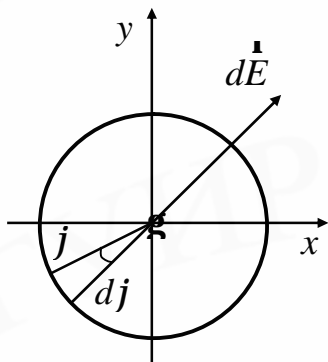


Рис. 3.3

$$dq = \lambda dl = \lambda_0 R \cos \varphi ds. \quad (3.13)$$

Этот заряд в центре кольца создает напряженность электрического поля

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \cos^2 \varphi d\varphi. \quad (3.14)$$

Разложим $d\vec{E}$ на две составляющие dE_x и dE_y :

$$dE_x = dE \cos \varphi = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \cos^2 \varphi d\varphi, \quad (3.15)$$

$$dE_y = dE \sin \varphi = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Интегрированием уравнений (3.15) по φ от 0 до 2π получим

$$E_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R},$$

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (3.16)$$

Результирующая напряженность электрического поля

$$E = E_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Пример 4. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r от его центра по закону

$$r = r_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \text{ где } r_0 - \text{ постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость}$$

шара и окружающего его пространства равной единице, найти:

1) модуль вектора напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния r ;

2) максимальное значение напряженности E_m и соответствующее ему расстояние r_m .

Решение. 1. При указанном распределении заряда, как и в случае его равномерного распределения, поле является центрально-симметричным. Ясно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности в теореме Гаусса надо взять сферу с центром в центре шара и проходящую через точку, в которой ищем поле. Согласно теореме Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.17)$$

где q - заряд внутри сферической поверхности радиусом r . Найдем величину этого заряда. Выделим в шаре узкий сферический слой радиусом x и толщиной dx . В этом слое находится электрический заряд

$$dq = r dV \quad \text{или} \quad dq = 4\pi x^2 r_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx. \quad (3.18)$$

Величина заряда, находящегося внутри сферической поверхности радиусом r ,

$$q = \int_0^r dq = \int_0^r 4\pi r_0 x^2 \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx = \frac{4\pi r_0 r^3}{3} - \frac{\pi r_0 r^4}{R}. \quad (3.19)$$

Подставляя значение q в формулу (3.17), получим при $r < R$:

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\frac{4\pi r_0 r^3}{3} - \frac{\pi r_0 r^4}{R} \right) = \frac{r_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right). \quad (3.20)$$

Чтобы найти величину E при $r > R$, найдем сначала величину заряда, размещенного на заряженном шаре. Для этого в формуле (3.19) нужно провести интегрирование по r от 0 до R . После такого интегрирования получим

$$q = \frac{4\pi r_0 R^3}{3} - \pi r_0 R^3 = \frac{\pi r_0 R^3}{3}. \quad (3.21)$$

Напряженность электрического поля вне шара получим, если в формулу (3.17) вместо q подставим его значение из формулы (3.21):

$$E = \frac{\pi r_0 R^3}{3} \cdot \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{r_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}. \quad (3.22)$$

2. Чтобы найти максимальное значение E_m , нужно исследовать уравнение (3.20) на экстремум:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{r_0}{3e_0} - \frac{r_0 r}{2e_0 R} = 0. \quad (3.23)$$

Из уравнения (3.23) находим

$$r_m = \frac{2R}{3}. \quad (3.24)$$

Подставляя r_m в формулу (3.20), находим

$$E_m = \left(\frac{r_0}{3e_0} \right) \frac{2}{3} R \left[1 - \frac{3 \cdot \frac{2}{3} R}{4R} \right] = \frac{r_0 R}{9e_0}. \quad (3.25)$$

При $r = r_m$ напряженность электрического поля принимает максимальное значение, так как при этом $\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = -\frac{r_0}{2e_0 R} < 0$.

Пример 5. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от плоской поверхности однородного изотопного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика равна ϵ . Найти: 1) поверхностную плотность связанных зарядов как функцию расстояния r от точечного заряда, исследовать полученный результат при $l \rightarrow 0$; 2) суммарный связанный заряд на поверхности диэлектрика.

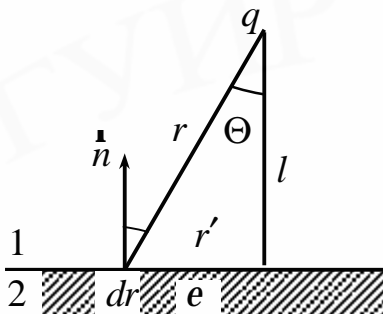


Рис. 3.4

Решение. 1. Как известно, нормальные составляющие вектора D на границе раздела двух диэлектриков равны между собой (рис. 3.4):

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (3.26)$$

или

$$E_{1n} = \epsilon E_{2n}. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) можно переписать в следующем виде:

$$\left(-\frac{1}{4\pi e_0} \right) \cos \Theta + \left(\frac{\epsilon'}{2e_0} \right) = \epsilon \left(-\frac{q \cos \Theta}{4\pi e_0 r^2} \cdot \frac{\epsilon''}{2e_0} \right), \quad (3.28)$$

где $\frac{s'}{2e_0}$ – составляющая напряженности электрического поля, создаваемого вблизи рассматриваемого участка плоскости, на котором поверхностная плотность связанных зарядов равна s' . Решив уравнение (3.27) относительно s' , получим

$$s' = -\frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{ql2p}{r^2}. \quad (3.29)$$

При решении учтено, что $\cos \Theta = \frac{l}{r}$. При $l \rightarrow 0$ величина $s' \rightarrow 0$, т.е. если заряд q находится на самой границе раздела, то поверхностный заряд на плоскости отсутствует.

2. Выделим на плоскости кольцо с центром в точке 0 (см. рис. 3.4). Пусть радиусы кольца равны r' и $r' + dr'$. Величина связанного заряда, находящегося на выделенной площадке:

$$dj' = s'2pr'dr'. \quad (3.30)$$

Так как $r^2 = l^2 + r'^2$, то $rdr = r'dr'$. Подставляя в (3.30) вместо s' его значение и заменяя $r'dr'$ на rdr , получим

$$dq' = -\frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{qldr}{r^2}. \quad (3.31)$$

Величина связанного заряда, возникшего на поверхности однородного изотропного диэлектрика:

$$q' = \int_0^{q'} dq' = -\frac{e-1}{e+1} q.$$

Пример 6. Между разноименно заряженными пластинами находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $e = 5$. Заряженные пластины стремятся сблизиться, этому препятствует находящийся между ними диэлектрик толщиной $d = 0,001$ м. Рассчитать давление, оказываемое заряженными пластинами на диэлектрик, если разность потенциалов между пластинами $U = -200$ В.

Решение. Давление, испытываемое поверхностью диэлектрика, равно

$$P = \frac{F}{S},$$

где F – сила взаимодействия между пластинами, S – площадь каждой пластины. Для нахождения силы рассмотрим одну пластину в поле, создаваемом другой пластиной. Напряженность поля, создаваемого одной пластиной:

$$E_{\perp} = \frac{S}{2e_0e}, \quad (3.32)$$

где S – поверхностная плотность заряда. Заряд каждой пластины

$$q = SS.$$

Поэтому

$$F = qE_1 = \frac{S^2S}{2e_0e}. \quad (3.33)$$

Из формулы напряженности поля в любой точке между пластинами

$$E = \frac{S}{e_0e} \quad (3.34)$$

найдем

$$S = ee_0E. \quad (3.35)$$

Тогда

$$F = \frac{ee_0E^2}{2}S. \quad (3.36)$$

Откуда

$$P = \frac{ee_0E^2}{2}. \quad (3.37)$$

Принимая во внимание, что $E = \frac{U}{d}$, получаем

$$P = \frac{ee_0U^2}{2d^2}. \quad (3.38)$$

Произведем вычисления:

$$P = \frac{5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,85 \text{ (Па)}.$$

Пример 7. Найти емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 , и $R_2 > R_1$, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону $\epsilon = \frac{a}{r}$, где a – постоянная, r – расстояние от центра конденсатора.

Решение. Пусть конденсатору сообщен заряд q . Найдем разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{er^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Пример 8. В плоском конденсаторе пластины находятся на расстоянии $X_1 = 0,02$ м. Определить работу, которую следует затратить на раздвижение пластин до $X_2 = 0,04$ м, если к ним приложена разность потенциалов $U = 500$ В и пластины все время подключены к источнику тока. Площадь каждой пластины $S = 0,01$ м².

Решение. Пусть на одной пластине конденсатора находится заряд q . Заряд одной пластины конденсатора находится в поле напряженностью E_1 , созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила

$$F = qE_1, \quad (3.39)$$

учитывая, что

$$E_1 = \frac{S}{2\epsilon_0} = \frac{U}{2x}, \quad (3.40)$$

формула (3.39) примет вид

$$F = \frac{qU}{2x} = \frac{CU^2}{2x} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2x^2}. \quad (3.41)$$

Запишем элементарную работу dA силы F , действующей на обкладку, при ее перемещении на dx относительно другой обкладки:

$$dA = Fdx = \frac{e_0 S U^2 dx}{2x^2}. \quad (3.42)$$

Работа, затраченная на раздвижение пластин, равна

$$A = \frac{e_0 S U^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{e_0 S U^2}{2} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{e_0 S U^2}{2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right). \quad (3.43)$$

Проверим размерности правой и левой части в формуле

$$\text{Дж} = \Phi/m \cdot m^2 \cdot b^2/m^2 = \Phi \cdot B^2 = \text{Дж}.$$

Размерности правой и левой частей совпадают.

Произведем вычисления:

$$A = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01 \cdot 500^2}{2} \left(\frac{1}{0,01} - \frac{1}{0,04} \right) = 8,3 \cdot 10^{-7} \text{ (Дж)}.$$

Пример 9. Батарею из двух последовательно соединенных конденсаторов, емкости которых $C_1 = 4 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 6 \text{ мкФ}$, зарядили до разности потенциалов $U = 2000 \text{ В}$ и отключили от источника напряжения. На сколько уменьшится энергия батареи, если одновременно заряженные обкладки конденсатора соединить параллельно?

Решение. Обозначим через W_1 энергию батареи при последовательном соединении конденсаторов, а через W_2 при их параллельном соединении. Уменьшение энергии батареи в результате переключения конденсаторов:

$$\Delta W = W_1 - W_2. \quad (3.44)$$

Энергия конденсаторов при их последовательном соединении

$$W_1 = \frac{C_{\text{пос}} U^2}{2}, \quad (3.45)$$

где $C_{\text{пос}}$ – емкость батареи при последовательном соединении конденсаторов. Так как при последовательном соединении конденсаторов

$$C_{\text{пос}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (3.46)$$

то

$$W_1 = \frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (3.47)$$

В случае последовательного соединения конденсаторов их заряды одинаковы и равны

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U. \quad (3.48)$$

При параллельном соединении конденсаторов происходит изменение U . Поэтому энергию системы конденсаторов лучше записать в виде

$$W_2 = q_{\text{пар}}^2 \cdot 2C_{\text{пар}}, \quad (3.49)$$

где $q_{\text{пар}}$ - суммарный заряд одноименно заряженных обкладок, $C_{\text{пар}}$ - емкость батареи при параллельном соединении конденсаторов. При параллельном соединении одноименно заряженных обкладок в соответствии с законом сохранения заряда суммарный заряд не изменяется, т. е. $q_{\text{пар}} = 2q$.

Тогда

$$q_{\text{пар}} = 2q = \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U \quad (3.50)$$

и

$$W_2 = \frac{2C_1^2 C_2^2 U^2}{(C_1 + C_2)^3}.$$

Подставим значения W_1 и W_2 в формулу (3.44):

$$\Delta W = \frac{2C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{2C_1^2 C_2^2 U^2}{2(C_1 + C_2)^3} = \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)^2}{2(C_1 + C_2)^3} U^2.$$

Произведем вычисление в системе СИ:

$$\Delta W = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-15}} = 0,192 \text{ (Дж)}.$$

Пример 10. Зазор между пластинами плоского конденсатора заполнен неоднородной слабо проводящей средой, удельная проводимость которой изме-

няется в направлении, перпендикулярном к пластинам, по линейному закону от $s_1 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ до $s_2 = 2,0 \cdot 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Площадь каждой пластины $S = 230 \text{ см}^2$. Расстояние между пластинами $d = 2,0 \text{ мм}$. Найти ток через конденсатор при напряжении на нем $U = 300 \text{ В}$.

