Олимпиада по математике (БГУИР, 2010)

Задачи для студентов 1 курса.

Задача 1. Найдите $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

Решение.

$$\int e^{x+\frac{1}{x}}dx=\left[\begin{array}{ll} u=e^{x+\frac{1}{x}}; & du=e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx \\ dv=dx; & v=x. \end{array}\right]=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

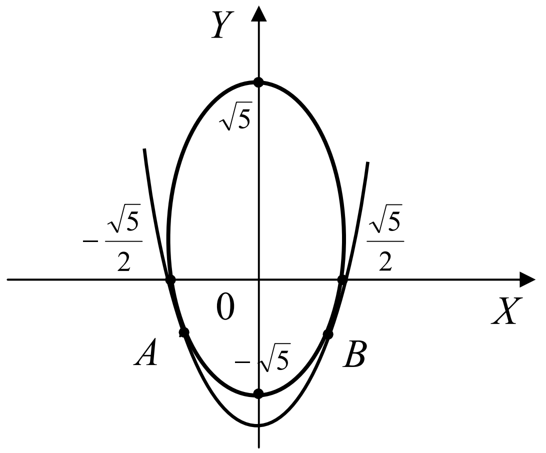
Тогда $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}+c.$

Ответ: $I=xe^{x+\frac{1}{x}}+c.$

Задача 2. Найдите уравнение параболы, которая касается эллипса $4x^2+y^2=5$ **в двух точках A(–1; –1) и B(1; –1).**

Решение.

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{5/4}+\dfrac{y^2}{5}=1.$



Полуоси эллипса:

$a=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\quad b=\sqrt{5}.$

Эллипс вытянут вдоль оси $0y$.

Парабола будет асимметрична оси $0y$, ветви ее будут направлены вверх. Уравнение параболы имеет вид:

$y+c=ax^2$, где $a>0,\quad c>0.$

$y=-c+ax^2.$

В точках А и В парабола и эллипс имеют общие касательные. Рассмотрим точку В.

Из уравнения параболы $y = -c + ax^2$ имеем:

$y' = 2ax \,\Big|_{x=1} = 2a.$

Продифференцируем уравнение эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ по x:

$$8x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{4x}{y}\bigg|_{(1;-1)} = 4.$$

Итак, $2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$

Уравнение параболы принимает вид: $y = -c + 2x^2$.

Подставим в это уравнение координаты точки B(1; −1):

$-1 = -c + 2 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$

Итак, искомое уравнение параболы: $y = 2x^2 - 3$.

Ответ: $y = 2x^2 - 3$.

Задача 3. Решите систему:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}1 \\ [x] + \{y\} + z = 2{,}2 \\ \{x\} + y + [z] = 3{,}3\,, \end{cases}$$

где [a] – целая часть a, {a}=a-[a] – дробная часть а.

Решение.

Сложим все три уравнения, получим

$$2x + 2y + 2z = 6{,}6 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 3{,}3.$$

Вычитаем из этого уравнения каждое из первоначальных уравнений и получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \{y\} + [z] = 2{,}2 \\ \{x\} + [y] = 1{,}1 \\ \{z\} + [x] = 0. \end{cases}$$

Отсюда $[z] = 2; \quad \{y\} = 0{,}2;$

$[y] = 1; \quad \{x\} = 0{,}1;$

$[x] = 0; \quad \{z\} = 0;$

Следовательно: $x = 0,1; \quad y = 1,2; \quad z = 2.$

Ответ:

$x = 0{,}1;$

$y = 1{,}2;$

$z = 2.$

Задача 4. Построить график функции $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Решение.
Так как

$$\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n=\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}+1-1\right)^n=\left(1+\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\right)\right)^n=$$

$$=\left(\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}}\right)^{-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}\right)^n$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2n}}=e,$

а $\lim\limits_{n\to\infty}-2n\cdot\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n\cdot x^2}{4n}=-\frac{x^2}{2},$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача свелась к построению графика функции $y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача 5.
Найдите $f^{(2010)}(0)$, **если** $f(x)=\sin(x^2)$.

