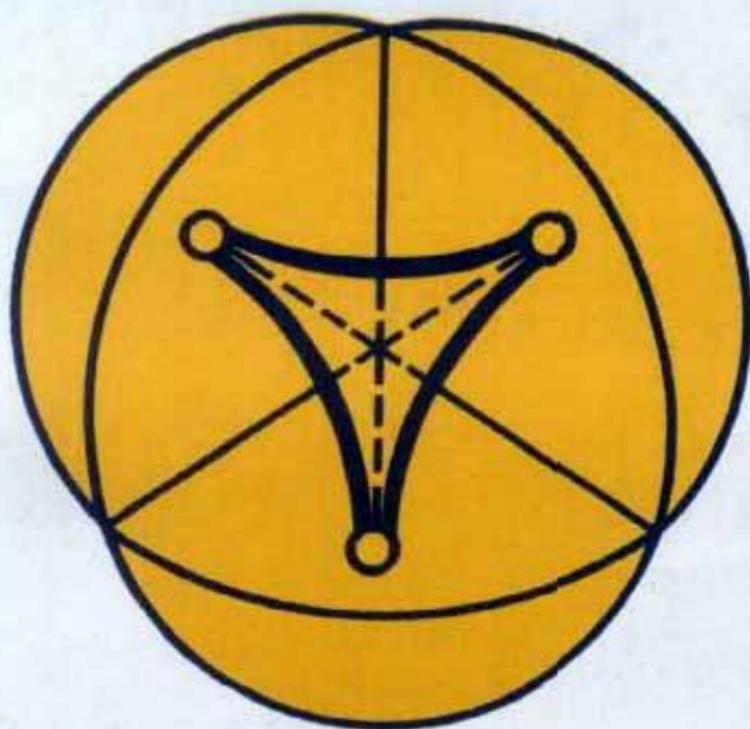


В. И. АРНОЛЬД

# ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ



В. И. АРНОЛЬД

# ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1990

ББК 22.16  
А84  
УДК 517(023)

Арнольд В. И. Теория катастроф. — 3-е изд., доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 128. — ISBN 5-02-014271-9

Математическое описание катастроф — скачкообразных изменений, возникающих в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий, дается теориями особенностей и бифуркаций. Их применения к конкретным задачам в разных областях науки вызвали много споров. В книге рассказывается о том, что же такое теория катастроф и почему она вызывает такие споры. Изложены результаты математических теорий особенностей и бифуркаций. Новое издание дополнено обзором недавних достижений теории перестроек, библиографией и задачиком.

Расчитана на научных работников, преподавателей, студентов и всех, кто интересуется современной математикой.  
Ил. 87. Библиогр. 176 назв.

**Рецензент**

доктор физико-математических наук *А. В. Чернавский*

Научно-популярное издание

*Арнольд Владимир Игоревич*

**ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ**

Заведующий редакцией *А. П. Баева*

Редактор *В. В. Абгарян*

Художественный редактор *Г. М. Корovina*

Технический редактор *А. П. Колесникова*

Корректоры *Т. Г. Есирова, В. П. Сорокина*

ИБ № 32891

Славо в набор 06.06.89. Подписано к печати 21.03.90. Формат 84×108/32.  
Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ.  
л. 6,72. Усл. кр.-отт. 6,93. Уч.-изд. л. 7,3. Тираж 84000 экз. Заказ № 3847.  
Цена 30 коп.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Вторая типография ИПКО «Наука»  
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

А 1602070000-046  
053(02)-90 39-90

© Издательство «Наука»,  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы,  
с дополнениями, 1990

ISBN 5-02-014271-9

**СОДЕРЖАНИЕ**

Предисловие к третьему изданию . . . . .	4
1. Особенности, бифуркации и катастрофы . . . . .	7
2. Теория особенностей Уитни . . . . .	8
3. Применения теории Уитни . . . . .	11
4. Машина катастроф . . . . .	13
5. Бифуркации положений равновесия . . . . .	16
6. Потеря устойчивости равновесных и автоколебательных режимов . . . . .	21
7. Особенности границы устойчивости и принцип хрупкости хорошего . . . . .	30
8. Каустики, волновые фронты и их метаморфозы . . . . .	32
9. Крупномасштабное распределение вещества во Вселенной . . . . .	41
10. Особенности в задачах оптимизации: функция максимума . . . . .	45
11. Особенности границы достижимости . . . . .	48
12. Гладкие поверхности и их проектирования . . . . .	59
13. Задача об обходе препятствия . . . . .	66
14. Симплектическая и контактная геометрии . . . . .	68
15. Комплексные особенности . . . . .	77
16. Мистика теории катастроф . . . . .	87
Д о б а в л е н и е. Предшественники теории катастроф . . . . .	93
Заключение . . . . .	98
Задачи . . . . .	103
Список литературы . . . . .	115

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Математическое описание мира основано на тонкой игре непрерывного и дискретного. Дискретное более заметно. «Функции, как и живые существа, характеризуются своими особенностями», как заметил П. Монтель. *Особенности, бифуркации и катастрофы* — термины, описывающие возникновение дискретных структур из гладких, непрерывных.

За последние 30 лет теория особенностей достигла высокого технического уровня, главным образом благодаря работам Х. Уитни (1955), Р. Тома (1959) и Дж. Мазера (1965). Сейчас это — мощный новый математический аппарат, имеющий широкую область приложений в естествознании и технике (в особенности в комбинации с теорией бифуркаций, восходящей к диссертации А. Пуанкаре 1879 г. и далеко развитой А. А. Андроновым, 1933).

Цель этой книги — объяснить, как этот аппарат работает, читателю-нематематику. Однако я надеюсь, что и специалисты найдут здесь новые для себя факты и идеи.

Одни считают теорию катастроф частью теории особенностей, другие, наоборот, включают теорию особенностей в теорию катастроф. Чтобы избежать схоластического диспута, я называю катастрофистами тех, кто сам заявляет, что его работа относится к теории катастроф, предоставляя тем самым свободный выбор между терминами «особенности», «бифуркации» и «катастрофы» самим авторам соответствующих работ.

Первые разделы этой книжки впервые появились в виде статьи в журнале «Природа» (1979, № 10). Французский перевод с комментариями Р. Тома был опубликован в 1980 г. в сборнике переводов «Математика». Русские издания 1981 и 1983 г. и английские 1984 и 1986 г. каждое содержало новые разделы. Настоящее, наиболее полное издание, во многом отличается от предыдущих. До-

бавлены сведения об истории теории катастроф, расширены разделы о геометрических приложениях, о теории бифуркаций и о приложениях к «мягкому моделированию», включая исследование перестроек. Быть может, интересно отметить, что мои попытки, начиная с 1986 г., опубликовать анализ перестроек с точки зрения теории особенностей увенчались успехом лишь теперь, несомненно вследствие самой перестройки.

Из более математических вопросов, включенных в новое издание, отмечу здесь теорию затягивания потери устойчивости, результаты о нормальных формах неявных дифференциальных уравнений и релаксационных колебаний, теорию внутреннего рассеяния волн в неоднородной среде, теорию граничных особенностей и несовершенных бифуркаций, описание каустики исключительной группы Ли  $F_4$  в терминах геометрии поверхности с краем и появление группы симметрий  $H_4$  правильного четырехмерного 600-гранника в задачах вариационного исчисления и оптимального управления, теорию перестроек ударных волн, универсальность каскадов удвоений, утресений и т. д.

Автор благодарен профессорам Р. Тому, М. Берри и Дж. Наю за полезные замечания о предыдущих изданиях этой книжки. Том указал, что термин «теория катастроф» изобретен К. Зиманом, а термин «аттрактор», заменивший прежнее «спрягивающее множество», употреблялся уже С. Смейлом (тогда как в первых изданиях эти заслуги были приписаны Тому). По совету Берри я включил в это издание аннотированную библиографию (для читателей-специалистов, которые найдут в ней источники большинства сообщаемых здесь сведений, за исключением небольшого числа результатов, впервые опубликованных в этой книжке с любезного согласия авторов). Профессор Най заметил, что некоторые очень интересные топологические причины препятствуют реализации ряда перестроек каустик (таких, как рождение «летающей тарелочки») в оптике, для каустик, порожденных уравнением эйконала или Гамильтона — Якоби с выпуклым по импульсам гамильтонианом.

Я научился теории особенностей в четырехчасовой беседе с Б. Мореном после его замечательного доклада об особенностях Уитни и Морена на семинаре Тома в 1965 г. Морен объяснил мне тогда формулировку фундаментальной теоремы Мазера об устойчивости, анонсированной Мазером в только что полученном Мореном

письме (доказательство — не такое, как у Мазера, — я нашел позже, в тот же день). Неопубликованная работа Мазера 1968 г. о правой эквивалентности к несчастью (или к счастью) не была мне известна, и я осознал взаимоотношение между аналогичной работе Мазера работой Г. Н. Тюринной 1967 г. (опубликованной в 1968 г.) и моей работой 1972 г. об «А, D, E», посвященной памяти Тюринной, только после того, как Дж. Милнор разъяснил мне его.