Решение. Выделим в проводящей среде узкий слой dx , находящийся на расстоянии x от одной из пластин конденсатора. Сопротивление этого слоя

$$dR = \frac{r dx}{S} = \frac{dx}{(sS)}. \quad (3.51)$$

Проводимость среды линейно зависит от расстояния:

$$s = a + bx. \quad (3.52)$$

Так как при $x = 0$ $s = s_1$, а при $x = d$ $s = s_2$, то коэффициенты

$$a = s_1, \quad b = \frac{(s_2 - s_1)}{d}.$$

Тогда

$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{d} x. \quad (3.53)$$

Подставляем в формулу (3.51) вместо s его значение:

$$dR = \frac{1}{S} \frac{dx}{\frac{s_2 - s_1}{d} x + s_1}. \quad (3.54)$$

Полное сопротивление среды между обкладками конденсатора

$$R = \frac{1}{S} \int_0^d \frac{dx}{s_1 + (s_2 - s_1) \frac{x}{d}} = \frac{d}{S(s_2 - s_1)} \ln \frac{s_2}{s_1}. \quad (3.55)$$

Ток через конденсатор

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US(s_2 - s_1)}{d \ln \frac{s_2}{s_1}}. \quad (3.56)$$

Произведем вычисления:

$$I = \frac{300 \cdot 0,023(2 - 1) \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-3} \ln 2} = 4,98 \cdot 10^{-9} \text{ (А)}.$$

Пример 11. Длинный проводник крупного сечения радиусом R сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r до оси проводника $r = \frac{C}{r}$, где C – постоянная. По проводнику течет ток I . Найти напряженность поля E в проводнике и сопротивление единицы длины проводника.

Решение. Следует обратить внимание, что напряженность электрического поля постоянна во всех точках сечения данного проводника. Это легко показать на основе теоремы о циркуляции вектора E . Выделим в поперечном сечении проводника тонкий кольцевой слой, заключенный между радиусами r и $r + dr$. Величина тока, проходящего по этому слою:

$$dI = j2\pi r dr. \quad (3.57)$$

Так как плотность тока $j = \sigma E = \frac{E}{r}$, то

$$dI = \frac{E}{r} 2\pi r dr = \frac{E}{C} 2\pi r^2 dr. \quad (3.58)$$

Величина тока, проходящего через поперечное сечение проводника:

$$I = \int_C^B \frac{E}{C} 2\pi r^2 dr = \frac{2\pi ER^3}{3C}. \quad (3.59)$$

Откуда

$$E = \frac{3IC}{2\pi R^3}. \quad (3.60)$$

По закону Ома сопротивление проводника $R = \frac{U}{j}$, а единицы длины проводника

$$R_{\text{ед}} = \frac{R}{l} = \frac{U}{lj} = \frac{E}{I}. \quad (3.61)$$

Из формулы (3.60) получаем

$$R_{\text{ед}} = \frac{E}{I} = \frac{3C}{2\pi R^3}.$$

Пример 12. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение $t = 10,0$ с сила тока уменьшилась от $I_0 = 10,0$ до $I = 5,0$ А? Уменьшение силы тока связано с изменением сопротивления цепи, которое равномерно возрастало в течение указанного промежутка времени. Разность потенциала U , приложенная к цепи, поддерживалась постоянной.

Решение. В данной задаче сопротивление цепи R является линейной функцией времени:

$$R = R_0 + kt, \quad (3.62)$$

где R_0 – начальное сопротивление цепи, k – постоянная величина, выражающая скорость изменения сопротивления. Выразим силу тока по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R_0 + kt}. \quad (3.63)$$

Количество электричества, протекшего в цепи за время dt :

$$dq = Idt = \frac{U}{R_0 + kt} dt. \quad (3.64)$$

Полный заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t , выразится интегралом

$$q = \int_0^t Idt = \int_0^t \frac{U}{R_0 + kt} dt = \frac{U}{k} \ln(R_0 + kt) \Big|_0^t = \frac{U}{k} \ln \frac{R_0 + kt}{R_0}. \quad (3.65)$$

Так как

$$R_0 = \frac{U}{I_0}, \text{ а } R = R_0 + kt = \frac{U}{I}, \quad (3.66)$$

то

$$k = \frac{R - R_0}{t}. \quad (3.67)$$

Подставляя (3.66) и (3.67) в формулу (3.65), получим

$$q = \frac{I_0 I t}{I_0 - I} \ln \frac{I_0}{I}.$$

Произведем вычисления:

$$q = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10,0}{10 - 5} \ln \frac{10}{5} = 69 \text{ (Кл)}.$$

Пример 13. По медным проводам следует передать электрическую энергию на расстояние $l = 10$ км, при этом потери на джоулево тепло в проводящих проводах не должны превышать 3 % передаваемой энергии. Какое количество меди потребуется на подводящие провода, если энергия будет передаваться при напряжении $U_1 = 2000$ В и напряжении $U_2 = 10000$ В? Передаваемая мощность $N = 100$ кВт. Плотность меди $D = 8900$ кг/м³.

Решение. Так как потери электроэнергии в подводящих проводах не должны превышать 3 % от передаваемой энергии, то потери мощности N_1 в подводящих проводах не должны превышать 3 % от всей мощности N , т.е. $N_1 = 0,03 N$. С другой стороны,

$$N_1 = I_1^2 R_1 \text{ или } N_1 = \frac{R_1}{I_1^2}, \quad (3.68)$$

где R_1 – сопротивление подводящих проводов, I_1 – сила тока в них. Если U – напряжение на проводах, то $I_1 = \frac{N}{U}$. Подставляя вместо I_1 его значение в формулу (3.68), получим

$$N_1 = \frac{R_1}{I_1^2} = \frac{0,03N}{N^2} U^2 = \frac{0,03U^2}{N}. \quad (3.69)$$

Сопротивление R_1 можно выразить и так:

$$R_1 = \frac{rl}{S}, \quad (3.70)$$

где r – удельное сопротивление, l – длина подводящих проводов, S – поперечное сечение подводящих проводов. Приравнивая формулы (3.69) и (3.70), находим

$$S = \frac{rl}{R_1} = \frac{rlN}{0,03U^2}.$$

Масса подводящих проводов:

$$M = SlD = \frac{rl^2ND}{0,03U^2}.$$

Рассчитаем массу проводов, если подаваемое напряжение U_1 :

$$m_1 = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 10^3 \cdot 8,9 \cdot 10^3}{0,3 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \approx 5,04 \cdot 10^4 \text{ (кг)}.$$

При определении массы меди в подводящих проводах для того случая, когда напряжение равно 10 кВ, получим результат в 25 раз меньший того, который был получен для напряжения $U_1 = 2000$ В.

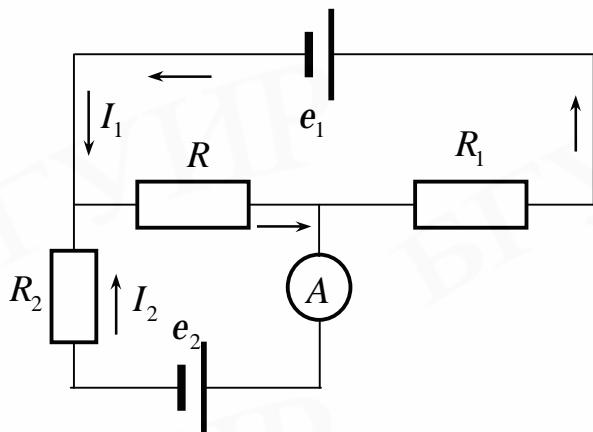


Рис. 3.5

Пример 14. Два источника электрического тока с ЭДС e_1 и e_2 включены в цепь по схеме рис. 3.5. Определить ЭДС источника e_2 , если $e_1 = 1,8$ В, $R = 1000$ Ом, $R_1 = 500$ Ом, сила тока, текущего в контуре источника e_2 , равна $I_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ А.

Решение. Выберем направления токов таким образом, как показано на рисунке стрелками. По правилам Кирхгофа для контуров e_1abce_1 , e_2abe_2 и узловой точки a можно записать:

$$e_1 = RI + R_1I_2, \quad (3.71)$$

$$e_2 = RI + R_2I_2, \quad (3.72)$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (3.73)$$

Подставляя значение I в уравнения (3.71) и (3.72), получим

$$e_1 = RI_1 + RI_2 + R_1I_1 = (R_1 + R)I_1 + RI_2, \quad (3.74)$$

$$e_1 = RI_1 + RI_2 + R_2I_2 = RI_1(R + R_2)I_2. \quad (3.75)$$

Из уравнения (3.74) определяем I_1 и после этого e_2 :

$$I_1 = \frac{e_1 - RI_2}{R_1 + R_2}, \quad (3.76)$$

$$e_2 = R \frac{e_1 - RI_2}{R_1 + R_2} + (R + R_2)I_2.$$

Подставляем численные значения:

$$e_2 = 1000 \frac{1,8 - 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{1500} + 1200 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1,47(\text{В}).$$

Таблица вариантов задач к контрольной работе №3

Варианты	Номера задач							
0	310	319	328	337	346	355	364	373
1	301	320	329	338	347	356	365	374
2	302	311	330	339	348	357	366	375
3	303	312	321	340	349	358	367	376
4	304	313	322	331	350	359	358	377
5	305	314	323	332	341	360	369	378
6	306	315	324	333	342	351	370	379
7	307	316	325	334	343	352	361	380
8	308	317	326	335	344	353	362	371
9	309	318	327	336	345	354	363	372

301. Два одинаковых неподвижных положительных заряда по $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл расположены на расстоянии $r = 3,9 \cdot 10^{-9}$ см друг от друга. Вдоль перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего эти заряды, движется электрон. В какой точке этого перпендикуляра сила взаимодействия электрона и системы неподвижных зарядов максимальна?

302. Найти напряженность и потенциал электрического поля в центре квадрата со стороной $a = 15$ см, если по углам квадрата расположены заряды q , $2q$, $-4q$ и $2q$, где $q = 6,2 \cdot 10^{-9}$ Кл.

303. Найти напряженность поля, созданного диполем, электрический момент которого $P = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл/м, на расстоянии $r = 3 \cdot 10^{-7}$ см от середины диполя в точке, лежащей: а) на продолжении диполя; б) на перпендикуляре к диполю.

304. В вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 14$ см расположены заряды $q_1 = 3,2 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q_2 = -3,2 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_3 = 4,6 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти величину и направление силы F , действующей на заряд q_3 .

305. Два точечных заряда $q_1 = 3,3 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -13,3 \cdot 10^{-9}$ Кл находятся в точках с координатами $(2,0,0)$ и $(-2,0,0)$. Найти: 1) величину и направление электрического поля в точке с координатами $(0,3,4)$; 2) координаты точек, где поле отсутствует. Значения координат даны в сантиметрах.

306. Принимая протон и электрон, из которых состоит атом водорода, за точечные заряды, находящиеся на расстоянии $r = 5,3 \cdot 10^{-9}$ см, найти напряжен-

ность поля E в точках B и C , отстоящих на таком же расстоянии от протона, как и электрон, и расположенных, как показано на рис. 3.6.

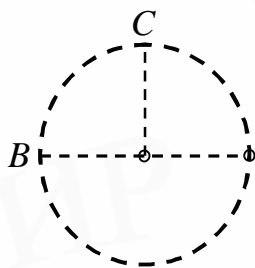


Рис. 3.6

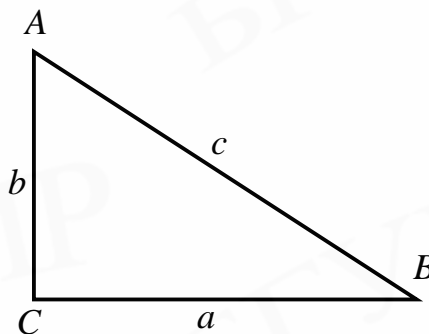


Рис. 3.7

307. Три одинаковых заряда по $q = 4,5 \cdot 10^{-9}$ Кл каждый, расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами $u = 42$ и $b = 36$ см. Найти силу, действующую на заряд, расположенный в вершине A (рис. 3.7).

308. Молекулу воды можно рассматривать как диполь, электрический момент которого $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл/м. Найти наибольшее F_{max} и наименьшее F_{min} значения силы взаимодействия этой молекулы с ионом водорода, находящимся на расстоянии $r = 3 \cdot 10^{-7}$ см.

309. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a помещаются точечные заряды одинаковой величины q . Найти потенциал j и напряженность поля E в центре шестиугольника при условии:

- а) знак всех зарядов одинаков;
- б) знаки соседних зарядов противоположны.

310. N точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n расположены в вакууме в точках с радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Написать выражения для потенциала j и напряженности

поля \vec{E} в точке, определяемой радиусом-вектором \vec{r} .

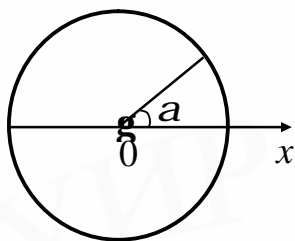


Рис. 3.8

311. По окружности радиусом $R = 12$ см распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \sin \alpha$, где $\lambda_0 = 1,7 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j электростатического поля в центре окружности

312. Тонкий стержень согнут в виде окружности радиусом $R = 25$ см так, что между его концами остался воздушный зазор, равный 1 см. По стержню равномерно распределен заряд $q = 0,33$ нКл. Найти напряженность \vec{E} и потенциал в центре окружности.