Решение.

Так как $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{502}\cdot\frac{x^{1005}}{1005!}+o(x^{1005}),$

то $f(x)=\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-...+\frac{x^{2010}}{1005!}+0(x^{2010}).$ $(*)$

В равенстве $(*)$ коэффициент при x^n имеет вид $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Поэтому $\frac{f^{(2010)}(0)}{2010!}=\frac{1}{1005!}$ при $n=2010$.

Тогда $f^{(2010)}(0)=\frac{2010!}{1005!}$.

Задача 6. Неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^x f(t)dt.$ Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$.

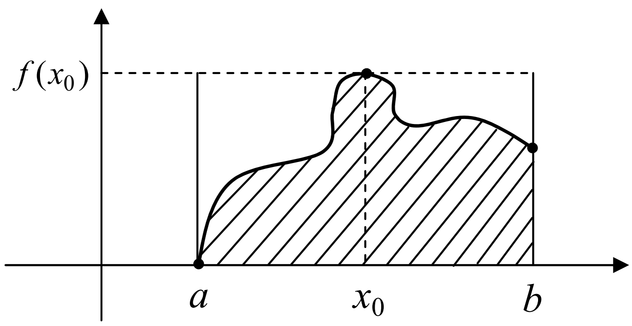
Решение.

$$f(a) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0.$$

Т. к. $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

Поскольку $f(x)$ – неотрицательная функция, то в точке $x = a$ она достигнет наименьшего значения, т. е. $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = 0$.

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения, $x_0 \in [a;b]$, причем $f(a) = 0 < f(x_0)$.



Из геометрического смысла определенного интеграла имеем:

$$f(x_0)\cdot(b-a) \ge f(x_0)\cdot(x_0-a) > \int\limits_a^{x_0} f(t)dt.$$

Пришли к противоречию с условием $f(x) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ для любого $x_0 \in [a;b]$, Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ совпадает с ее наименьшим значением, т. е. $f(x) \equiv 0$.

Задачи для студентов 2-5 курсов.

Задача 1. Вычислите бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Решение.

Рассмотрим частичное произведение:

$$P_N=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}.$$

$$P=\lim_{N\to\infty}P_n=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Пусть $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=Ax+B.$ **Найдите значение A и B при которых выражение** $\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx$ **принимает наименьшее значение.**

Решение.

$$\rho^2=\int_0^1(\sqrt{x}-(Ax+B))^2\,dx=\int_0^1 x\,dx-2\int_0^1\sqrt{x}(Ax+B)\,dx+\int_0^1(Ax+B)^2\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-2\int_0^1\left(Ax^{3/2}+Bx^{1/2}\right)dx+\int_0^1(A^2x^2+2ABx+B^2)\,dx=\frac{1}{2}-$$

$$-2\left(\frac{2A}{5}x^{5/2}+\frac{2B}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1+\left(A^2\frac{x^3}{3}+ABx^2+B^2x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+AB+B^2.$$

Итак, надо найти наименьшее значение функции.

$$\rho^2=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+AB+B^2.$$

$$\frac{\partial p^2}{\partial A}=\frac{2}{3}A+B-\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial B}=2B+A-\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}A + B - \dfrac{4}{5} = 0 \\ A + 2B - \dfrac{4}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad A = \frac{4}{5}, \quad B = \frac{4}{15}.$$

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial A^2} = \frac{2}{3}; \qquad \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial A \partial B} = 1; \qquad \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial B^2} = 2.$$

$$\Delta_1 = \frac{2}{3} > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0.$$

т. $\left(\dfrac{4}{5}; \quad \dfrac{4}{15}\right)$ – это точка локального минимума для функции ρ^2.

Итак, $g(x) = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{15}$.

Ответ: $g(x) = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{15}$.

Задача 3. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \ldots$$

Решение.