Ни в 1965 г., ни позже я никогда не был в состоянии понять ни слова в собственных докладах Тома о катастрофах. Однажды он описал их мне (по-французски?) как «бла-бла-бла», когда я спросил его, в начале семидесятых годов, доказал ли он свои утверждения. Даже сегодня я не знаю, справедливо ли утверждение Тома о локальной топологической классификации бифуркаций в градиентных динамических системах, зависящих от четырех параметров (в исправленной форме, ибо контрпример к исходной «теореме» Тома, анонсированной в *Topology* в 1969 г., был опубликован Дж. Гукенхеймером в 1973 г., и «великолепная семерка», столь превозносимая катастрофистами, должна быть увеличена, чтобы теорема стала верной). Локальная топологическая классификация бифуркаций в градиентных динамических системах, зависящих от *трех* параметров, недавно получена Б. А. Хесинным (1985). Число топологически различных бифуркаций оказалось конечным, но значительно большим, чем предполагал Том, пропустивший ряд бифуркаций. Конечно ли число таких бифуркаций при *четырёх* параметрах (Том утверждал, что их семь) — вопрос, до сих пор не решенный.

Я не в состоянии также обсуждать и философские или поэтические декларации Тома, сформулированные таким образом, чтобы нельзя было решить, справедливы они или нет (в стиле, типичном для средневековой науки до Декарта и Бэкона или даже Бэконов). К счастью, фундаментальные математические открытия великого тополога независимы от какой бы то ни было иррациональной философии.

Пуанкаре сказал как-то, что математики не уничтожают препятствия, мешающие им, но просто отодвигают их за границы своей науки. Отодвинем же эти специфические препятствия как можно дальше от границ науки, в область бессознательного и иррационального.

## 1. ОСОБЕННОСТИ, БИФУРКАЦИИ И КАТАСТРОФЫ

Первые сведения о теории катастроф появились в западной печати около 1970 г. В журналах типа «*Ньюс уик*» сообщалось о перевороте в математике, сравнимом разве что с изобретением Ньютоном дифференциального и интегрального исчисления. Утверждалось, что новая наука — теория катастроф — для человечества гораздо ценнее, чем математический анализ: в то время как ньютоновская теория позволяет исследовать лишь плавные, непрерывные процессы, теория катастроф дает универсальный метод исследования всех скачкообразных переходов, разрывов, внезапных качественных изменений. Появились сотни научных и околонуучных публикаций, в которых теория катастроф применяется к столь разнообразным объектам, как, например, исследование биения сердца, геометрическая и физическая оптика, эмбриология, лингвистика, экспериментальная психология, экономика, гидродинамика, геология и теория элементарных частиц. Среди опубликованных работ по теории катастроф есть исследования устойчивости кораблей, моделирования деятельности мозга и психических расстройств, восстаний заключенных в тюрьмах, поведения биржевых игроков, влияния алкоголя на водителей транспортных средств, политики цензуры по отношению к эротической литературе.

В начале семидесятых годов теория катастроф быстро сделалась модной, широко рекламируемой теорией, напминающей универсальностью своих претензий псевдонаучные теории прошлого века.

Математические статьи основоположника теории катастроф Р. Тома были переизданы массовым тиражом в карманной серии — событие, которого не было в математическом мире со времени возникновения киберне-

тики, у которой теория катастроф заимствовала многие приемы саморекламы.

Вслед за панегириками теории катастроф появились и более трезвые критические работы; некоторые из них также печатались в рассчитанных на широкого читателя изданиях под красноречивыми названиями вроде «А король-то—голый». Сейчас имеется уже много статей, специально посвященных критике теории катастроф. (См., например, обзор Дж. Гуккенхаймера «Споры о катастрофах» и пародию на критику теории катастроф.)

Источниками теории катастроф являются теория особенностей гладких отображений Уитни и теория бифуркаций динамических систем Пуанкаре и Андронова.

Теория особенностей — это грандиозное обобщение исследования функций на максимум и минимум. В теории Уитни функции заменены отображениями, т. е. наборами нескольких функций нескольких переменных.

Слово «бифуркация» означает *раздвоение* и употребляется в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят.

Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Чтобы понять, что такое теория катастроф, нужно вначале познакомиться с элементами теории особенностей Уитни.

## 2. ТЕОРИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ УИТНИ

В 1955 г. американский математик Хаслер Уитни опубликовал работу «Об отображениях плоскости на плоскость», заложившую основу новой математической теории — теории особенностей гладких отображений.

Отображение поверхности на плоскость — это сопоставление каждой точке поверхности точки плоскости. Если точка поверхности задана координатами  $(x_1, x_2)$  на поверхности, а точка плоскости координатами  $(y_1, y_2)$  на плоскости, то отображение задается парой функций  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ . Отображение называется *гладким*, если эти функции гладкие (т. е. дифференцируемые достаточное число раз, например многочлены).

Отображения гладких поверхностей на плоскость окружают нас со всех сторон. Действительно, большинство окружающих нас тел ограничено гладкими поверхностями.

Видимые контуры тел — это проекции ограничивающих тела поверхностей на сетчатку глаза. Приглядываясь к окружающим нас телам, например к лицам людей, мы можем изучить особенности видимых контуров.

Уитни заметил, что в случаях «общего положения» \*) встречаются особенности лишь двух видов. Все другие особенности разрушаются при малом шевелении тел или направлении проектирования, в то время как особенности этих двух видов устойчивы и сохраняются при малых деформациях отображения.

Примером особенности первого вида — она названа *складкой* Уитни — является особенность, возникающая при проектировании сферы на плоскость в точках экватора (рис. 1). В подходящих координатах это отображение

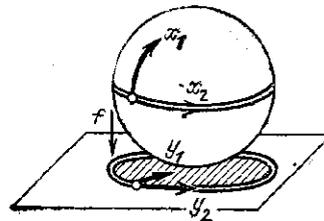


Рис. 1. Складка проектирования сферы на плоскость

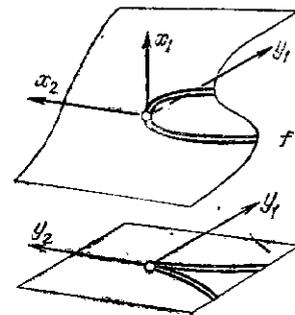


Рис. 2. Сборка проектирования поверхности на плоскость

задается формулами  $y_1 = x_1^2$ ,  $y_2 = x_2$ . Проектирования поверхностей гладких тел на сетчатку в общих точках имеют именно такую особенность, и тут нет ничего удивительного. Удивительно то, что кроме этой особенности (складки) мы всюду встречаем еще ровно одну особенность, но практически никогда ее не замечаем.

Эта вторая особенность названа *сборкой* Уитни, и получается она при проектировании на плоскость поверхности, изображенной на рис. 2. Эта поверхность задана формулой  $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$  в пространстве с координатами  $(x_1, x_2, y_1)$  и проектируется на горизонтальную плоскость  $(x_2, y_1)$ .

\*) То есть для всех случаев, кроме некоторых исключительных.

Таким образом, отображение задается в локальных координатах формулами  $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ ,  $y_2 = x_2$ .

На горизонтальной плоскости-проекции выделяется полукубическая парабола с точкой возврата (острием) в начале координат. Эта кривая делит горизонтальную плоскость на две части: меньшую и большую. Точки меньшей части имеют по три прообраза (в них проектируется три точки поверхности), точки большей части — лишь по одному, точки кривой — по два. При подходе к кривой из меньшей части два прообраза (из трех) сливаются и исчезают (в этом месте особенность — складка), при подходе к острию сливаются все три прообраза.

Уитни доказал, что сборка устойчива, т. е. всякое близкое отображение имеет в подходящей близкой точке подобную же особенность (т. е. такую особенность, что деформированное отображение в подходящих координатах в окрестности указанной точки записывается теми же формулами, какими записывалось исходное отображение в окрестности исходной точки). Уитни также доказал, что всякая особенность гладкого отображения поверхности на плоскость после подходящего малого шевеления распадается на складки и сборки.

Таким образом, видимые контуры гладких тел общего положения имеют точки возврата в местах, где проектирования имеют сборки и не имеют других особенностей: приглядевшись, мы можем найти эти точки возврата в чертах каждого лица или тела. Рассмотрим, например, поверхность гладкого тора (скажем, надутой шины). Тор обычно рисуют так, как это изображено на рис. 3. Если



Рис. 3. Видимый контур тора



Рис. 4. Четыре сборки проектирования тора на плоскость

бы тор был прозрачным, мы увидели бы видимый контур, изображенный на рис. 4: соответствующее отображение тора на плоскость имеет четыре сборки. Таким образом, концы линии видимого контура на рис. 3 — это точки возврата, в этих точках линия видимого контура имеет полукубическую особенность,

Прозрачный тор редко где увидишь. Рассмотрим другое прозрачное тело — бутылку (предпочтительно из-под молока). На рис. 5 видны две точки сборки. Покачивая бутылку, мы можем убедиться, что сборка устойчива.