313. По дуге окружности радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j поля в центре окружности, если длина дуги равна $1/8$ длины окружности.

314. По четверти окружности радиусом $R = 5$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j поля в центре этой окружности.

315. На отрезке тонкой прямой ленты длиной $l = 16$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Определить напряженность \vec{E} и потенциал j поля в точке, лежащей на продолжении ленты на расстоянии $a = 20$ см от его конца.

316. По дуге окружности радиусом $R = 15$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 4,5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти напряженность поля \vec{E} в центре этой окружности, если длина дуги равна $3/8$ длины окружности.

317. Полусфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью $s = 7,5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j поля в центре полусферы.

318. По дуге окружности радиусом $R = 14$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j поля в центре этой окружности, если дуга опирается на центральный угол $\alpha = 60$ градусов.

319. По кольцу радиусом $R = 26$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 7,2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти напряженность \vec{E} и потенциал j поля в точке, находящейся на оси кольца, на расстоянии $a = 29$ см от плоскости кольца.

320. Заряд $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл распределен равномерно по объему шара радиусом $R = 4$ см. Найти потенциал в центре шара. Диэлектрическая проницаемость внутри и вне шара равна единице.

321. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид: $j = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z – координаты точки. Найти вектор напряженности \vec{E} поля и его модуль.

322. Имеется электрическое поле $\vec{E} = \vec{a} \times \vec{i}$. Выяснить, является ли это поле потенциальным. Если да, то найти выражение для потенциала.

323. Напряженность некоторого электростатического поля определяется выражением $\vec{E} = \frac{\vec{a}r}{r^4}$, где a – константа. Найти потенциал этого поля $j(r)$.

324. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $j = a(x^2 + y^2) + bz^2$, где a и b – положительные константы. Найти вектор напряженности поля \vec{E} и его модуль.

325. Найти вектор напряженности \vec{E} электрического поля, потенциал которого имеет вид $j = \vec{a} \cdot \vec{r}$, где \vec{a} – постоянный вектор.

326. Имеется электрическое поле с компонентами $\vec{E}_x = 2y\vec{i}$, $\vec{E}_y = (2x + 3z)\vec{j}$. Выяснить, является ли это поле потенциальным. Если да, то найти выражение для потенциала.

327. Потенциал некоторого поля зависит от координат x и y по закону $j = a(x^2 + y^2)$. Найти вектор напряженности поля \vec{E} и его модуль.

328. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $j = ax^3 - by^2 + cz^2$. Найти вектор напряженности поля \vec{E} и его модуль.

329. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния r до его центра по закону $j = ar^2 + b$, где a и b – константы. Найти вектор напряженности поля \vec{E} , его модуль и распределение объемного заряда $r(r)$ внутри шара.

330. Известно, что напряженность электрического поля внутри длинного цилиндра радиусом R , заряженного с объемной плотностью ρ , зависит от расстояния r от оси цилиндра по закону $\vec{E} = r\vec{r}/(2\epsilon_0)$. Найти разность потенциалов между точкой, лежащей на оси цилиндра, и точкой, лежащей на поверхности цилиндра $j_0 - j_r$.

331. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R имеет положительный объемный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его оси по закону $\rho = \rho_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$, где ρ_0 – константа. Найти напряженность поля E внутри и вне цилиндра как функцию расстояния r от его оси. Диэлектрическая проницаемость внутри и вне цилиндра равна единице.

332. Бесконечно длинный полый цилиндр радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ_0 . В полости заряды отсутствуют, радиус полости $R_1 < R$. Полагая диэлектрическую проницаемость внутри и вне цилиндра равной единице, найти напряженность электростатического поля как функцию расстояния r до оси цилиндра: 1) внутри полости E_1 ; 2) внутри цилиндра E_2 ; 3) вне цилиндра E_3 .

333. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r от его центра по закону $\rho = \rho_0 r$, где ρ_0 – константа. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$ внутри и вне шара. Найти напряженность электрического поля E_1 внутри и вне шара E_2 как функцию расстояния r .

334. Полый шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ_0 . Радиус полости $R_1 < R$. Заряды внутри полости отсутствуют. Полагая ди-

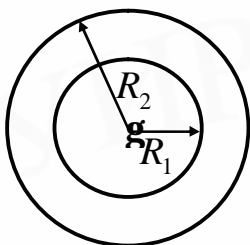


Рис. 3.9

электрическую проницаемость внутри шара и вне его равной единице, найти напряженность поля как функцию расстояния r от центра шара: 1) внутри полости E_1 ; 2) внутри шара E_2 ; 3) вне шара E_3 (рис. 3.9).

335. Шар радиусом R имеет заряд, плотность которого меняется по закону $r = r_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$, где r_0 - константа, r - расстояние от центра шара. Найти напряженность электростатического поля как функцию расстояния r . Диэлектрическая проницаемость внутри и вне шара равна единице.

336. Напряженность некоторого электрического поля зависит от координат X и Y по закону $\vec{E} = a(xi + yj)/(x^2 + y^2)$, где a - константа, \vec{i} и \vec{j} - орты осей x и y . Найти заряд, находящийся внутри сферы радиусом R , центр которой помещен в начале координат.

337. Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженной бесконечной пластинки толщиной $2a$. Объемная плотность заряда ρ . Диэлектрическая проницаемость внутри и вне пластинки равна единице.

338. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R имеет положительный объемный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r от его оси по закону $r = r_0 r$, где r_0 - константа. Полагая диэлектрическую проницаемость цилиндра и окружающего его пространства равной единице, найти напряженность электрического поля как функцию расстояния r : 1) внутри цилиндра E_1 ; 2) вне цилиндра E_2 .

339. Пользуясь теоремой Гаусса, найти напряженность поля бесконечно длинной нити, заряженной с линейной плотностью заряда λ , как функцию расстояния от нити.

340. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R имеет положительный объемный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r от его оси по закону $r = r_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$, где r_0 - константа. Полагая диэлектрическую проницаемость цилиндра и окружающего пространства равной единице, найти напряженность электрического поля как функцию расстояния r : 1) внутри цилиндра E_1 ; 2) вне цилиндра E_2 .

341. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $r > 0$ по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Найти: 1) модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра шара; изобразить примерные графики зависимостей $E(r)$ и $j(r)$; 2) объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

342. Фарфоровая пластинка ($\epsilon = 6$) помещена в однородное электростатическое поле напряженностью $E_1 = 100$ В/м. Направление поля образует угол $\alpha = 35^\circ$ с нормалью к пластинке. Найти: 1) напряженность поля E_2 в фарфоре; 2) угол между направлением поля и нормалью в фарфоре; 3) плотность S' связанных зарядов на границе фарфор-воздух.

343. Плоская диэлектрическая пластина ($\epsilon = 3$) толщиной $a = 1$ см равномерно заряжена с объемной плотностью $r = 2,2 \cdot 10^{-12}$ Кл/м³. Найти: 1) величину и направление векторов \vec{D} , \vec{E} и \vec{P} в пластине на расстоянии $b = 0,3$ см от плоскости симметрии пластины и вне пластины; 2) поверхностную плотность связанных зарядов S' на поверхности этой пластины.

344. Найти силу взаимодействия двух молекул воды, дипольные моменты которых расположены вдоль одной прямой. Электрический момент молекулы воды $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м³. Молекулы находятся друг от друга на расстоянии $a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ см.

345. Диэлектрическая проницаемость гелия при нормальных условиях $\epsilon = 1,000074$. Найти дипольный момент p атома гелия в однородном электрическом поле напряженностью $E = 300$ В/см.

346. Частица с дипольным моментом $p = 5,1 \cdot 10^{-29}$ Кл·м³ находится на расстоянии 10 см от длинного провода, равномерно заряженного с линейной плотностью зарядов $\lambda = 72$ нКл/м. Найти силу \vec{F} , действующую на частицу, если вектор \vec{p} направлен нормально к проводу.

347. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5,00$ создано однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Радиус шара $R = 3,0$ см. Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов и полный связанный заряд одного знака.

348. Металлический шар радиусом $R = 2,0$ см с зарядом $q = 8,1 \cdot 10^{-9}$ Кл окружен вплотную прилегающим к нему слоем диэлектрика ($\varepsilon = 3$) с внешним радиусом $a = 50$ см. Найти поверхностную плотность s' связанных зарядов на обеих сторонах слоя диэлектрика.

349. Плотность связанных зарядов на поверхности слюдяной пластинки, служащей изолятором в плоском конденсаторе, $s' = 2,66 \cdot 10^{-5}$ Кл/м². Толщина пластинки $d = 0,2$ мм. Найти разность потенциалов U между обкладками конденсатора.

350. Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. На пластины подана разность потенциалов $U_0 = 200$ В. Расстояние между пластинами 1 мм. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то разность потенциалов между пластинами возрастет до $U_1 = 800$ В. Найти: 1) поверхностную плотность s' связанных зарядов; 2) диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

351. Две альфа-частицы летят из бесконечности навстречу друг другу. Их скорости u_1 и $u_2 > u_1$. На какое минимальное расстояние x сблизятся частицы и как они будут двигаться после этого? Каковы установившиеся скорости частиц?

352. Точечный заряд $q = 3$ мкКл помещается в центре шарового слоя из однородного изотропного диэлектрика ($\varepsilon = 3$). Внутренний радиус слоя $a = 25$ см, наружный $b = 50$ см. Найти энергию W , заключенную в диэлектрике.

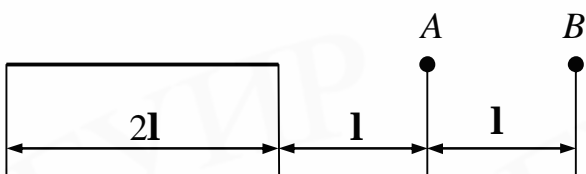


Рис. 3.10

353. На отрезке прямого тонкого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 250$ нКл/м. Найти работу A , которую нужно совершить, чтобы заряд $q = 4,3 \cdot 10^{-9}$ Кл

перенести из точки B в точку A (рис. 3.10).

354. Длинный цилиндр радиусом $R = 1$ см равномерно заряжен с линейной плотностью $\lambda = 10^{-5}$ Кл/м. α -частица, попавшая в поле цилиндра, перемещается от поверхности цилиндра до точки, находящейся на расстоянии $a = 4$ см от его поверхности. Как при этом изменится кинетическая W_K , потенциальная W_{II} и полная W энергия α -частицы?

355. Воздушный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра $a = 1,5$ см и радиус внешнего $b = 3,5$ см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов $U = 1300$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля этого конденсатора, двигаясь с расстояния $X_1 = 2,5$ см до расстояния $X_2 = 2$ см от оси цилиндра?

356. По теории Бора электрон в атоме водорода вращается вокруг ядра по круговой орбите радиусом $R = 0,053$ нм. Найти: 1) скорость V вращения электрона; 2) кинетическую W_K , потенциальную W_{II} и полную W энергию электрона.

357. Ядро тяжелого атома приближенно можно представить в виде шара из вещества с однородной объемной плотностью зарядов $\rho = 1,33 \cdot 10^{25}$ Кл/м³. Найти изменение электростатической энергии ΔW при расщеплении ядра урана с полным зарядом, равным $92e$, на два ядра с одинаковыми зарядами и радиусами, разведенными на большое расстояние друг от друга.

358. Сферическую оболочку радиусом R_1 , равномерно заряженную зарядом q , расширили до радиуса R_2 . Найти работу, совершенную при этом электрическими силами.

359. Электрон, находящийся в однородном электрическом поле получает ускорение, равное $a = 10^{12}$ м/с². Найти: 1) напряженность E электрического поля; 2) скорость V , которую получает электрон за 1 мкс своего движения, если начальная скорость его равна нулю; 3) работу A сил электрического поля за это время, разность потенциалов U , пройденную при этом электроном.

360. Имеется шаровое облако ионизированных частиц. Найти энергию электрического поля внутри шара W_1 и за его пределами W_2 . Изменится ли отношение энергий W_1/W_2 , если облако будет расширяться? Радиус облака $R = 1$ км, заряд $q = 23$ Кл распределен равномерно по облаку.

361. В проводнике длиной $l = 2$ м и площадью поперечного сечения $S = 0,4$ мм² идет ток. Мощность, выделяемая в проводнике, $N = 0,35$ Вт. Определить, из какого металла изготовлен проводник, и напряженность электрического поля E , если за 1 с через поперечное сечение этого проводника проходит $1,26 \cdot 10^{19}$ электронов.