Рассмотрим n-ный член ряда: $a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корней}}}.$

Методом математической индукции докажем, что

$$\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}.$$

1) $n = 2\sqrt{2} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{2^2}$.

2) $n = k$. Предположим, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+..+\sqrt{2}}}}_{k-1 \text{ корней}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^k}$.

3) $n = k+1$. Докажем, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ корней}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$.

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k\ \text{корней}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^k}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^k}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Итак, $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\ \text{корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$.

Тогда $a_n = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\ \text{корней}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^n}} =$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

$a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ эквивалентна $2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ при $n\to\infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ сходится. Следовательно исходный ряд также сходится по предельному признаку сравнения.

Задача 4. Пусть $x, y, z -$ положительные числа, каждое из которых меньше чем 4. Докажите, что среди чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ найдется по крайней мере одно число не меньше $(\ge)$, чем 1.

Решение.

Предположим, что каждое из чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ меньше 1 и просуммируем эти три числа. Получим:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-z}\right)<3.$$

С другой стороны, $\frac{1}{a}+\frac{1}{4-a}\ge 1$ для всех положительных чисел a, меньших чем 4, потому что это неравенство эквивалентно неравенству $(a-2)^2\ge 0$.

$$\frac{4-a+a}{a(4-a)}\ge 1;\quad \frac{4}{a(4-a)}\ge 1;\quad 4\ge 4a-a^2.$$

$$a^2-4a+4\ge 0.$$

Пришли к противоречию, т. к. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-z}\right)\geq 3.$

Задача 5. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1.$

Решение.

Пусть $z=a+bi,\quad a,b\in R.$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ будет наибольшим тогда и только тогда, когда значение a^2+b^2 будет наибольшим.

По условию

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right|=1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2=1.$$

Раскрыв скобки, имеем:

$$a^2+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+b^2-\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=1$$

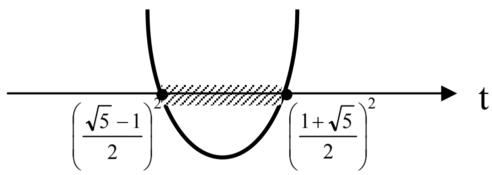
или $\quad a^2+b^2+\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+b^2}=0.$

Откуда $(a^2+b^2)^2-3(a^2+b^2)+1=-4a^2\leq 0,\quad (a^2+b^2\neq 0).$

Обозначим через $t=a^2+b^2$. Тогда $t^2-3t+1\leq 0$ при $a=0.$

Решая квадратное неравенство, получаем

$$t\leq\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$



Т. к. $|z|^2=t$, то $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq|z|\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

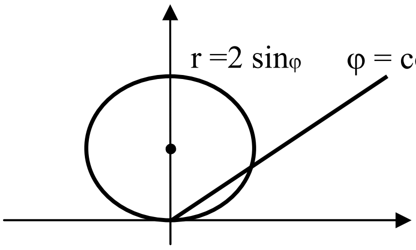
При $a\neq 0$ получаем промежуток, содержащийся внутри отрезка $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right].$ Поэтому $|z|_{\text{наиб.}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

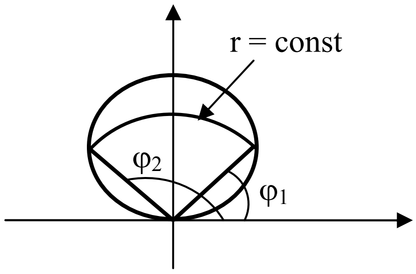
Ответ: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

Задача 6. Перейдите к полярным координатам в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и сведите его к повторному двумя способами, если область D - круг $x^2+y^2\le 2y.$

Решение.

$r^2 \le 2r\sin\varphi; \quad r\le 2\sin\varphi.$





$$\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r\,\mathrm{f}\cdot(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr = \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

$r=2\sin\varphi.$

$\varphi_1=\arcsin\dfrac{r}{2}.$

$\varphi_2=\pi-\varphi_1=\pi-\arcsin\dfrac{r}{2}.$