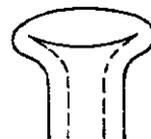


Рис. 5. Экспериментальная проверка теоремы Уитни

Тем самым мы получаем убедительное экспериментальное подтверждение теоремы Уитни.

После основополагающей работы Уитни теория особенностей бурно развивалась, и сейчас это одна из центральных областей математики, в которой перекрещиваются пути, связывающие самые абстрактные разделы математики (дифференциальную и алгебраическую геометрию и топологию, теорию групп, порожденных отражениями, коммутативную алгебру, теорию комплексных пространств и т. д.) с самыми прикладными (теория устойчивости движения динамических систем, теория бифуркаций положений равновесия, геометрическая и волновая оптика и т. д.). К. Зиман предложил называть совокупность теории особенностей и ее приложений теорией катастроф.

### 3. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ УИТНИ

Поскольку гладкие отображения встречаются повсеместно, повсюду должны встречаться и их особенности. А поскольку теория Уитни дает значительную информацию об особенностях отображений общего положения, можно попытаться использовать эту информацию для изучения большого количества разнообразных явлений и процессов во всех областях естествознания. В этой простой идее и состоит вся сущность теории катастроф.

В случае, когда отображение, о котором идет речь, достаточно хорошо известно, имеется в виду более или менее прямое применение математической теории особенностей к различным явлениям природы. Такое применение действительно приводит к полезным результатам, например в теории упругости и в геометрической оптике (теория особенностей каустик и волновых фронтов, о которых мы еще будем говорить дальше).

Однако в большинстве работ по теории катастроф речь идет о куда более спорной ситуации, когда не только неизвестно изучаемое отображение, но и само его существование весьма проблематично.

Приложения теории особенностей в этих ситуациях носят характер спекуляций: чтобы дать о них представление, мы воспроизводим принадлежащий английскому математику К. Зиману пример спекулятивного применения теории Уитни к исследованию деятельности творческой личности.

Будем характеризовать творческую личность (например, ученого) тремя параметрами, называемыми «техника», «увлеченность», «достижения». По-видимому, между этими параметрами должна быть зависимость. Тем самым возникает поверхность в трехмерном пространстве с координатами (Т, У, Д).

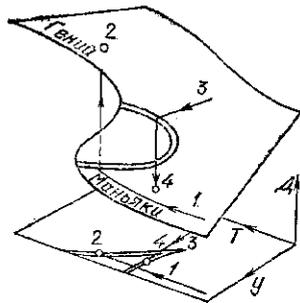


Рис. 6. Модель «ученый» в пространстве «техника — увлеченность — достижения»

Спроектируем эту поверхность на плоскость (Т, У) вдоль оси Д. Для поверхности общего положения особенности — складки и сборки (по теореме Уитни). Утверждается, что сборка, расположенная так, как это изображено на рис. 6, удовлетворительно описывает наблюдаемые явления.

Действительно, посмотрим, как в этих предположениях

будут меняться достижения ученого в зависимости от его техники и увлеченности. Если увлеченность невелика, то достижения монотонно и довольно медленно растут с техникой. Если увлеченность достаточно велика, то наступают качественно новые явления. В этом случае достижения с ростом техники могут расти скачком (такой скачок будет, например, если техника и увлеченность меняются вдоль кривой 1 на рис. 6 в точке 2). Область высоких достижений, в которую мы при этом попадаем, обозначена на рис. 6 словом «гений».

С другой стороны, рост увлеченности, не подкрепленный соответствующим ростом техники, приводит к катастрофе (на кривой 3 в точке 4, рис. 6), при которой достижения скачком падают, и мы попадаем в область, обозначенную на рис. 6 словом «маньяки». Поучительно,

что скачки из состояния «гений» в состояние «маньяк» и обратно происходят на разных линиях, так что при достаточной большой увлеченности гений и маньяк могут иметь равные увлеченности и техники, различаясь лишь достижениями (и предьсторией).

Недостатки описанной модели и множества аналогичных ей спекуляций в теории катастроф слишком очевидны, чтобы о них говорить подробно. Отмечу только, что работы по теории катастроф отличает резкое, катастрофическое снижение уровня требований к строгости, а также к новизне публикуемых результатов. Если первое можно понять как реакцию на традиционный в математике поток строгих, но малоинтересных, эпигонских работ, то небрежное отношение катастрофистов к своим предшественникам (которым и принадлежит большинство конкретных результатов) вряд ли можно оправдать. Причина в обоих случаях скорее социальная, чем научная\*).

#### 4. МАШИНА КАТАСТРОФ

В отличие от описанного выше примера, применения теории особенностей к исследованию бифуркаций положений равновесия в теории упругости безусловно обоснованы.

Во многих упругих конструкциях при одинаковых внешних нагрузках возможно несколько положений равновесия. Рассмотрим, например, горизонтальную линейку, концы которой шарнирно закреплены, нагруженную весом стоящего на середине линейки груза.

Наряду с положением равновесия, при котором линейка прогнута грузом, возможно также положение, при котором линейка выгнута дугой вверх, наподобие моста.

При увеличении груза в некоторый момент происходит «катастрофа» или «хлопок»: линейка скачком переходит из одного состояния в другое. Теория особенностей применима к изучению таких хлопков, и ее предсказания прекрасно оправдываются в экспериментах.

Для наглядной иллюстрации применений этого рода изобретен ряд приспособлений: одно из простейших, называемое *машинной катастрофой* Зимана, изображено на рис. 7.

\*) «Я так думаю, голубушка, что декадентство это самое не что иное, как просто к кучечеству подход». — В. М. Дорошевич. Рассказы и очерки (М., 1966. С. 295).

Машину катастроф каждый может легко изготовить сам. Для этого нужно взять доску (А) (см. рис. 7) и, вырезав из картона диск (В), прикрепить его иглой в центре (С) к доске так, чтобы он мог свободно вращаться. Другая игла (D) втыкается только в диск на его краю, а третья (Е) — только в доску. Чтобы закончить сборку машины,

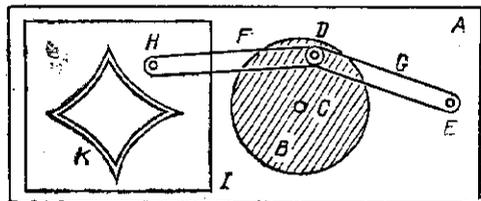


Рис. 7. Машина катастроф Зимана

нужно еще две ленты из легко растяжимой резины (F, G), карандаш (H) и лист бумаги (I).

После того как игла на краю диска соединена с неподвижной иглой и с карандашом резинками, мы ставим острие карандаша в некоторой точке на листе бумаги и тем натягиваем резинки. Диск устанавливается в некотором положении. Теперь при движении острия карандаша диск будет поворачиваться. Оказывается, при некоторых положениях острия карандаша малое изменение его положения способно вызвать «катастрофу», т. е. скачок диска в новое положение. Если отметить на листе бумаги места всех таких «катастроф», то получается «кривая катастроф» (K).

Оказывается, что полученная кривая катастроф сама имеет четыре точки возврата. При пересечении кривой катастроф скачок может происходить, а может и не происходить, в зависимости от того, по какому пути острие карандаша обходило точки возврата кривой катастроф.

Экспериментируя с этой машиной и пытаясь найти правило, определяющее, будет ли скачок, читатель легко убедится в необходимости математической теории явления и сможет лучше оценить вклад теории особенностей в его объяснение.

Состояние машины катастроф описывается тремя числами. Действительно, положение острия карандаша задается двумя координатами (они называются *управляющими параметрами*). Положение диска определяется еще одним числом (углом поворота), называемым также *внут-*

*ренним параметром* системы. Если все три числа заданы, то определены степени растяжения резинок и, следовательно, определена потенциальная энергия всей системы. Диск поворачивается так, чтобы эту энергию минимизировать (по меньшей мере локально). При фиксированном положении карандаша потенциальная энергия — функция

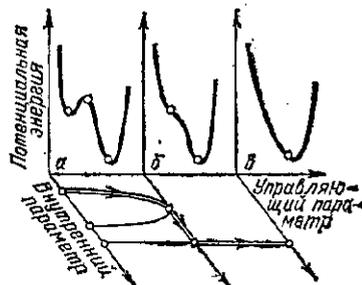


Рис. 8. Потенциальная энергия машины катастроф

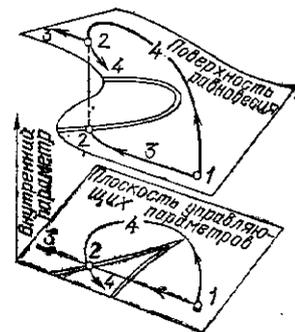


Рис. 9. Поверхность равновесий машины катастроф

от положения диска, т. е. функция, заданная на окружности. Эта функция может иметь в зависимости от значений управляющих параметров один или несколько минимумов (рис. 8, а). Если при изменении управляющих параметров положение минимума меняется плавно, то скачка не происходит. Скачок происходит при тех значениях управляющих параметров, для которых локальный минимум исчезает, слившись с локальным максимумом (рис. 8, б); после скачка диск оказывается в положении, отвечающем другому локальному минимуму (рис. 8, в).