362. Сопротивление гальванометра можно определить методом шунтирования. Для этого гальванометр включают в цепь последовательно с магазином сопротивлений (рис. 3.11). Включив сопротивление $R_1 = 400$ Ом, замечают показания гальванометра. Затем гальванометр шунтируют сопротивлением

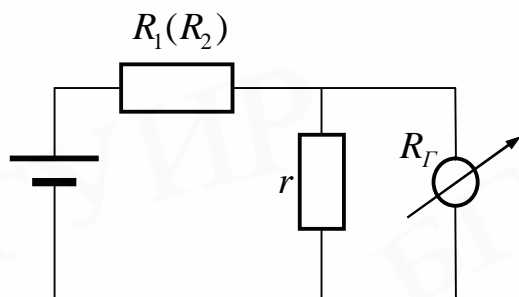


Рис. 3.11

$r = 12$ Ом и, изменяя сопротивление магазина, добиваются прежнего показания гальванометра. При этом новое сопротивление магазина $R_2 = 150$ Ом. Вычислить по этим данным сопротивление гальванометра $R_Г$.

363. Из никелиновой ленты толщиной $a = 0,2$ мм и шириной $b = 3$ мм нужно изготовить реостат на $R = 2,5$ Ом. Какой длины l нужно взять ленту и какое максимальное напряжение U_m можно подать на этот реостат, если допустимая плотность тока для никелина $j = 0,2$ А/мм²?

364. Сколько ламп мощностью по $N = 300$ Вт каждая, рассчитанных на напряжение $U = 100$ В, можно установить в здании, если проводка от магистрали сделана медным проводом общей длиной $l = 100$ м и сечением $S = 9$ мм² и если напряжение в магистрали поддерживается равным $U_0 = 127$ В?

365. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС ε_1 и ε_2 и внутренними сопротивлениями R_1 и R_2 .

366. ЭДС элемента и его внутреннее сопротивление равны соответственно $\varepsilon = 1,6$ В и $r = 0,5$ Ом. Чему равен КПД элемента при токе $I = 2,4$ А? Какое максимальное значение КПД для этого элемента?

367. По сети длиной 5 км необходимо передать энергию от источника с напряжением 110 В и имеющего мощность 5 кВт. Какого минимального диаметра d_{\min} должен быть медный провод, чтобы потери энергии в сети не превышали 10 % от мощности источника?

368. Батарея элементов при замыкании на сопротивление $R_1 = 5$ Ом дает ток $I = 1$ А, ток короткого замыкания $I_K = 6$ А. Определить наибольшую полезную мощность N_{\max} , которую может дать батарея.

369. Если к аккумулятору подключить последовательно амперметр и вольтметр, то они показывают соответственно 0,1 А и 10 В. Если приборы соединить параллельно и подключить к источнику, то их показания равны 1 А и 1 В. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора.

370. Имеется прибор с ценой деления $C = 5$ мкА/дел. Шкала прибора имеет $n = 150$ делений, внутреннее сопротивление $r = 100$ Ом. Как из этого прибора сделать: 1) вольтметр для измерения напряжения до $U = 75$ В; 2) амперметр для измерения тока до $I = 150$ мА?

371. В медном проводнике диаметром $d = 2$ мм поддерживается сила тока $I = 2$ А. Какое количество теплоты выделяется в единице объема проводника за 1 секунду?

372. Электромотор постоянного тока подключили к напряжению U . Сопротивление обмотки якоря равно R . При каком значении тока через обмотку полезная мощность мотора будет максимальной? Чему она равна? Каков при этом КПД мотора?

373. Какое количество теплоты выделяется в 1 секунду в единице объема проводника длиной $l = 0,2$ м, если на его концах поддерживается разность потенциалов $U = 4$ В? Удельное сопротивление проводника $r = 10^{-6}$ Ом·м.

374. Найти количество теплоты, выделяемой в единицу времени веществом с удельным сопротивлением $r = 10^9$ Ом·м, которое заполняет все пространство между двумя сферическими оболочками. Радиусы оболочек $a = 1$ см и $b = 2$ см, между ними поддерживается разность потенциалов $U = 1000$ В.

375. По проводнику сопротивлением $R = 6$ Ом протекло количество электричества $Q = 30$ Кл. Найти количество теплоты, выделенное в проводнике, если ток в проводнике равномерно убывает до нуля в течение $t = 24$ с.

376. В проводнике сопротивлением $R = 3$ Ом ток равномерно увеличивается от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $t = 10$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1$ кДж. Найти скорость нарастания тока в проводнике.

377. В проводнике сопротивлением $R = 100$ Ом ток равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_1 = 10$ А в течение времени $t = 30$ с. Найти количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике.

378. В проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом сила тока I меняется со временем t по закону $I = A + Bt$, где $A = 4$ А, $B = 2$ А/с. Найти количество теплоты, выделившееся в этом проводнике за интервал времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

379. В цепь включены медная и стальная проволоки равной длины и диаметра. Найти: 1) отношение количеств тепла, выделившегося в этих проволоках; 2) отношение падения напряжения на этих проволоках. Рассмотреть случаи последовательного и параллельного соединения проволок.

380. Найти суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной $l = 1000$ м, по которому течет ток $I = 70$ А.

3. МАГНЕТИЗМ

Магнитное поле создается движущимися зарядами (токами) и описывается вектором магнитной индукции $\dot{\mathbf{B}}$. **Величина** вектора $\dot{\mathbf{B}}$ определяется конкретной конфигурацией объекта, создающего поле. Его направление определяется по правилу правого винта. В частности, **поле движущегося заряда** (рис. 4) описывается формулой

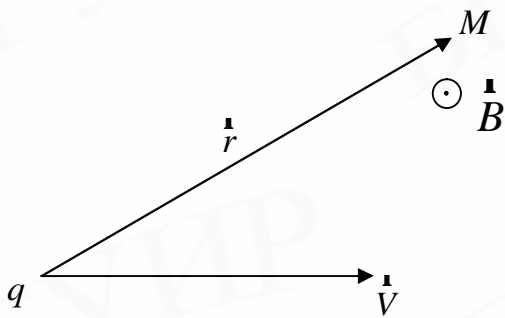


Рис. 4

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{mm_0}{4p} \frac{q[\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (18)$$

где $m_0 = 4p \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; q – заряд, создающий поле; $\dot{\mathbf{V}}$ – скорость заряда; \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения M ; m – магнитная проницаемость среды.

Магнитное поле, образованное постоянным током I (рис. 5), вычисляют, пользуясь **законом Био–Савара–Лапласа**:

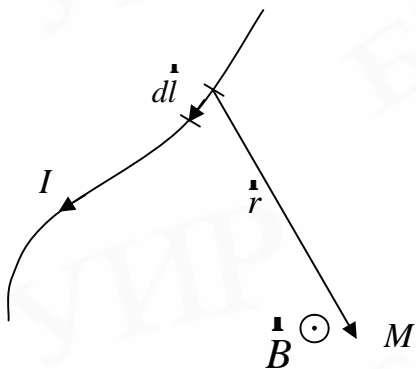


Рис. 5

$$d\dot{\mathbf{B}} = \frac{mm_0}{4p} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (19)$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током I .

Магнитное поле, образованное несколькими движущимися зарядами в конкретной точке пространства, вычисляют **по принципу суперпозиции**:

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 + \dots + \dot{\mathbf{B}}_N, \quad (20)$$

где $\dot{\mathbf{B}}_i$ – индукция магнитного поля, созданного i зарядом в этой точке.

Для расчета результирующего поля проводника с током используют принцип суперпозиции в виде

$$\dot{\mathbf{B}} = \int d\dot{\mathbf{B}}, \quad (21)$$

где $d\dot{\mathbf{B}}$ определяется формулой (19).

Часто для упрощения расчетов применяют теорему Гаусса:

циркуляция вектора $\dot{\mathbf{B}}$ по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром,

$$\oint_L \dot{\mathbf{B}} \cdot d\dot{\mathbf{l}} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k. \quad (22)$$

В приведенной формулировке теорему можно использовать для расчета магнитного поля токов, находящихся в вакууме. В частности, теорема дает результат при расчете магнитных полей:

а) прямого тока (рис. 6):

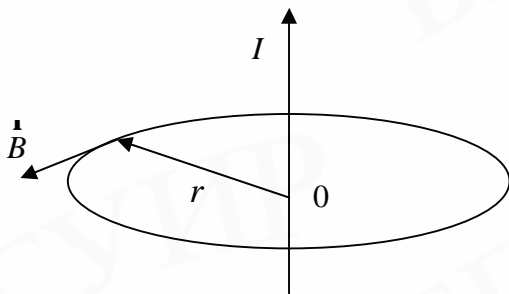


Рис. 6

$$|\dot{\mathbf{B}}| = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad (23)$$

где r – расстояние от проводника до точки наблюдения M ;

б) соленоида (рис. 7):

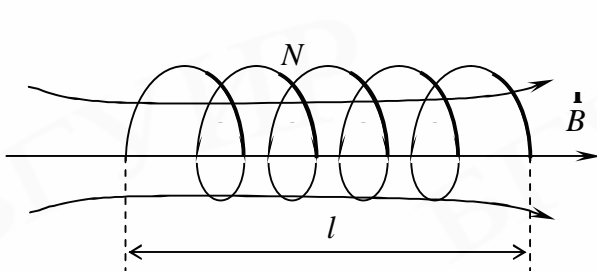


Рис. 7

$$|\dot{\mathbf{B}}| = \frac{\mu_0 IN}{l}, \quad (24)$$

где I – сила тока; N – количество витков; l – длина соленоида.

Магнитное поле действует на движущиеся заряды и токи. Сила, с которой поле действует **на движущийся заряд**, – сила Лоренца:

$$\dot{\mathbf{F}} = q[\dot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{B}}], \quad (25)$$

где q – заряд; \dot{V} – скорость заряда; \dot{B} – индукция магнитного поля. Из приведенной формулы видно, что магнитное поле не действует на заряды, движущиеся вдоль линий индукции \dot{B} ; траектория такого заряда – прямая линия; скорость его постоянна. На заряд, влетающий в поле под прямым углом к линиям вектора \dot{B} , действует максимально возможная сила Лоренца; заряд движется по круговой траектории с постоянной по величине скоростью.

Сила, с которой магнитное поле действует на помещенный в него **проводник с током**, – сила Ампера:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \dot{\mathbf{B}}], \quad (26)$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током I ; $\dot{\mathbf{B}}$ – вектор магнитной индукции. Закон Ампера применяется для определения **силы взаимодействия двух токов**: два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с силой

$$dF = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{R} dl, \quad (27)$$

где I_1 и I_2 – силы взаимодействующих токов; dl – элемент проводника; R – расстояние между проводниками. Если указанные токи имеют противоположные направления, то указанная сила является силой отталкивания.

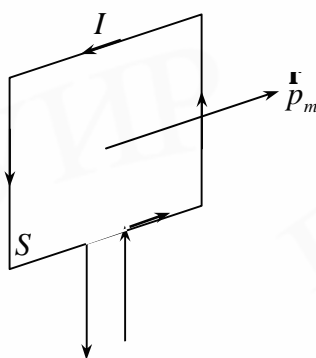


Рис. 8

На контур с током I , помещенный в магнитное поле с индукцией $\dot{\mathbf{B}}$, действует механический вращающий момент, оказывающий ориентирующее действие (рис. 8):

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{p}}_m, \dot{\mathbf{B}}], \quad (28)$$

где $p_m = IS$ – модуль магнитного момента контура с током (направление вектора $\dot{\mathbf{p}}_m$ определяется по правилу правого винта).

Анализ формулы (28) показывает, что механический вращающий момент не действует на контур, помещенный перпендикулярно линиям индукции $\dot{\mathbf{B}}$; а

на контур, плоскость которого параллельна линиям индукции, действует максимальный вращающий момент.

Потоком вектора \vec{B} через поверхность S называется скалярная физическая величина, определяемая интегралом вида

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS, \quad (29)$$

где $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление нормали к площадке dS ; α – угол между вектором \vec{B} и нормалью к поверхности.

В простейшем случае однородного поля и плоской поверхности магнитный поток равен

$$\Phi = BS \cos \alpha. \quad (30)$$

Если магнитный поток изменяется со временем, то в замкнутом проводящем контуре, которым ограничена поверхность S , возникает ЭДС индукции:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (31)$$

В частности, ЭДС индукции может возникать вследствие изменения тока, протекающего по контуру; в этом случае она называется ЭДС самоиндукции и определяется формулой

$$E_i = -L \frac{dI}{dt}. \quad (32)$$

Коэффициент L называется индуктивностью контура. Индуктивность соленоида равна

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l}, \quad (33)$$

где μ – магнитная проницаемость вещества, заполняющего соленоид; S – площадь сечения соленоида; N – число витков; l – длина соленоида; μ_0 – магнитная постоянная.

Магнитное поле обладает энергией. Энергия магнитного поля, связанного с контуром индуктивностью L , по которому протекает ток I , определяется формулой

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad (34)$$

а с соленоидом –

$$W = \frac{B^2 V}{2\mu\mu_0}, \quad (35)$$

где $V = lS$ – объем соленоида.