Рассмотрим трехмерное *пространство состояний* машины. Состояния, при которых диск находится в равновесии, образуют в этом пространстве гладкую поверхность. Будем проектировать эту поверхность на плоскость управляющих параметров вдоль оси внутреннего параметра (рис. 9). Это проектирование имеет складки и сборки. Проекция точек складок и есть кривая катастроф. На рис. 9 ясно видно, почему переход управляющих параметров через линию катастроф иногда вызывает, а иногда не вызывает скачок (это зависит от того, какой части нашей поверхности отвечает положение диска).

Пользуясь этим рисунком, можно переходить с одного места поверхности равновесий на другое без скачков.

Схема большинства применений теории катастроф та-кая же, как в описанных примерах. Предполагается, что изучаемый процесс описывается при помощи неко-торого числа управляющих и внутренних параметров. Состояния равновесия процесса образуют поверхность того или иного числа измерений в этом пространстве. Проекция поверхности равновесий на плоскость управ-ляющих параметров может иметь особенности. Предпо-лагается, что это — особенности общего положения. В та-ком случае теория особенностей предсказывает геометрию «катастроф», т. е. перескоков из одного состояния равнов-есия в другое при изменении управляющих параметров. В большинстве серьезных приложений особенность — это сборка Уитни, а результат был известен до провозглаше-ния теории катастроф.

Приложения описанного типа бывают более или менее обоснованными в зависимости от степени обоснованности исходных посылок. Например, в теории хлопков упру-гих конструкций и в теории опрокидывания кораблей предсказания теории полностью подтверждаются экспе-риментом. С другой стороны, в биологии, психологии и социальных науках (скажем, в приложениях к теории поведения биржевых игроков или к изучению нервных болезней) как исходные предпосылки, так и выводы имеют скорее эвристическое значение.

## 5. БИФУРКАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Эволюционный процесс математически описывается век-торным полем в фазовом пространстве. Точка фазового пространства задает *состояние* системы. Приложенный в этой точке вектор указывает скорость изменения сос-тояния.

В некоторых точках вектор может обращаться в нуль. Такие точки называются *положениями равновесия* (сос-тояние не меняется с течением времени). На рис. 10 изоб-ражено фазовое пространство системы, описывающей вза-имотношение хищника и жертвы (скажем, щук и карасей). Фазовое пространство — положительный квадрант плос-кости. По оси абсцисс отложено число карасей, по оси ординат — щук. Точка *P* — положение равновесия. Точ-ка *A* соответствует равновесному количеству карасей при

количестве щук, меньшем равновесного. Видно, что с те-чением времени в системе устанавливаются колебания; равновесное состояние рис. 10 *неустойчиво*. Установив-шиеся колебания изображаются замкнутой кривой на фа-зовой плоскости. Эта кривая называется *предельным цик-лом*.

Кривые в фазовом пространстве, образованные после-довательными состояниями процесса, называются *фазо-выми кривыми*. В окрестности точки, не являющейся по-ложением равновесия, разбиение фазового пространства на фазовые кривые устроено так же, как разбиение на параллель-ные прямые: семейство фазовых кривых можно превратить в се-мейство параллельных прямых гладкой заменой координат. В окрестности положения равновесия картина сложнее. Как показал еще А. Пуанкаре, поведение фа-зовых кривых в окрестности по-ложения равновесия на фазовой плоскости в системе общего по-ложения такое, как изображено на рис. 11. Все более сложные слу-чай превращаются в указанные при общем малом изменении системы.

Системы, описывающие реальные эволюционные про-цессы, как правило, общего положения. Действительно, такая система всегда зависит от параметров, которые

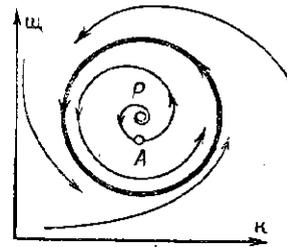


Рис 10. Фазовая плос-кость модели хищник—жертва

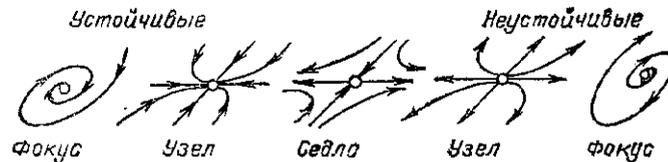


Рис. 11. Типичные фазовые портреты в окрестности точки равно-весия

никогда не бывают известны точно. Малое общее изме-нение параметров превращает систему необщего поло-жения в систему общего положения.

Таким образом, все более сложные, чем указанные выше, случаи, вообще говоря, не должны встречаться

в природе, и их на первый взгляд можно не рассматривать. Эта точка зрения обесценивает большую часть теории дифференциальных уравнений и вообще математического анализа, где традиционно основное внимание уделяется малоценным, но трудным для исследования случаям не общего положения.

Дело, однако, обстоит совсем иначе, если нас интересует не индивидуальная система, а система, зависящая от одного или нескольких параметров. Действительно,

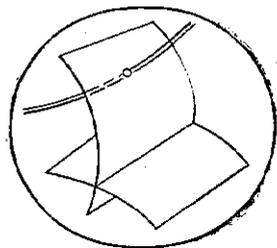


Рис. 12. Однопараметрическое семейство как кривая в пространстве систем

рассмотрим пространство всех систем (рис. 12), разделенное на области, образованные системами общего положения. Поверхности раздела отвечают вырожденным системам; при малом изменении параметров вырожденная система становится невырожденной. Однопараметрическое семейство систем изображается на рис. 12 кривой. Эта кривая может трансверсально (под ненулевым углом) пересекать границу раздела разных областей невырожденных систем.

Таким образом, хотя при каждом индивидуальном значении параметра систему малым шевелением можно превратить в невырожденную, этого нельзя сделать одновременно при всех значениях параметра: всякая кривая, близкая к рассматриваемой, пересекает границу раздела при близком значении параметра (вырождение, устраненное малым шевелением при данном значении параметра, вновь возникает при некотором близком значении).

Итак, вырожденные случаи неустранимы, если рассматривается не индивидуальная система, а целое семейство. Если семейство однопараметрическое, то неустранимы лишь простейшие вырождения, изображаемые границами коразмерности один (т. е. задающимися одним уравнением) в пространстве всех систем. От более сложных вырожденных систем, образующих множество коразмерности два в пространстве всех систем, можно избавиться малым шевелением однопараметрического семейства.

Если мы интересуемся двухпараметрическим семейством, то можно не рассматривать вырожденных систем, образующих множество коразмерности три и т. д.

Тем самым возникает иерархия вырождений по коразмерностям и стратегия их исследования: вначале следует изучать случаи общего положения, затем вырождения коразмерности один, затем — два и т. д. При этом исследование вырожденных систем не должно ограничиваться изучением картины в момент вырождения, но должно включать описание перестроек, происходящих, когда параметр, меняясь, проходит через вырожденное значение.

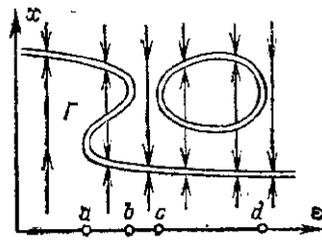


Рис. 13. Кривая равновесий однопараметрического семейства систем

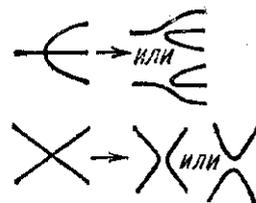


Рис. 14. Превращение нетипичных бифуркаций в типичные при малом шевелении семейства

Изложенные выше общие соображения принадлежат А. Пуанкаре и применимы не только к исследованию положений равновесия эволюционных систем, но к большей части всего математического анализа. Хотя они были высказаны уже сто лет назад, успехи в реализации намеченной А. Пуанкаре программы теории бифуркаций остаются в большинстве областей анализа довольно скромными, отчасти в силу больших математических трудностей, отчасти же вследствие психологической инерции и засилья аксиоматико-алгебраического стиля.

Вернемся, однако, к положениям равновесия эволюционных систем. К настоящему времени решенным можно считать лишь вопрос о перестройках фазовых кривых при бифуркациях положений равновесия в однопараметрических семействах общего положения; уже случай двух параметров выходит за рамки возможностей сегодняшней науки.

Результаты исследования общего однопараметрического семейства суммированы на рис. 13—18. На рис. 13 изображено однопараметрическое семейство эволюционных процессов с одномерным фазовым пространством (по оси абсцисс отложено значение параметра  $\epsilon$ , по оси ординат — состояние процесса  $x$ ).

Для однопараметрического семейства общего положения равновесия при всевозможных значениях параметра образуют гладкую кривую ( $\Gamma$  на рис. 13, в более общем случае размерность многообразия состояний равновесия равна числу параметров). В частности, это означает, что изображенные на рис. 14 слева бифуркации в семействе общего положения не встречаются: при малом изменении семейства  $\Gamma$  превращается в гладкую кривую одного из изображенных на рис. 14 справа типов \*).

Проектирование кривой  $\Gamma$  на ось значений параметра в случае однопараметрического семейства имеет лишь особенности типа складки (при большем числе параметров появляются и более сложные особенности теории Уитни: например, в общих двухпараметрических семействах проектирование поверхности равновесий  $\Gamma$  на плоскость значений параметров может иметь точки сборки, где сливаются три положения равновесия).

Таким образом, при изменении параметра выделяются особые или бифуркационные значения параметра (критические значения проекции,  $a, b, c, d$  на рис. 13). Вле этих значений положения равновесия гладко зависят от параметров. При подходе параметра к бифуркационному значению положение равновесия «умирает», слившись с другим (или же «из воздуха» рождается пара положений равновесия).

Из двух рождающихся (или умирающих) вместе положений равновесия одно устойчиво, другое неустойчиво.

В момент рождения (или смерти) оба положения равновесия движутся с бесконечной скоростью: когда значение параметра отличается от бифуркационного на  $\epsilon$ , оба близких положения равновесия удалены друг от друга на расстояние порядка  $\sqrt{\epsilon}$ .

На рис. 15 изображена перестройка семейства фазовых кривых на плоскости в общем однопараметрическом семействе. Устойчивое положение равновесия («узел») сталкивается при изменении параметра с неустойчивым («седлом»), после чего оба исчезают. В момент слияния

\*) Под «типом» здесь понимается класс эквивалентности с точностью до диффеоморфизма плоскости, а не с точностью расслоенного диффеоморфизма (расслоенный диффеоморфизм — это семейство диффеоморфизмов фазового пространства, зависящих от параметра, сопровождаемых диффеоморфной заменой параметра).

на фазовой плоскости наблюдается картина необщего положения («седло-узел»).

На рис. 15 видно, что перестройка, в сущности, одномерная: вдоль оси абсцисс происходят те же явления, что на оси  $x$  на рис. 13, а вдоль оси ординат перестройки нет вовсе. Таким образом, перестройка через седло — узел

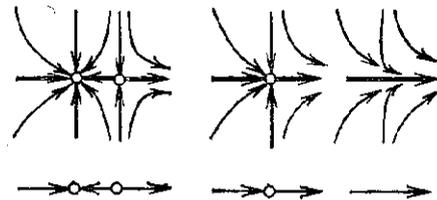


Рис. 15. Седло-узел: типичная локальная бифуркация в однопараметрическом семействе

получается из одномерной перестройки «надстраиванием» оси ординат. Оказывается, вообще все перестройки положений равновесия в общих однопараметрических системах получаются из одномерных перестроек аналогичным надстраиванием.

Если устойчивое положение равновесия описывает установившийся режим в какой-либо реальной системе (скажем, экономической, экологической или химической), то при его слиянии с неустойчивым положением равновесия система должна совершить скачок, перескочив на совершенно другой режим: при изменении параметра равновесное состояние в рассматриваемой окрестности исчезает. Скачки этого рода и привели к термину «теория катастроф».

## 6. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

Потеря устойчивости состояния равновесия при изменении параметра не обязательно связана с бифуркацией самого состояния равновесия: оно может терять устойчивость не только сталкиваясь с другим, но и самостоятельно.

Соответствующая перестройка фазового портрета на плоскости изображена на рис. 16. Возможны два варианта.

А. При изменении параметра из положения равновесия рождается предельный цикл (радиуса порядка  $\sqrt{\epsilon}$ ,

когда значение параметра отличается от бифуркационно го на  $\epsilon$ ). Устойчивость равновесия переходит к циклу, само же равновесие становится неустойчивым.

Б. В положении равновесия умирает неустойчивый предельный цикл; область притяжения положения равновесия уменьшается с ним до нуля, после чего цикл исчезает, а его неустойчивость передается равновесному состоянию.

А. Пуанкаре заметил, а А. А. Андронов и его ученики еще до войны (в 1939 г.) доказали, что, кроме описанно

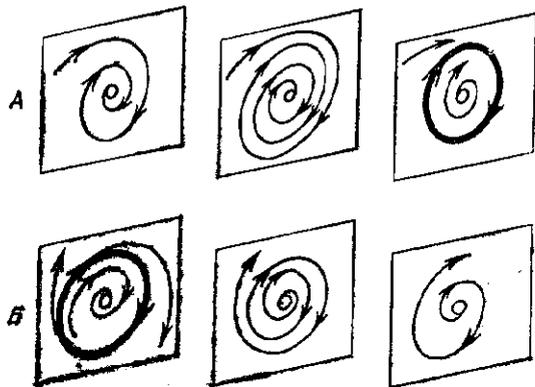


Рис. 16. Бифуркация рождения цикла

выше (п. 5) потери устойчивости положений равновесия сливающихся с неустойчивыми, и только что описанных способов потери устойчивости типа А или Б в общих однопараметрических семействах систем с двумерным фазовым пространством никаких иных видов потери устойчивости не встречается. Позже было доказано, что и в системах с фазовым пространством большей размерности потеря устойчивости положений равновесия при изменении одного параметра происходит каким-либо из описанных выше способов (по направлениям всех дополнительных осей координат при изменении параметра равновесие остается притягивающим).

Если наше положение равновесия — установившийся режим в реальной системе, то при изменении параметра в случаях А и Б наблюдаются следующие явления.

А. После потери устойчивости равновесия установившийся режим оказывается колебательным периодическим режимом (рис. 17); амплитуда колебаний пропорциональная

квадратному корню из закритичности (отличия параметра от критического значения, при котором равновесие теряет устойчивость).

Этот вид потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости, так как устанавливающийся колебательный режим при малой закритичности мало отличается от состояния равновесия.

Б. Перед тем как установившийся режим теряет устойчивость, область притяжения этого режима становится

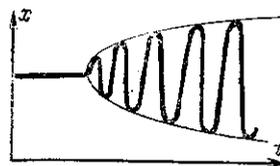


Рис. 17. Мягкая потеря устойчивости равновесия



Рис. 18. Жесткая потеря устойчивости равновесия

очень малой, и всегда присутствующие случайные возмущения выбрасывают систему из этой области еще до того, как область притяжения полностью исчезает.

Этот вид потери устойчивости называется жесткой потерей устойчивости. При этом система уходит со стационарного режима скачком (см. рис. 18) и перескакивает на иной режим движения. Этот режим может быть другим устойчивым стационарным режимом, или устойчивыми колебаниями, или более сложным движением.

Установившиеся режимы движения получили в последние годы название аттракторов, так как они «притягивают» соседние режимы (переходные процессы). [Аттрактор, т. е. притягатель, — это притягивающее множество в фазовом пространстве. Аттракторы, отличные от состояний равновесия и строго периодических колебаний, получили название странных аттракторов и связываются с проблемой турбулентности.]

Существование аттракторов с экспоненциально расходящимися фазовыми кривыми на них и устойчивость такого рода явлений были установлены в самом начале шестидесятых годов в работах С. Смейла, Д. В. Аносова и Я. Г. Синая по структурной устойчивости динамических систем.

Независимо от этих теоретических работ метеоролог Лоренц в 1963 г. описал наблюдавшийся им в численных экспериментах по моделированию конвекции аттрактор

в трехмерном фазовом пространстве с разбегающимися по нему в разные стороны фазовыми кривыми (рис. 19) и указал на связь этого явления с турбулентностью.

В работах Аносова и Синая экспоненциальное разбегание было установлено, в частности, для движения материальной точки по поверхности отрицательной кривизны (пример такой поверхности — седло). Первые применения теории экспоненциального разбегания к изучению гидродинамической устойчивости опубликованы в 1966 г.

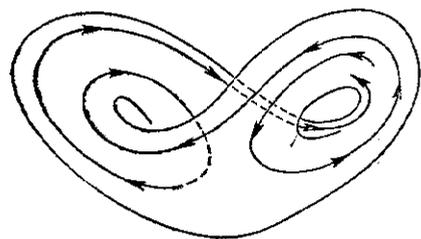


Рис. 19. Хаотический аттрактор

Движение жидкости можно описать как движение материальной точки по искривленной бесконечномерной поверхности. Кривизна этой поверхности по многим направлениям отрицательна, что приводит к быстрому разбеганию траекторий, т. е. к плохой предсказуемости течения по начальным условиям. В частности, из этого вытекает практическая невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды: для предсказания всего на 1—2 месяца вперед нужно знать начальные условия с погрешностью  $10^{-6}$  от погрешности предсказания.

Вернемся, однако, к режиму, установившемуся после потери устойчивости равновесного состояния, и предположим, что этот режим — странный аттрактор (т. е. не равновесие и не предельный цикл).

Переход системы на такой режим означает, что в ней наблюдаются сложные неперiodические колебания, детали которых очень чувствительны к малому изменению начальных условий, в то время как усредненные характеристики режима устойчивы и не зависят от начального условия (при его изменении в некоторой области). Экспериментатор, наблюдающий за движением такой системы, назвал бы его турбулентным. По-видимому, неупорядоченные движения жидкости, наблюдаемые при потере устойчивости ламинарного течения с увеличением числа Рейнольдса (т. е. с уменьшением вязкости), математически описываются именно такими сложными аттракторами в фазовом пространстве жидкости. Размерность этого аттрактора, по-видимому, конечна при любом числе Рей-

нольдса (для двумерных течений жидкости Ю. С. Ильиненко, М. И. Вишик и А. В. Бабин недавно получили оценку этой размерности сверху величиной порядка  $Re^4$ ), но стремится к бесконечности при  $Re \rightarrow \infty$ .