Объемная плотность энергии – это энергия, содержащаяся в единичном объеме,

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (36)$$

Магнитное поле может создаваться также изменяющимся во времени электрическим полем, а электрическое – переменным магнитным полем, т.е. электрическое и магнитное поля не могут существовать обособленно и образуют в пространстве электромагнитное поле. Его описывают векторами: \dot{E} (вектор напряженности электрического поля) и \dot{B} (вектор магнитной индукции). Для описания влияния электромагнитного поля на материальные объекты вводят вторую группу векторов: j (плотность электрического тока проводимости), \dot{D} (вектор электрического смещения) и \dot{H} (вектор напряженности магнитного поля). Пространственные и временные производные пяти указанных векторов связаны уравнениями Максвелла. Первая пара уравнений связывает основные характеристики поля \dot{E} и \dot{B} , вторая – вспомогательные характеристики j , \dot{D} и \dot{H} :

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -\frac{\partial \dot{B}}{\partial t}, \quad (37)$$

$$\operatorname{div} \dot{B} = 0, \quad (38)$$

$$\operatorname{rot} \dot{H} = j + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \dot{D} = r, \quad (39)$$

где $\text{rot } \overset{\mathbf{r}}{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ – ротор вектора $\overset{\mathbf{r}}{A}$ (векторная величина);

$\text{div } \overset{\mathbf{r}}{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ – дивергенция вектора (скалярная величина).

Уравнение (37) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме:

$$\oint_L \overset{\mathbf{r}}{E} \cdot d\overset{\mathbf{r}}{l} = - \int \left(\frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{B}}{\partial t}, d\overset{\mathbf{r}}{S} \right). \quad (40)$$

Уравнение (38) выражает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим; в интегральной форме

$$\oint_S \overset{\mathbf{r}}{B} \cdot d\overset{\mathbf{r}}{S} = 0. \quad (41)$$

Уравнение (39) является обобщением на переменные поля эмпирического закона Био–Савара: магнитное поле порождается не только токами, текущими в проводнике, но и переменными электрическими полями в диэлектриках или вакууме.

Полный ток $\oint_L \overset{\mathbf{r}}{H} \cdot d\overset{\mathbf{r}}{l}$, равный сумме тока смещения $\int_S \left(\frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{D}}{\partial t}, d\overset{\mathbf{r}}{S} \right)$ и тока проводимости $\int_S (j, d\overset{\mathbf{r}}{S})$, всегда является замкнутым:

$$\oint_L \overset{\mathbf{r}}{H} \cdot d\overset{\mathbf{r}}{l} = \int_S \left(\left(j + \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{D}}{\partial t} \right), d\overset{\mathbf{r}}{S} \right). \quad (42)$$

Уравнение (40) является математической формулировкой теоремы Гаусса для электрического поля и подтверждает, что источниками вектора электрического смещения $\overset{\mathbf{r}}{D}$ являются свободные заряды; в интегральной форме указанное уравнение выглядит следующим образом:

$$\oint_S \overset{\mathbf{r}}{D} \cdot d\overset{\mathbf{r}}{S} = \int_V \rho dV. \quad (43)$$

Для того чтобы при заданном распределении зарядов и токов уравнения Максвелла допускали единственное решение, к ним добавляют соотношения, описывающие поведение веществ под влиянием поля – материальные уравнения. Для большинства изотропных сред указанные уравнения имеют линейную форму:

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu \mu_0 \dot{\mathbf{H}}, \quad (45)$$

$$\dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{j}} + \sigma \dot{\mathbf{E}}, \quad (46)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды; σ – удельная электропроводность; $\dot{\mathbf{j}}$ – плотность сторонних токов (токов, поддерживаемых любыми силами, кроме сил электрического поля).

Из уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитных волн – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Электромагнитная волна характеризуется в каждый момент времени правой тройкой взаимно перпендикулярных векторов $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{V}}$ (рис. 9).

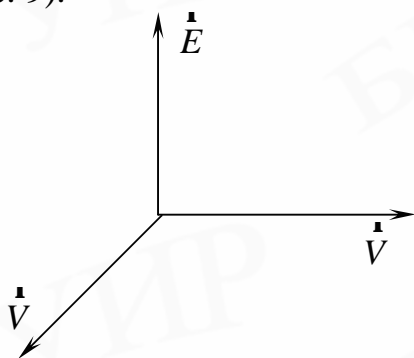


Рис. 9

Электромагнитные волны являются поперечными; в вакууме они распространяются со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в среде – со скоростью

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (47)$$

Напряженность электрического поля волны $\dot{\mathbf{E}}$ и индукция магнитного поля волны $\dot{\mathbf{B}}$ изменяются синфазно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \\ \dot{\mathbf{B}} &= \dot{\mathbf{B}}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

(для плоской электромагнитной волны) и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad \Delta \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (49)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; \dot{V} – фазовая скорость волны.

Электромагнитные волны обладают импульсом и переносят энергию вдоль направления своего распространения. Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Умова–Пойнтинга – рассчитывается по формуле

$$\dot{S} = [\dot{E}, \dot{H}], \quad (50)$$

где вектор \dot{H} определяется уравнением (45). Для мгновенных значений E и H справедливо соотношение

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (51)$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Примеры решения задач

Пример 1. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 0,1$ течет ток $I = 2$ А. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца и в точке C , расположенной на оси на расстоянии $a = 0,1$ м от центра кольца.

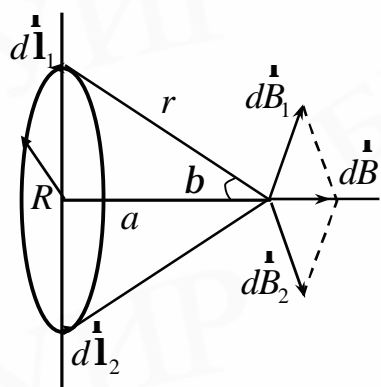


Рис. 4.1

Решение. Воспользуемся законом Био–Савара–Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[dl, r]}{r^3}. \quad (4.1)$$

Векторы индукции магнитного поля dB_1 и dB_2 в точке C от двух равных по величине элементов кругового тока dl_1 и dl_2 , расположенных на концах одного и того же диаметра кольца, не совпадают по направлению (рис. 4.1), однако, равны по абсолютной величине. Тогда индукция магнитного поля от элементов с током равна

$$dB = 2dB_1 \sin b = \frac{2dB R}{r}, \quad (4.2)$$

так как $dB_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$, а $r^2 = R^2 + a^2$, то

$$dB = \frac{2\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{2\mu_0 I dl}{4\pi (R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (4.3)$$

Результирующая индукция магнитного поля в точке C равна

$$B_C = \int_0^B dB = \mu_0 \frac{IR}{2\pi (R^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{\pi R} dl = \mu_0 \frac{IR^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (4.4)$$

Для центра кольца $a = 0$ формула (4.4) будет иметь вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (4.5)$$

Произведем вычисления по формулам (4.4) и (4.5):

$$B_c = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-2} / 2(10^{-2} + 10^{-2})^{3/2} \approx 5,5 \cdot 10^{-16} \text{ (Тл)},$$

$$B_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 / 2 \cdot 10^{-1} \approx 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}.$$

Пример 2. Тонкая медная полоса шириной a изгибается и образует цилиндрическую поверхность, радиус которой R . Определить индукцию магнитного поля в центре одного из оснований.

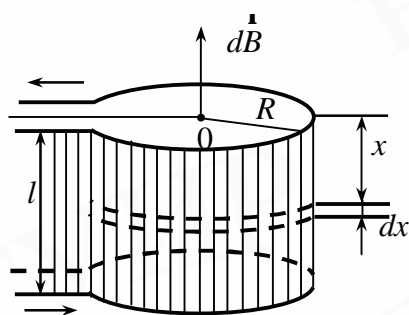


Рис. 4.2

Решение. На расстоянии x от верхнего основания цилиндра на боковой поверхности выделим узкую полоску шириной dx (рис. 4.2). Величина тока, проходящего по этой полоске $dI = \frac{I dx}{a}$, а индукция магнитного поля, создаваемая этим током в точке O , равна (см. решение задачи 1)

$$dB = \frac{m_0 R^2 dI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{m_0 R^2 I dx}{2a(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (4.6)$$

Результирующая индукция магнитного поля в центре основания цилиндра в точке O , создаваемая током, протекающим по всей медной полосе, равна

$$B = m_0 \frac{R^2 I}{2a} \int_0^a \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = m_0 \frac{R^2 I}{2a} \frac{x}{R^2 \sqrt{R^2 + x^2}} \Bigg|_0^a = \frac{m_0 I}{2\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Аналогичным образом можно найти индукцию магнитного поля в точке, расположенной на оси цилиндра. Для этого необходимо изменить лишь пределы интегрирования.

Пример 3. Длинный диэлектрический цилиндр радиусом R статически поляризован так, что во всех точках поляризованность $P = ar$, где a – положительная постоянная, r – расстояние от оси. Цилиндр привели во вращение во-

круг его оси с угловой скоростью. Найти индукцию B магнитного поля в центре цилиндра.

Решение. В диэлектрическом цилиндре в каждой точке будет отлична от нуля объемная плотность заряда r' , по абсолютной величине равная дивергенции поляризованности r , т.е. $r' = \frac{\partial P}{\partial r} = a$.

Выделим в цилиндре тонкий кольцевой слой радиусом r и толщиной dr . Объем единицы длины этого слоя равен $2\pi r dr$. В этом слое сосредоточен заряд

$$dq = 2\pi r r' dr = 2\pi a r dr. \quad (4.7)$$

Вращаясь с угловой скоростью ω , этот заряд создает ток

$$dI = \frac{dq\omega}{2\pi} = a r \omega dr. \quad (4.8)$$

Результирующий ток на единицу длины цилиндра

$$I = \int_0^R dI = a\omega \int_0^R r dr = \frac{1}{2} a\omega R^2. \quad (4.9)$$

По закону полного тока индукция магнитного поля в центре соленоида $B = \mu_0 nI$ определяется величиной тока, приходящего на единицу длины соленоида. Аналогично и в данном случае:

$$B = \mu_0 I = \frac{1}{2} \mu_0 a\omega R^2. \quad (4.10)$$

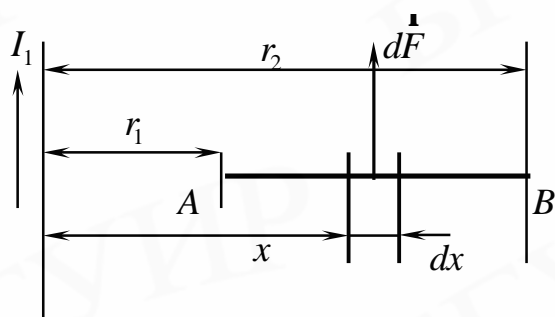


Рис. 4.3

Пример 4. Определить силу, действующую на прямой проводник AB , со стороны магнитного поля бесконечно длинного тока $I_1 = 10$ А (рис. 4.3). Проводник лежит в плоскости тока I_1 и перпендикулярен к нему. Расстояние $r_2 = 5r_1$. По проводнику течет ток $I_1 = 5$ А.

Решение. Проводник AB находится в неоднородном магнитном поле бесконечного прямолинейного проводника. Выделим в проводнике AB элемент длиной dx , находящийся на расстоянии x от бесконечного проводника. На этот элемент будет действовать сила

$$dF = I_2 B dx, \quad (4.11)$$

где B – индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током I_1 в месте расположения элемента dx .

Индукция магнитного поля на расстоянии x от бесконечно длинного проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$

Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}. \quad (4.12)$$

Сила, действующая на проводник:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln r_2 r_1.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5}{2 \cdot 3,14} \cdot \ln 5 \approx 1,7 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 5. Электрон движется по винтовой линии радиусом R и шагом h в магнитном поле, индукция которого B . Определить скорость электрона.

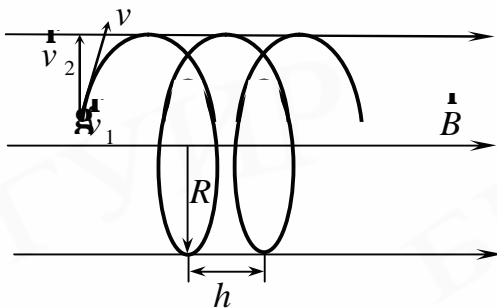


Рис. 4.4

Решение. Разложим вектор скорости v электрона на две составляющие (рис. 4.4): V_1 – направленную вдоль линий магнитной индукции и V_2 – перпендикулярную этим линиям. Так как

как

сила Лоренца является центростремительной силой, то можно записать

$$\frac{mv_2^2}{R} = ev_2B. \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.13) находим

$$v_2 = \frac{eBR}{m}. \quad (4.14)$$

Период обращения электрона

$$T = \frac{2\pi R}{v_2} = \frac{2\pi m}{Be}. \quad (4.15)$$

Скорость движения электрона вдоль линий магнитной индукции

$$v_1 = \frac{h}{T} = \frac{hBe}{2\pi m}. \quad (4.16)$$

Полная скорость движения электрона

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\frac{B^2 e^2 R^2}{m^2} + \frac{h^2 B^2 e^2}{(2\pi m)^2}} = \frac{Be}{2\pi m} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}.$$

Пример 6. По тонкому стержню длиной $l = 2 \cdot 10^{-1}$ м равномерно распределен заряд $q = 2,4 \cdot 10^{-7}$ Кл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10^{-1}$ с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить: 1) магнитный момент, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса $\frac{p_m}{l}$, если стержень имеет массу $m = 1,2 \cdot 10^{-2}$ кг.