Переход от устойчивого состояния равновесия процесса («ламинарного течения жидкости») к странному аттрактору («турбулентности») может совершаться как скачком (при жесткой или катастрофической потере устойчивости), так и после мягкой потери устойчивости (рис. 20). В последнем случае родившийся цикл сам теряет устойчивость



Рис. 20. Сценарий хаотизации

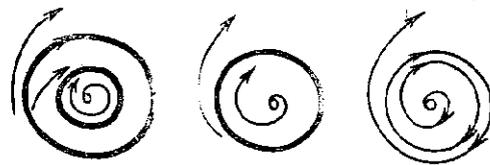


Рис. 21. Гибель аттрактора-цикла

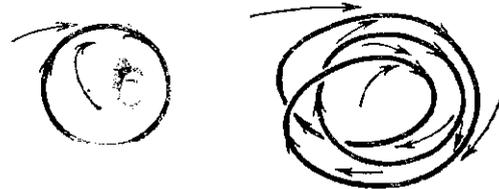


Рис. 22. Удвоение цикла-аттрактора

Потеря устойчивости цикла в общем однопараметрическом семействе систем возможна несколькими способами: 1) столкновение с неустойчивым циклом (рис. 21), 2) удвоение (рис. 22), 3) рождение или смерть тора (рис. 23) (в терминологии Андронова: с цикла слезает ижура). Детали последних процессов зависят от резонансов между

частотами движения вдоль меридиана тора и вдоль его оси, т. е. от того, будет ли отношение этих частот рациональным или иррациональным числом. Интересно, что рациональные числа со знаменателем 5 и больше ведут себя практически как иррациональные.

Поведение фазовых кривых, близких к циклу, можно приближенно описывать при помощи эволюционного про-

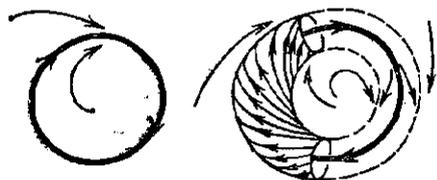


Рис. 23. Бифуркация рождения тора вблизи цикла

цесса, для которого цикл является положением равновесия. Возникающие таким образом приближенные системы на сегодняшний день исследованы для всех случаев, кроме случаев, близких к сильному резонансу с отношением

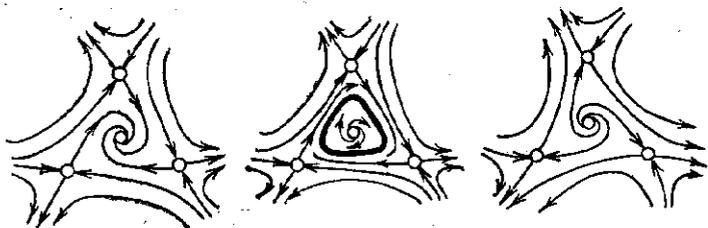


Рис. 24. Бифуркация коразмерности 2 вблизи резонанса 1 : 3

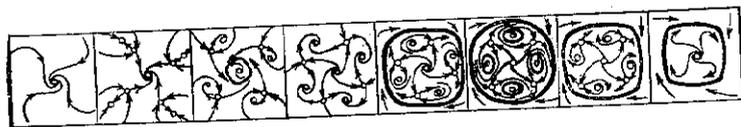


Рис. 25. Вариант бифуркации коразмерности 2 вблизи резонанса 1 : 4

частот 1 : 4 (Р. И. Богданов, Э. И. Хорозов). На рис. 24 изображены перестройки семейства фазовых кривых приближенной системы, соответствующие перестройкам расположения фазовых кривых в окрестности цикла; предпо-

лагается, что потеря устойчивости происходит вблизи резонанса 1 : 3. На рис. 25 изображена одна из возможных последовательностей событий вблизи резонанса 1 : 4. Основные результаты об этом резонансе получены не строгими математическими рассуждениями, а комбинированием догадок и вычислительных экспериментов на ЭВМ (Ф. С. Березовская и А. И. Хибник, А. И. Нейштадт).

Изложенная выше теория Пуанкаре — Андронова потери устойчивости состояний равновесия имеет так много приложений во всех областях теории колебаний (как систем с конечным числом степеней свободы, так и сплошных сред), что нет никакой возможности их здесь перечислить: механические, физические, химические, биологические и экономические системы теряют устойчивость на каждом шагу.

В работах по теории катастроф мягкая потеря устойчивости положения равновесия обычно называется бифуркацией Хопфа (отчасти по моей «вине», так как, рассказывая о теории Пуанкаре — Андронова Р. Тому в 1965 г., я особенно подчеркивал работу Э. Хопфа, перенесшего часть этой теории на многомерный случай).

В теории бифуркаций, как и в теории особенностей, основные результаты и приложения получены независимо от теории катастроф. Несомненной заслугой теории катастроф является введение термина аттрактор и широкая пропаганда знаний о бифуркациях аттракторов. Разнообразные аттракторы обнаружены теперь во всех областях теории колебаний; высказывалась, например, гипотеза, что различные фонемы речи — это различные аттракторы звукообразующей динамической системы.

При медленном изменении параметра наблюдается качественно новое явление *затягивания потери устойчивости* (рис. 26).

После того как параметр прошел через бифуркационное значение, соответствующее рождению цикла, т. е. мягкому возникновению автоколебаний, система остается в скрестности потерявшего устойчивость состояния равновесия еще некоторое время, за которое параметр успевает измениться на конечную величину. И лишь затем система скачком переходит на родившийся в момент бифуркации автоколебательный режим, так что потеря устойчивости кажется жесткой.

Интересно, что этот эффект — особенность динамической бифуркации — имеет место только в *аналитических* системах. В бесконечно-дифференцируемом случае вели-

чина затягивания потери устойчивости, вообще говоря, стремится к нулю при уменьшении скорости изменения параметра.

Затягивание в модельном примере описано Шижковой в 1973 г. Доказательство того, что это явление имеет место во всех типичных аналитических системах с медленно

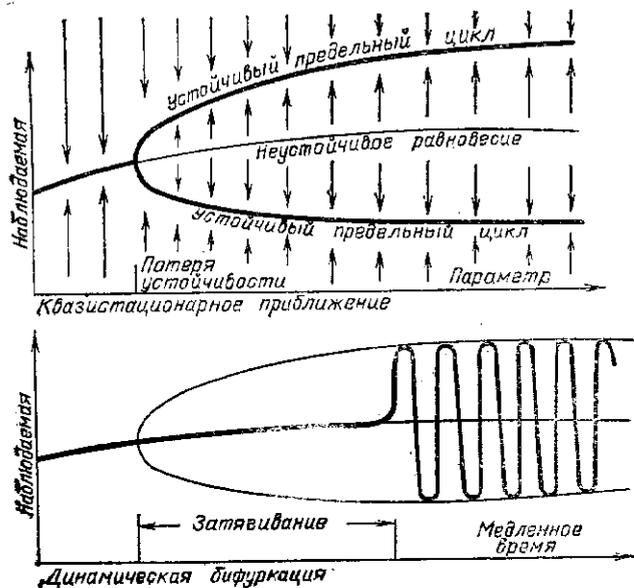


Рис. 26. Затягивание потери устойчивости при динамической бифуркации

меняющимся параметром, было получено в 1985 г. А. И. Нейштадтом.

Известно, что улов горбуши колеблется с периодом в два года. Исследование экологических моделей, призванных объяснить эти колебания, привело А. П. Шапиро (1974) и затем Р. Мея к экспериментальному открытию каскадов удвоений периода: последовательные бифуркации удвоения быстро следуют одна за другой, так что на конечный отрезок изменения параметра приходится бесконечное число удвоений. Это явление наблюдается, например, для простейшей модели мальтузианского размножения с конкуренцией — для отображения  $x \mapsto Axe^{-x}$  (рис. 27). Здесь множитель  $e^{-x}$ , уменьшающий коэффициент мальтузианского размножения  $A$  при увеличении размера популя-

ции  $x$ , учитывает конкуренцию. При малых значениях параметра  $A$  устойчива неподвижная точка  $x = 0$  (популяция вымирает). При больших значениях  $A$  аттрактором последовательно становятся ненулевая неподвижная точка (бифуркация  $A_0$ ), цикл периода 2, рис. 27, как для горбуши (бифуркация удвоения,  $A_1$ ), периода 4 ( $A_2$ ) и т. д. (рис. 28).

Анализируя этот экспериментальный материал, М. Фейгенбаум (1978) обнаружил замечательное явление

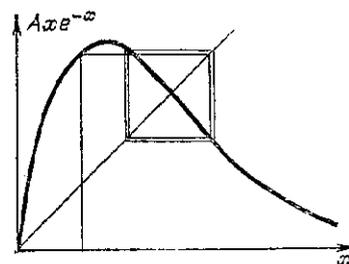


Рис. 27. Колебания численности популяции в простейшей мальтузианской модели с учетом конкуренции

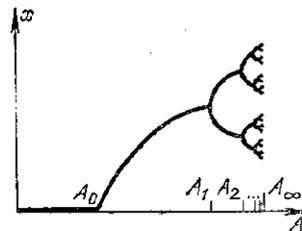


Рис. 28. Каскад удвоений периода

универсальности каскадов удвоений. Последовательность значений параметра, соответствующих последовательным удвоениям, асимптотически ведет себя как геометрическая прогрессия. Знаменатель прогрессии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{A_n - A_{n-1}} \approx \frac{1}{4,669 \dots}$$

является универсальной (не зависящей от конкретной системы) постоянной, вроде чисел  $\pi$  или  $e$ . Такие же каскады удвоений предельных циклов наблюдаются и в типичных эволюционных системах, описываемых зависящими от параметра дифференциальными уравнениями.

В отличие от удвоения периода, утроение является явлением коразмерности два. Каскады утроений (и других увеличений периода) становятся типичными не в однопараметрических, а в двухпараметрических семействах систем. В этих случаях универсальные показатели оказываются комплексными.

В теории двухпараметрических бифуркаций за последние годы достигнуты значительные успехи. В частности,

Г. Жолондеком к 1987 г. решены давно стоявшие задачи о числе предельных циклов, рождающихся из нулевого положения равновесия в системах типа Лотка — Вольтерра (рис. 10), описываемых касающимися сторон угла векторными полями на плоскости.

Однако задача о бифуркациях в системе

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az^2\bar{z} + \bar{z}^3,$$

к которой сводится исследование потери устойчивости автоколебаний в единственном оставшемся не исследованным случае коразмерности 2, все еще не поддается усиленным математикам. На плоскости комплексного параметра

$A$  выделено 48 областей (рис. 29), в которых бифуркации при обходе малого комплексного параметра  $\varepsilon$  вокруг нуля происходят по-разному. (Не доказано даже, что полное число таких областей конечно, хотя предполагается, что их всего 48.)

Еще недавно всякий экспериментатор, обнаружив, скажем, в химической реакции сложные аperiodические колебания, отказывался от их исследования, ссылаясь на нечистоту эксперимента, случайные внешние воздействия и т. п. Сейчас уже многим ясно, что эти сложные колебания могут быть связаны с самим существом дела, могут определяться основными уравнениями задачи, а не случайными внешними воздействиями; они могут и должны изучаться наравне с классическими стационарными и периодическими режимами протекания процессов.

## 7. ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИНЦИП ХРУПКОСТИ ХОРОШЕГО

Рассмотрим положение равновесия системы, зависящей от нескольких параметров, и предположим, что (в некоторой области изменения параметров) это положение равновесия не бифурцирует.

Будем изображать систему, соответствующую какому-либо значению параметров, точкой на оси значений пара-

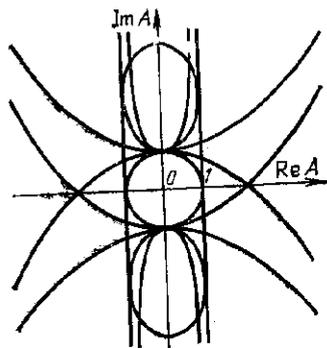


Рис. 29. Сорок восемь типов бифуркаций коразмерности 2 при резонансе 1 : 4

метра (на плоскости, если параметров два, в пространстве параметров, если их три, и т. д.).

Изучаемая область в пространстве параметров разобьется тогда на две части в соответствии с тем, устойчиво или нет положение равновесия. Мы получаем таким образом на плоскости (в пространстве) параметров область устойчивости (составленную значениями параметров, при которых равновесие устойчиво), область неустойчивости и разделяющую их границу устойчивости.

В соответствии с общей стратегией Пуанкаре (см. п. 5) мы ограничимся семействами систем, зависящих от параметров общим образом. Оказывается, граница устойчивости может иметь особенности, которые не исчезают при малом псевделении семейства.

На рис. 30 изображены все особенности границы устойчивости положений равновесия в общих двухпараметрических семействах эволюционных систем (с фазовым

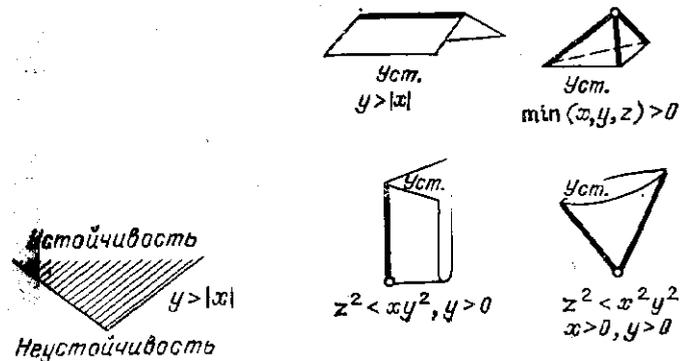


Рис. 30. Типичная особенность границы двумерной области устойчивости

Рис. 31. Типичные особенности границ трехмерных областей устойчивости

пространством любой размерности), на рис. 31 — в трехпараметрических. Формулы на рисунках описывают область устойчивости (при подходящем выборе координат на плоскости или в пространстве параметров, вообще говоря, криволинейных).

Заметим, что область устойчивости во всех случаях располагается «углами наружу», вклиниваясь «зигзаговыми вершинами» в область неустойчивости. Таким образом, для системы, принадлежащей особой части границы устойчивости, при малом изменении параметров более вероят-

но попадание в область неустойчивости, чем в область устойчивости. Это проявление общего принципа, согласно которому все хорошее (например, устойчивость) более хрупко, чем плохое.

По-видимому, все хорошие объекты удовлетворяют нескольким требованиям *одновременно*, плохим же считается объект, обладающий *хотя бы одним* из ряда недостатков.

В случае четырех параметров к перечисленным выше особенностям границы добавляются еще две.

При увеличении числа параметров число типов особенностей границы устойчивости семейства общего положения быстро растет, однако, как доказал Л. В. Левантовский, оно остается конечным (с точностью до гладких замен параметров) при любом конечном числе параметров, сохраняется и принцип хрупкости.

### 8. КАУСТИКИ, ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ И ИХ МЕТАМОРФОЗЫ

Один из наиболее важных выводов теории особенностей состоит в *универсальности* нескольких простых образов вроде складки, сборки и точки возврата, которые должны встречаться повсеместно и которые полезно научиться распознавать. Кроме перечисленных особенностей, часто

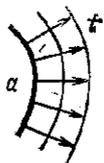


Рис. 32. Эволюция волнового фронта

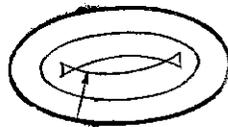


Рис. 33. Особенности эквидистанта эллипса

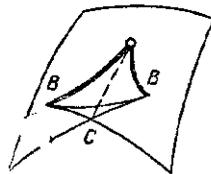


Рис. 34. Ласточкин хвост

встречаются еще несколько образов, которые также получили собственные имена: «ласточкин хвост», «пирамида», «скошелек» и др.

Пусть в какой-либо среде распространяется некоторое возмущение (например, ударная волна, свет или эпидемия).

Для простоты начнем с плоского случая. Допустим, в начальный момент времени возмущение имелось на кривой  $a$  (рис. 32), и пусть скорость его распространения рав-

на 1. Чтобы узнать, где будет возмущение через время  $t$ , нужно отложить по каждой нормали к кривой отрезок длины  $t$ . Получающаяся кривая называется *волновым фронтом*.

Даже если начальный волновой фронт не имел особенностей, через некоторое время особенности начнут возникать. Например, при распространении возмущения внутри эллипса, возникают особенности, изображенные на рис. 33. Эти особенности устойчивы (неустраняемы малым шевелением начального фронта). Для гладкого начального фронта общего положения с течением времени будут образовываться лишь стандартные особенности такого же типа.

Все иные особенности (например, особенность в центре сжимающейся окружности) при малом шевелении начального фронта рассыпаются на несколько особенностей стандартного вида.

В трехмерном пространстве на гладком волновом фронте общего положения с течением времени возникают лишь ребра возврата и стандартные особенности типа «ласточкин хвост», изображенные на рис. 34 (попытайтесь разобраться в особенностях фронта, распространяющегося внутрь трехосного эллипсоида).

Все более сложные особенности при малом шевелении фронта рассыпаются на соединенные ребрами возврата и линиями самопересечения ласточкины хвосты.

Ласточкин хвост можно определить как множество всех точек  $(a, b, c)$ , таких, что многочлен  $x^3 + ax^2 + bx + c$  имеет кратный корень. У этой поверхности есть ребро



Рис. 35. Типичная перестройка волнового фронта на плоскости

возврата ( $B$  на рис. 34) и линия самопересечения ( $C$  на рис. 34).

Ласточкин хвост можно получить из пространственной кривой  $A = t^2$ ,  $B = t^3$ ,  $C = t^4$ : он образован всеми ее касательными.