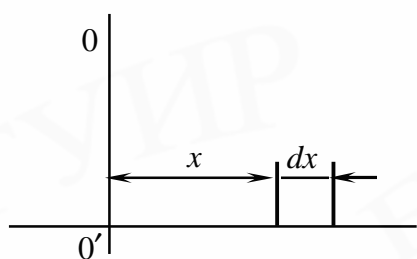


Рис. 4.5

Решение. 1. На расстоянии x от оси вращения выделим элемент стержня длиной dx (рис. 4.5), на этом элементе находится заряд $dq = \frac{qdx}{l}$. Это заряд, вращающийся с угловой скоростью ω , создает ток

$$dI = \frac{w}{2p} dq = \frac{wqdx}{2pl}. \quad (4.17)$$

Магнитный момент этого тока

$$P_m = p x^2 dI = \frac{wqdx}{2pl} p x^2 = \frac{wqx^2 dx}{2l}. \quad (4.18)$$

2. Так как направление магнитных моментов всех элементов совпадает, то полный магнитный момент, обусловленный вращением заряженного стержня:

$$P_m = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{wqx^2 dx}{2l} = \frac{wqx^3}{6l} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{wql^2}{24}. \quad (4.19)$$

Механический момент системы $L = Iw$. Так как момент инерции стержня равен $I = \frac{ml^2}{12}$, то $L = \frac{ml^2 w}{12}$.

Тогда

$$\frac{P_m}{L} = \frac{\frac{wql^2}{24}}{\frac{ml^2 w}{12}} = \frac{q}{2m}, \quad \frac{P_m}{L} = 10^{-5} \text{ Кл/кг}. \quad (4.20)$$

Пример 7. Имеется круговой виток с током I . Найти интеграл $\int B dx$ вдоль оси витка в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Объяснить полученный результат.

Решение. Пусть радиус витка кругового тока равен R . Индукция магнитного поля на оси кругового тока на расстоянии x от плоскости витка:

$$B = m_0 \frac{R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тогда линейный интеграл от вектора индукции магнитного поля вдоль оси витка равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} B dx = m_0 \frac{IR^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = m_0 \frac{R^2 Jx}{2R^2 \sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = m_0 I.$$

Следовательно, циркуляция вектора индукции магнитного поля численно равна сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на $m_0 I$.

Пример 8. Прямоугольный треугольник лежит в плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости, изменяется по закону $B = \frac{A}{x}$, где $A = 10^4$ Тл·м⁻¹. Найти поток вектора B через этот треугольник, если $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 10$ см (рис. 4.6).

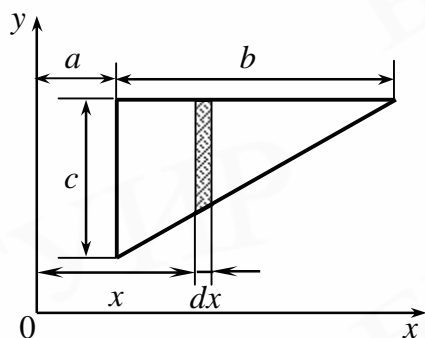


Рис. 4.6

Решение. Выделим в треугольнике элементарную площадку c/y шириной dx и находящуюся на расстоянии y от начала координат. Магнитный поток, пронизывающий эту площадку:

$$d\Phi = BdS. \quad (4.21)$$

Так как

$$B = \frac{A}{x}, \quad dS = hdx,$$

то

$$d\Phi = \frac{Ahdx}{x}.$$

Высоту h найдем из соотношения подобия

$$\frac{h}{c} = \frac{a+b-x}{b} \quad \text{или} \quad h = \frac{c(a+b-x)}{b}.$$

Тогда

$$d\Phi = \frac{A}{x} c \left[\frac{(a+b-x)}{b} \right] dx.$$

Магнитный поток, пронизывающий треугольник:

$$\Phi = \int_a^{a+b} Ac(a+b-x) \frac{dx}{bx} = \frac{Ac}{b}(a+b) \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} - \frac{Ac}{b} \int_a^{a+b} dx = Ac \left(\frac{a+b}{b} \ln \frac{a+b}{a} - 1 \right).$$

Произведем вычисления:

$$\Phi = 10^4 \cdot 0,1 \left(\frac{0,18}{0,08} - 1 \right) \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ Вб.}$$

Пример 9. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $a = 10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 5$ А. Какую надо совершить работу, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $b = 20$ см?

Решение. Предполагаем, что один из проводников неподвижен, а второй перемещается бесконечно медленно, чтобы не возникла ЭДС индукции и не изменился за счет этого ток в проводнике. Работу по перемещению проводника можно определить следующим образом; $A = \int_a^b F dx$, где F – сила взаимодействия между проводниками, находящимися на расстоянии x друг от друга.

Так как в расчете на единицу длины проводников

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}, \quad (4.22)$$

то

$$A = \int_a^b \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi x} dx = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad A = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.} \quad (4.23)$$

Пример 10. Катушка, содержащая 200 витков, сечением 50 см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией $0,5$ Тл с частотой 20 Гц. Найти зависимость ЭДС как функцию времени и мгновенное значение ЭДС, соответствующее повороту катушки на угол 30° .

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции определяется из уравнения Фарадея:

$$e_i = -\frac{dy}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – магнитный поток, N – число витков.

При вращении катушки магнитный поток, пронизывающий рамку, равен

$$\Phi = BS \cdot \cos \omega t,$$

где B – магнитная индукция поля, S – площадь сечения катушки, ω – циклическая частота вращения.

Учитывая, что $\omega = 2\pi n$, получим зависимость ЭДС от времени:

$$e_i = 2\pi n NBS \cdot \sin \omega t.$$

Мгновенное значение ЭДС при повороте на 30° равно

$$e = 2\pi n NBS \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 200 \cdot 0,5 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} = 3,14 \text{ В.}$$

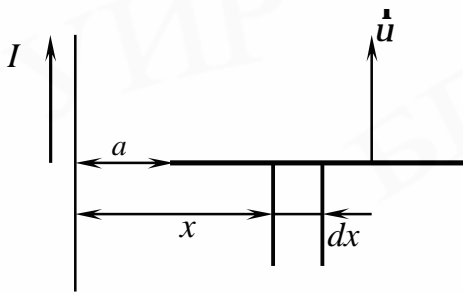


Рис. 4.7

Пример 11. Металлический стержень длиной $l = 50$ см движется поступательно параллельно прямолинейному проводнику с током $I = 10$ А со скоростью $u = 20$ см/с (рис. 4.7). Ближайший конец стержня находится на расстоянии $a = 0,25$ м от проводника. Вычислить ЭДС индукции, возникшую в стержне.

Решение. Выделим в стержне элемент длиной dx , находящийся на расстоянии x от проводника. Индукция магнитного поля на расстоянии x от длинного прямолинейного проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad \mu = 1. \quad (4.24)$$

В элементе стержня dx будет возбуждаться электродвижущая сила индукции:

$$de_i = B u dx = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right] u dx. \quad (4.25)$$

Полная электродвижущая сила индукции, возбуждаемая в стержне:

$$e_i = \frac{\mu_0 I u}{2\pi} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I u}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}, \quad e_i \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ В.} \quad (4.26)$$

Пример 12. Какое сечение должен иметь соленоид длиной $l = 50$ см с железным сердечником, чтобы при токе $I = 0,2$ А энергия магнитного поля в нем была $W = 0,3$ Дж, если обмотка соленоида имеет $N = 4000$ витков.

Решение. Из формулы индуктивности соленоида $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$ найдем его се-

чение:

$$S = \frac{Ll}{\mu\mu_0 N^2}. \quad (4.27)$$

Индуктивность найдем из формулы энергии магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \text{ Так как } m = \frac{B}{\mu_0 H}, \text{ а } H = \frac{IN}{l},$$

то

$$S = \frac{2Wl\mu_0 H}{I^2 B \mu_0 N^2} = \frac{2WlH}{I^2 B N^2}. \quad (4.28)$$

Напряженность магнитного поля

$$H = \frac{IN}{l} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ А/м. Зная } H, \text{ по гра-}$$

фику, устанавливающему связь между H и B для железного сердечника (рис. 4.8), определим B :

$$B = 1,51 \text{ Тл.}$$

Тогда окончательно можем найти

$$S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Пример 13. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 1$ Тл). Определить работу A , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1) $j_1 = 90^\circ$; 2) $j_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

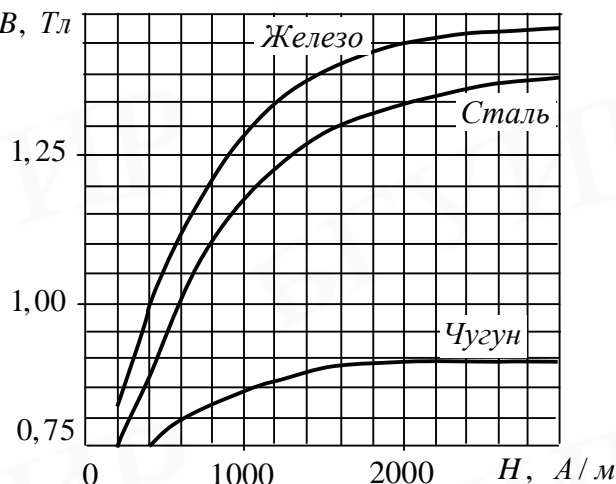


Рис. 4.8

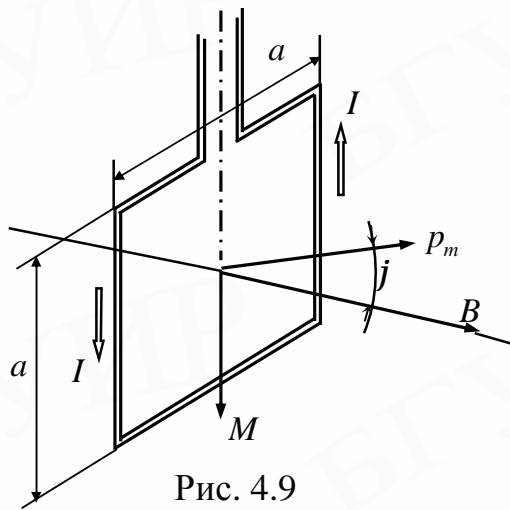


Рис. 4.9

Решение. Как известно, на контур с током в магнитном поле действует момент силы (рис. 4.9):

$$M = p_m B \sin j, \quad (4.29)$$

где $p_m = IS = Ia^2$ – магнитный момент контура; B – магнитная индукция; j – угол между векторами p_m (направлен по нормали к контуру) и B .

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент силы равен нулю ($M = 0$), а значит, $j = 0$, т.е. векторы p_m и B сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил (4.29) будет стремиться вернуть контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота j), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме $dA = Mdj$. Учитывая формулу (4.29), получаем

$$dA = IBa^2 \sin j \, dj.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^j \sin j \, dj. \quad (4.30)$$

Работа при повороте на угол $j_1 = 90^\circ$:

$$A = IBa^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin j \, dj = IBa^2 \left(-\cos j \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = IBa^2. \quad (4.31)$$

Выразим числовые значения величин в единицах СИ ($I = 100$ А, $B = 1$ Тл, $a = 10$ см = 0,1 м) и подставим в (4.31):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Работа при повороте на угол $j_2 = 3^\circ$. В этом случае, учитывая, что угол j_2 мал, заменим в выражении (4.30) $\sin j \approx j$:

$$A = I B a^2 \int_0^{j_2} j \, dj = \frac{1}{2} I B a^2 j_2^2. \quad (4.32)$$

Выразим угол j_2 в радианах. После подстановки числовых значений величин в (4.32) найдем

$$A_2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,0523)^2 \text{ Дж} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,37 \text{ мДж}.$$

Задачу можно решить и другими способами.

1. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, пронизывающего контур:

$$A = -I \Delta \Phi = I (\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения; Φ_2 – после перемещения.

Если $j_1 = 90^\circ$, то $\Phi_1 = BS$, $\Phi_2 = 0$. Следовательно,

$$A = IBS = I B a^2,$$

что совпадает с (4.31). Для $j_2 = 3^\circ$ будем иметь (4.32).

2. Воспользуемся выражением для механической потенциальной энергии контура с током в магнитном поле:

$$\Pi(j) = -p_m B \cos j.$$

Тогда работа внешних сил

$$A = \Delta \Pi = \Pi_2 - \Pi_1,$$

или

$$A = p_m B (\cos j_1 - \cos j_2).$$

Так как $p_m = I a^2$, $\cos j_1 = 1$ и $\cos j_2 = 0$, то

$$A = I B a^2,$$

что также совпадает с (4.31).

Пример 14. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 5$ см и сопротивлением $R = 10$ мОм находится в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл). Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q , который пройдет по рамке, если магнитное поле выключить.

Решение. При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникает ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить, воспользовавшись законом Ома для полной цепи $I_i = \mathcal{E}_i / R$, R – сопротивление рамки. Тогда

$$I_i R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как мгновенное значение силы индукционного тока $I_i R = \frac{dQ}{dt}$, то это выражение можно переписать в виде

$$\frac{dQ}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ откуда } dQ = -\frac{d\Phi}{R}. \quad (4.33)$$

Проинтегрировав выражение (4.33), найдем

$$\int_0^Q dQ = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi, \text{ или } Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметив, что при выключенном поле (конечное состояние) $\Phi_2 = 0$, последнее равенство переписывается в виде

$$Q = \frac{\Phi_1}{R}. \quad (4.34)$$

Найдем магнитный поток Φ_1 . По определению магнитного потока имеем

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

где S – площадь рамки.

В нашем случае (рамка квадратная) $S = a^2$. Тогда

$$\Phi_1 = Ba^2 \cos a. \quad (4.35)$$

Подставляя (4.35) в (4.34), получим

$$Q = \frac{Ba^2}{R} \cos a.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу заряда (Кл):

$$\frac{[B] [a^2]}{[R]} = \frac{1 \text{ Тл} \cdot (1 \text{ м}^2)}{1 \text{ Ом}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ В}} = 1 \text{ Кл}.$$

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{3/3}}{0,01} \text{ Кл} = 8,67 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 8,67 \text{ мКл}.$$

Пример 15. В электрической цепи, состоящей из резистора сопротивлением 20 Ом и катушки индуктивностью 0,06 Гн, протекает ток 20 А. Определить силу тока в этой цепи через 0,2 мс после ее размыкания.

Решение. Сила тока в электрической цепи при отключении источника тока убывает экспоненциально со временем и выражается формулой

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где I_0 – сила тока до отключения источника; R – сопротивление цепи; L – индуктивность цепи.

Величина тока в момент t равна

$$I(t) = 20 \cdot e^{-\frac{20}{6 \cdot 10^{-2}} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 18,7 \text{ А}.$$

Таблица вариантов задач к контрольной работе №4

Варианты	Номера задач							
1	401	411	421	431	441	451	461	471
2	402	412	422	432	442	452	462	472
3	403	413	423	433	443	453	463	473
4	404	414	424	434	444	454	464	474
5	405	415	425	435	445	455	465	475
6	406	416	426	436	446	456	466	476
7	407	417	427	437	447	457	467	477
8	408	418	428	438	448	458	468	478
9	409	419	429	439	449	459	469	479
0	410	420	430	440	450	460	470	480

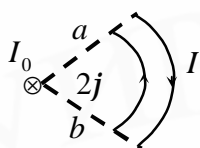


Рис. 4.10

401. В поле длинного прямого провода с током I_0 находится контур с током I . Плоскость контура перпендикулярна проводнику. Найти момент сил Ампера, действующих на этот контур. Радиусы

дуг окружностей a и b , края контура видны под углом 2φ .

402. Ток I_1 течет по двум бесконечно длинным тонким проводникам в направлении оси OZ , которые пересекают ось OX в точках $-a$ и a . Проводник с током I_2 течет параллельно оси OX на расстоянии $2a$ от нее. Найти величину индукции результирующего магнитного поля на оси OY в точке $y = a$.

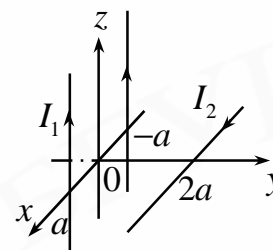


Рис. 4.11

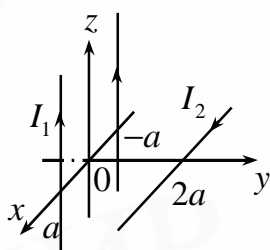


Рис. 4.12

403. Ток I_1 течет по двум бесконечно длинным тонким проводникам в направлении оси OZ , которые пересекают ось OX в точках $-a$ и a . Проводник с током I_2 течет параллельно оси OX на расстоянии $2a$ от нее. Найти проекцию B_y индукции результирующего маг-

нитного поля в точке $y = a$.

404. Ток $I = 20$ А идет по длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти напряженность магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе этого угла и отстоящей от вершины угла на $l = 10$ см.

405. Ток I течет по бесконечно длинной тонкой проводящей ленте в направлении оси OZ , при этом он равномерно распределен по ширине проводника от $-a$ до a вдоль оси OX . Найти величину

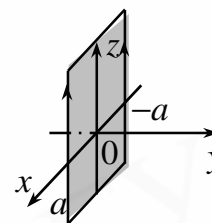


Рис. 4.13

индукции магнитного поля как функцию координаты $y > 0$.

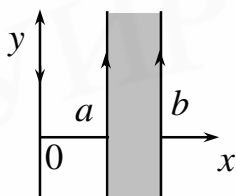


Рис. 4.14

406. Ток I_1 течет по бесконечно длинному линейному проводнику, направленному против оси OY , а I_2 – равномерно распределен по бесконечной проводящей ленте шириной $(b - a)$. Найти величину индукции магнитного поля как функцию координаты x на интервале $[0, a]$.

407. Ток I_1 течет по бесконечно длинному линейному проводнику, направленному вдоль оси OY , а I_2 – равномерно распределен по бесконечной проводящей ленте шириной $(b - a)$. Найти величину индукции магнитного поля как функцию координаты x на интервале $[0, a]$.

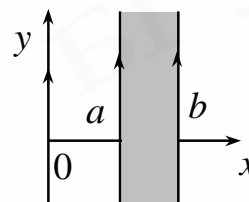


Рис. 4.15

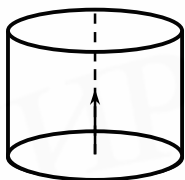


Рис. 4.16

408. Непроводящая цилиндрическая (боковая) поверхность радиусом R и высотой H , заряженная равномерно электричеством с внешней стороны, вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Величина индукции магнитного поля в геометри-

ческом центре нижней части поверхности равна B . Определить величину поверхностной плотности заряда на цилиндрической поверхности.

409. Непроводящая сфера радиусом R , заряженная равномерно электричеством с внешней стороны, вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Величина индукции магнитного поля в ее центре равна B . Определить величину поверхностной плотности заряда на сфере.

410. Непроводящий тонкий диск радиусом R , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью заряда σ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти величину индукции магнитного поля в центре диска.

411–413. По тонкому прямолинейному проводнику протекает постоянный ток I . Найти индукцию магнитного поля на расстоянии b от проводника в точке O для случаев, указанных на рис. 4.17 (a – для **411** задачи; b – для **412**; $в$ – для **413**).

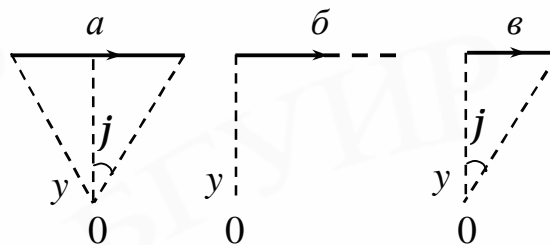


Рис. 4.17

414–415. По тонкому проводнику в виде половины окружности радиусом R течет ток I . Найти индукцию магнитного поля в точке O в случаях, указанных на рис. 4.18 (a – для **414** задачи; $б$ – для **415**).

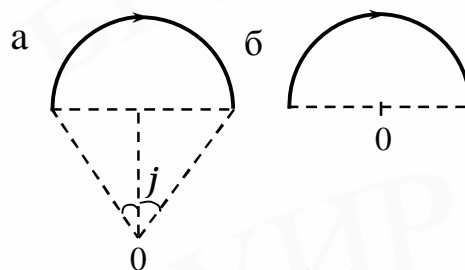


Рис. 4.18

416–417. Найти индукцию магнитного поля в точке O для тонких проводников с током I , имеющих конфигурацию, указанную на рис. 4.19 (a – для задачи **416**; $б$ – для **417**).

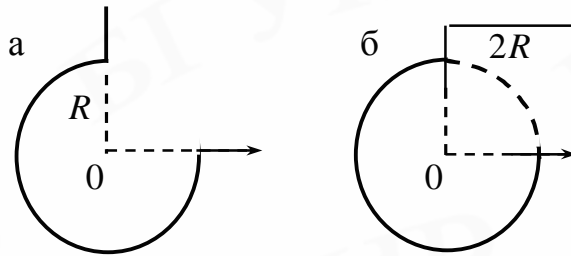


Рис. 4.19

418–420. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого бесконечным длинным проводником с током I , изогнутым так, как показано на рис. 4.20 (а – для задачи 418; б – для 419; в – для 420).

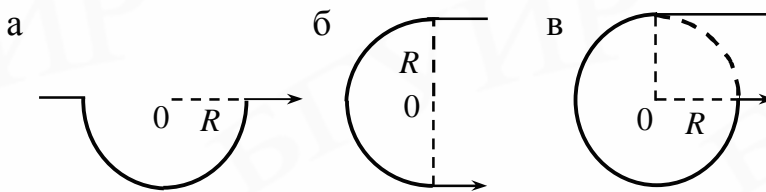


Рис. 4.20

421. Протон влетел в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям магнитной индукции ($B = 0,05$ Тл) и движется по спирали, радиус которой $R = 2,5$ см. Определить кинетическую энергию протона.

422. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле ($B = 0,01$ Тл). Определить момент импульса, которым обладает частица при движении в магнитном поле, если радиус траектории частицы $R = 0,5$ мм.

423. Протон и α -частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору индукции этого магнитного поля. Сравнить радиусы кривизны траекторий.

424. Электрон движется в однородном магнитном поле ($B = 0,2$ Т) перпендикулярно линиям индукции. Определить силу, действующую на электрон со стороны поля, если радиус кривизны траектории $R = 0,2$ см.

425. Два электрона движутся в одном и том же магнитном поле по круговым траекториям радиусом R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$). Сравнить их угловые скорости.

426. Однозарядные ионы с массовыми числами M_1 и M_2 ($M_1 > M_2$) движутся в однородном магнитном поле по круговым траекториям одинакового радиуса. Сравнить их импульсы.

427. Два однозарядных иона с массовыми числами M_1 и M_2 ($M_1 > M_2$) движутся в однородном магнитном поле по круговым орбитам. Сравнить их периоды вращения.

428. Два однозарядных иона $^{12}\text{C}^+$ и X^+ , пройдя одну и ту же ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Ион $^{12}\text{C}^+$ описал дугу окружности радиусом $R_1 = 2$ см, а ион X^+ — $R_2 = 2,31$ см. Определить массовое число иона X^+ .

429. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл по окружности радиусом $R = 0,8$ см. Определить кинетическую энергию электрона.

430. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 800$ В и, влетев в однородное магнитное поле $B = 47$ мТл, стал двигаться по винтовой линии с шагом $h = 6$ см. Определить радиус R винтовой линии.

431. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной $a = 10$ см, течет ток $I = 20$ А. Плоскость квадрата составляет угол $\alpha = 20^\circ$ с линиями индукции магнитного поля ($B = 0,1$ Тл). Вычислить работу, которую нужно совершить для удаления провода за пределы поля.

432. Плоский контур, площадь которого $S = 300$ см², находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается ток $I = 10$ А. Определить работу внешних сил по удалению контура за пределы поля.

433. Виток, по которому течет ток $I = 2$ А, свободно установился в магнитном поле с индукцией $B = 0,02$ Тл. Диаметр витка $d = 10$ см. Определить работу,

которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на 90° вокруг оси, совпадающей с его диаметром.

434. Прямой провод длиной $l = 40$ см, по которому течет ток $I = 20$ А, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. Какую работу совершат силы, действующие на провод со стороны поля, чтобы переместить его на расстояние $a = 40$ см перпендикулярно линиям индукции и проводу?

435. Виток радиусом $R = 20$ см, по которому течет ток $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле напряженностью $H = 1000$ А/м. Виток повернули вокруг диаметра на угол $\alpha = 30^\circ$. Какая при этом совершена работа?

436. Квадратная рамка с током $I = 0,9$ А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом с током $I_1 = 5$ А. Сторона рамки $a = 8$ см. Ближайшая сторона рамки отстоит от провода на $b = 4$ см. Определить работу, которую нужно совершить для поворота рамки вокруг дальней стороны на угол $\alpha = 180^\circ$.

437. В однородном магнитном поле ($B = 0,01$ Тл) находится прямой провод длиной $l = 8$ см, расположенный под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям индукции. По проводу течет ток силой $I = 2$ А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние $a = 5$ см. Найти совершенную работу сил поля.

438. По мягкому проводу, согнутому в форме квадрата со стороной $a = 10$ см, течет ток $I = 10$ А. Перпендикулярно плоскости квадрата возбуждено внешнее магнитное поле ($B = 0,1$ Тл), по направлению совпадающее с магнитным полем тока. При этом провод деформировался и принял форму кольца. Какая работа была совершена при этом? Работой против упругих сил пренебречь.

439. По тонкому проводу, согнутому в виде квадрата со стороной $a = 8$ см, течет ток $I = 2$ А. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ($B = 0,2$ Тл), перпендикулярное плоскости квадрата. Какая работа будет совершена против сил поля, если квадрат вытянуть в линию, потянув за противоположные вершины?

440. На расстоянии $a = 1$ м от длинного прямого проводника с током $I = 500$ А свободно установилось кольцо радиусом $R = 1$ см с током $I_1 = 10$ А. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть кольцо вокруг диаметра на угол $\alpha = 180^\circ$? Поле в пределах кольца считать однородным.

441. В однородном магнитном поле с индукцией $0,4$ Тл равномерно вращается рамка площадью 120 см² с частотой 10 оборотов в секунду относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции. Определить ЭДС как функцию времени и найти среднее значение ЭДС в рамке за время, когда магнитный поток изменяется от нуля до максимального значения.

442. Катушка из 200 витков с площадью поперечного сечения витков 10 см² вращается в магнитном поле индукцией $0,5$ Тл с угловой скоростью 20 рад/с. Ось вращения катушки проходит через ее диаметр и перпендикулярна линиям поля. Найти ЭДС как функцию времени и определить ее максимальное значение.

443. Квадратная рамка со стороной 10 см вращается в однородном магнитном поле $0,5$ Тл с частотой 120 об./мин. Определить ЭДС как функцию времени и рассчитать среднее значение ЭДС за четверть периода.

444. Катушка площадью 20 см², содержащая 500 витков, вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью $6,28$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной направлению поля. Найти ЭДС как функцию времени и мгновенное значение ЭДС в момент, когда плоскость катушки составляет 60° к линиям поля.

445. В магнитном поле бесконечного прямого тока $I_1 = 10$ А находится прямой проводник длиной 10 см и на него действует сила 10^{-5} Н. Этот проводник лежит в плоскости тока I_1 , перпендикулярен ему, и по нему течет ток I_2 . Расстояние от тока I_1 до ближайшего конца проводника 4 см. Найти I_2 , который течет по проводнику.

446. Круговой виток радиусом 10 см находится в магнитном однородном поле 0,2 Тл и имеет сопротивление 1 мОм. Плоскость витка составляет угол 30° с линиями индукции поля. Какой заряд протечет по витку при исчезновении магнитного поля, и когда виток расположится перпендикулярно полю?

447. Проводник длиной 20 см с током $I_1 = 2$ А находится в магнитном поле прямого тока I_2 , и на него действует сила $2 \cdot 10^{-5}$ Н. Ближайший конец проводника лежит в плоскости прямого тока на расстоянии 4 см. Проводник перпендикулярен прямому току и лежит с ним в одной плоскости. Найти величину прямого тока I_2 .

448. Бесконечно длинный прямой провод с током 100 А находится в одной плоскости с квадратной рамкой со стороной 10 см. Ближайшая сторона рамки отстоит от провода на расстоянии 5 см. Найти величину заряда, протекающего в рамке, при включении тока в проводе. Сопротивление рамки 0,05 Ом.

449. Круговое кольцо радиусом 1 см находится на расстоянии 120 см от прямого длинного провода с током. Кольцо имеет сопротивление 0,02 Ом и расположено так, что магнитный поток через него максимален. Определить силу тока в прямом проводе, если при его выключении в круглом кольце прошел заряд 5 мкКл.

450. В магнитном поле находится рамка, состоящая из 100 витков сечением 15 мм^2 . Плоскость рамки перпендикулярна полю, и при повороте ее на 180° вокруг диаметра по ней проходит заряд 5 мкКл. Определить индукцию магнитного поля, если сопротивление катушки 10 Ом.

451. В магнитное поле прямого тока 100 А поместили квадратную железную рамку со стороной 10 см таким образом, что ближайшая сторона рамки параллельна току и отстает от него на расстоянии 5 см. Какой ток надо пропустить через рамку, чтобы она «висела» в магнитном поле? Сечение провода рамки $0,5 \text{ мм}^2$. Каким будет равновесие?

452. Медная квадратная рамка со стороной 20 см и током 10 А вносится в поле прямого тока величиной 50 А. Сторона рамки параллельна прямому току, а сечение ее провода $0,3 \text{ мм}^2$. Найти расстояние между прямым током и ближайшей стороной рамки, если она «висит» в магнитном поле тока.

453. По прямому проводу течет ток 75 А. В магнитном поле этого тока «висит» алюминиевая квадратная рамка с током 15 А. Расстояние от тока до ближайшей стороны рамки 7,5 см. Найти сторону рамки, если сечение провода рамки $1,5 \text{ мм}^2$. Стороны рамки параллельны прямому току.

454. Квадратная серебряная рамка со стороной 6 см и током 10 А находится в магнитном поле прямого тока. Стороны рамки параллельны прямому току, а ближайшая сторона отстоит от тока на 4 см. Найти величину прямого тока, чтобы рамка «висела» в магнитном поле.

455. Электрический заряд 6 мкКл равномерно распределен по тонкому стержню длиной 50 см, который вращается с угловой скоростью 120 об./мин относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Найти магнитный момент, наводимый вращением заряженного стержня.

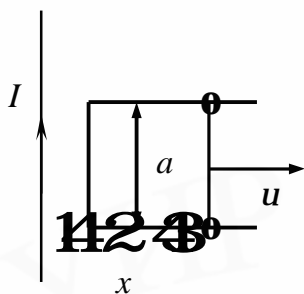


Рис. 4.21

456. Прямой провод с током $I = 20 \text{ А}$ и П-образный проводник расположены в одной плоскости (рис. 4.21). Переключатель длиной $a = 10 \text{ см}$ скользит без трения по направляющим. Найти ЭДС индукции, которая возникает в образовавшемся контуре, как функцию расстояния x между прямым проводом и переключателем.

457. Круговой контур радиусом 5 см, имеющий сопротивление 0,05 Ом, находится в однородном магнитном поле индукцией 50 мТл. Плоскость контура составляет угол 30° с направлением поля. Какой заряд протечет по контуру, если поле уменьшится наполовину?

458. Прямой стержень длиной 40 см, на котором равномерно распределен заряд 2 мкКл, вращается относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти угловую скорость вращения стержня, если наведенный магнитный момент, обусловленный вращением стержня, равен 9 нА/м^2 . Определить массу стержня, если отношение магнитного момента p_m к моменту импульса стержня равно 10 мкКл/кг .

459. Вблизи прямого тока в одной плоскости с ним находится квадратная рамка таким образом, что стороны рамки параллельны току. Ближайшая сторона рамки отстоит от прямого тока на расстоянии, равном ее стороне, 5 см. Сопротивление рамки 0,01 Ом. Найти силу прямого тока, если при его выключении прошел заряд 15 мкКл.

460. Круговой контур радиусом 1 см находится на расстоянии 1,2 м от прямого тока силой 50 А. Магнитный поток через контур максимален. Сопротивление контура 0,005 Ом. Найти заряд, который протекает в контуре, когда прямой ток уменьшится до 10 А.

461. Обмотка соленоида имеет стальной сердечник и содержит 600 витков, а его длина 40 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока возрастает с 0,2 до 1 А?

462. На длинный чугунный стержень сечением 10 см^2 намотан соленоид. Магнитный поток при силе тока 2 А составляет 250 мкВб. Найти число витков на единицу длины обмотки соленоида.

463. Соленоид диаметром 6 см и длиной 60 см намотан на стальной стержень в один слой 1000 витков провода. Определить индуктивность такого соленоида при пропускании по нему тока 1 А.

464. Поперечное сечение тороида 4 см^2 , а обмотка намотана на железный сердечник и имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. Определить магнитный поток в сердечнике, если по обмотке течет ток 2 А. Как и во сколько раз изменится поток, если ток уменьшится наполовину?

465. Объем соленоида со стальным сердечником 500 см^3 . При силе тока соленоида 0,6 А напряженность поля достигает 1200 А/м. Найти индуктивность соленоида. Как она изменится, если ток соленоида уменьшится на 0,2 А?

466. По катушке индуктивностью 0,2 Гн и сопротивлением 10 Ом течет ток от источника с внутренним сопротивлением 1,3 Ом. Через сколько времени сила тока достигнет 80 % от максимального значения?

467. Сопротивление электрической цепи 20 Ом. Через 8 мс после отключения источника тока значение тока размыкания уменьшилось в 20 раз. Найти индуктивность этой цепи.

468. В замкнутой электрической цепи течет электрический ток 10 А. Сопротивление цепи составляет 20 Ом, а индуктивность – 60 мГн. Определить силу тока в цепи через 0,2 мс после ее размыкания. Как изменится этот ток, если индуктивность уменьшить в 2 раза?

469. Катушка индуктивности 0,5 мГн и сопротивлением 75 Ом подключена к источнику тока с внутренним сопротивлением 25 Ом. Найти время, в течение которого ток в катушке достигает значения, отличающегося от максимального на 10 %.

470. Переменный ток с амплитудным значением 10 А и частотой 50 Гц протекает по катушке индуктивностью 1 мГн. Определить среднюю ЭДС самоиндукции этого синусоидального тока за интервал времени, в течение которого ток изменяется от нуля до максимального значения.

471. В магнитном поле индукцией 1,5 Тл под углом 45° к линиям магнитной индукции находится квадратный контур со стороной 5 см, в котором течет ток 70 А. Какую работу надо совершить, чтобы изменить форму контура на окружность, при постоянной силе тока?

472. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока $I = 60$ А, свободно устанавливается в однородном магнитном поле ($B = 20$ мТл). Диаметр витка $d = 10$ см. Какую работу A нужно совершить, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром на угол $\alpha = \pi/3$?

473. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью $S = 100$ см². Поддерживая в контуре постоянную силу тока $I = 50$ А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию B поля, если при перемещении контура была совершена работа $A = 0,4$ Дж.

474. Плоский контур с током $I = 50$ А расположен в однородном магнитном поле ($B = 60$ мТл) таким образом, что нормаль к контуру перпендикулярна

линиям магнитной индукции. Определить работу, совершаемую силами поля при медленном повороте контура на угол $\alpha = 30^\circ$ около оси, лежащей в плоскости контура.

475. Конденсатор емкостью 10 нФ зарядили до напряжения 100 В и подключили к катушке индуктивностью 1 мкГн. Найти величину тока как функцию времени и максимальный ток. Сопротивлением контура пренебречь.

476. Колебательный контур имеет емкость $C = 10$ нФ, индуктивность $L = 25$ мГн и активное сопротивление $R = 1$ Ом. Через сколько колебаний амплитудное значение тока уменьшится в e раз?

477. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ зарядили до напряжения $U = 100$ В и подключили к катушке индуктивностью $L = 0,1$ Гн и сопротивлением $R = 10$ Ом. Найти напряжение получившегося контура как функцию времени.

478. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 1,2$ нФ и катушку индуктивностью $L = 6$ мГн и активным сопротивлением $R = 0,5$ Ом. Какую среднюю мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 10$ В?

479. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 1200$ пФ и катушки индуктивности $L = 120$ мГн. Катушка помещена во внешнее магнитное поле, потокосцепление с которым $\psi = 1,5$ мкВб. В начальный момент времени внешнее поле выключили. Пренебрегая временем выключения поля по сравнению с периодом колебаний, найти ЭДС самоиндукции в катушке как функцию времени.

480. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 90$ нФ и катушки индуктивностью $L = 40$ мГн. Катушка помещена во внешнее магнитное поле, потокосцепление с которым $\psi = 0,5$ мкВб. В начальный момент времени внешнее поле выключили. Пренебрегая временем выключения поля по сравнению с периодом собственных колебаний, найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 2 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1968.
2. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1983.
3. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев, М. Ф. Федоров. – М. : Высш. шк., 1981.
4. Аксенов, В. В. Физика. Ч. 2 : метод. пособие / В. В. Аксенов [и др.]. – Минск : БГУИР, 1999.
5. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1980.

Учебное издание

Аксенов Валерий Васильевич
Березин Александр Васильевич
Григорьев Александр Александрович и др.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебно-методический комплекс

по курсу ФИЗИКА

для студентов всех специальностей БГУИР

заочной формы обучения

Редактор Н. В. Гриневич
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 22.01.2007.
Печать ризографическая.
Уч.-изд.л. 4,5.

Формат 60x84 1/16.
Гарнитура «Таймс».
Тираж 500 экз.

Бумага офсетная.
Усл.печ.л. 5,0.
Заказ 652.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6