Рассмотрим пересечения ласточкиного хвоста параллельными плоскостями общего положения (см. рис. 35).

Эти пересечения являются плоскими кривыми. При ступенчатом движении плоскости указанные кривые пе-

рестраиваются в момент, когда плоскость проходит через вершину хвоста. Перестройка (*метаморфоза*), происходящая при этом, в точности такая же, как метаморфоза волнового фронта на плоскости (например, при распространении возмущения внутрь эллипса).

Мы можем описать метаморфозы волновых фронтов на плоскости следующим образом. Рассмотрим наряду с основным пространством (в данном случае плоскостью) еще *пространство-время* (в данном случае трехмерное). Распространяющийся на плоскости волновой фронт замечает в пространстве-времени некоторую поверхность. Оказывается, саму эту поверхность всегда можно рассматривать как волновой фронт в пространстве-времени («*большой фронт*»). В случае общего положения особенностями большого фронта будут ласточкины хвосты, ребра возврата и самопересечения, расположенные в пространстве-времени общим образом относительно изохрон (образованных «одновременными» точками пространства-времени). Теперь уже нетрудно сообразить, какие метаморфозы могут испытывать мгновенные волновые фронты на плоскости в случае общего положения; это перестройки сечений большого фронта изохронами.

Изучение метаморфоз волнового фронта при его распространении в трехмерном пространстве сводится таким же образом к исследованию сечений большого (трехмерного) волнового фронта в четырехмерном пространстве-времени трехмерными изохронами. Возникающие метаморфозы изображены на рис. 36.

Изучение метаморфоз волновых фронтов было одной из задач, из которых возникла теория катастроф, однако даже в случае трехмерного пространства катастрофисты не сумели с ней справиться; рис. 36 появился лишь в 1974 г., когда в теории особенностей были разработаны новые методы (основанные на теории кристаллографических групп симметрий).

Наряду с волновыми фронтами процесс распространения возмущений описывается при помощи *систем лучей*. Например, распространение возмущений внутрь эллипса можно описать при помощи семейства внутренних нормалей к эллипсу (рис. 37). Это семейство имеет огибающую. Огибающая семейства лучей называется *каустикой* (т. е. «жгуцей», так как в этих местах свет концентрируется). Каустика хорошо видна на внутренней поверхности чашки, освещенной солнцем. Радуга на небе также объясняется каустикой системы лучей, прошедших

с полным внутренним отражением через каплю воды (рис. 38).

Каустика эллиптического фронта имеет четыре точки возврата. Эти особенности *устойчивы*: близкий к эллипсу фронт определит каустик с такими же особенностями. Все более сложные особенности каустик при малом изменении рассыпаются на стандартные особенности: точки

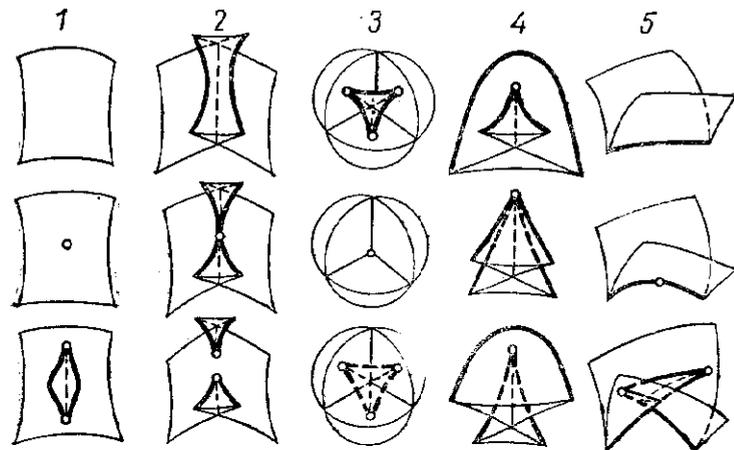


Рис. 36. Типичные перестройки волновых фронтов в трехмерном пространстве

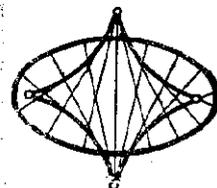


Рис. 37. Каустика эллипса

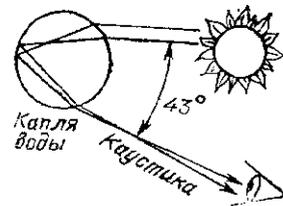


Рис. 38. Теория радуги Декарта

возврата (локальное уравнение —  $x^2 = y^3$ ) и точки самопересечения.

Система нормалей к поверхности в трехмерном пространстве также имеет каустик. Эту каустик можно построить, отложив на каждой нормали к поверхности радиус кривизны (поверхность, вообще говоря, имеет в каждой точке два различных радиуса кривизны, так что на нормали получается две точки каустики).

Нелегко представить себе, как выглядят каустики даже простейших поверхностей, например трехосного эллипсоида.

Каустики общего положения в трехмерном пространстве имеют лишь стандартные особенности. Эти особенности называются «ласточкин хвост», «пирамида» и «кошелек» (см. рис. 39). Пирамида имеет три ребра возврата, касающиеся в вершине. Кошелек имеет одно ребро возврата и

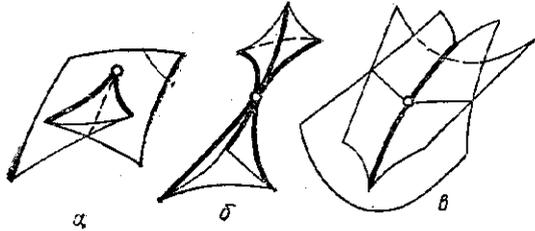


Рис. 39. Типичные особенности каустик в трехмерном пространстве

состоит из двух симметричных носов лодки, пересекающихся по двум линиям. Эти особенности устойчивы.

Все более сложные особенности каустик в трехмерном пространстве при малом шевелении рассыпаются на эти стандартные элементы.

Рассмотрим для одного и того же начального фронта (например, эллипса на плоскости) его каустик и фронты распространяющегося возмущения. Нетрудно понять, что особенности распространяющегося фронта скользят по каустике и заполняют ее.

Например, метаморфоза волнового фронта 5 на рис. 36 соответствует ласточкиному хвосту на каустике. Ребро возврата движущегося в трехмерном пространстве волнового фронта замечает поверхность каустики (ласточкин хвост). Однако это разбиение каустики на кривые — не то разбиение поверхности ласточкиного хвоста на плоские кривые, с которым мы встречались выше (на рис. 35). Ребро возврата движущегося фронта не имеет самопересечений. Через точку линии самопересечения каустики ребро возврата движущегося фронта проходит два раза. Интервал времени между этими прохождениями очень мал (порядка  $\epsilon^{5/2}$ , где  $\epsilon$  — расстояние от вершины хвоста).

Точно так же при перестройках 3 и 4 (см. рис. 36) ребра возврата движущихся фронтов замечают пирамиду и кошелек.

Если исходный фронт движется (зависит от параметра), то его каустика также движется и при своем движении способна испытывать метаморфозы. *Метаморфозы движущихся каустик на плоскости можно изучить, рассматривая сечения большой каустики в пространстве-времени*, подобно тому, как мы это делали для фронтов. Полученные

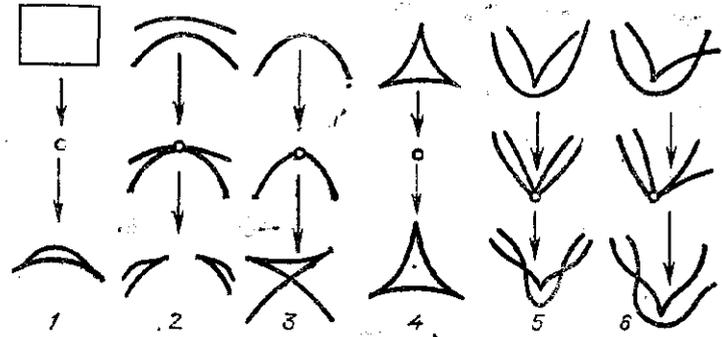


Рис. 40. Типичные перестройки каустик на плоскости

метаморфозы изображены на рис. 40. (Это метаморфозы плоских сечений ласточкиного хвоста, кошелька и пирамиды.) Все более сложные метаморфозы рассыпаются на

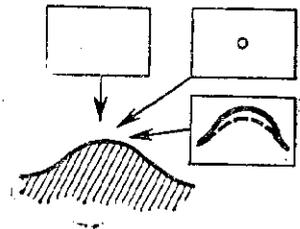


Рис. 41. Перестройка «губы»: рождение видимого контура

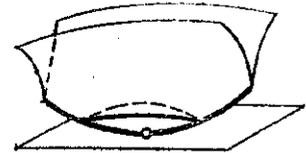


Рис. 42. Перестройка плоского сечения поверхности с ребром возврата

последовательности перечисленных при малом шевелении однопараметрического семейства.

Обратим внимание на метаморфозу 1 рождения каустики «из воздуха». Новорожденная каустика имеет вид серпика с полукубическими острями из конца («губы», по терминологии Р. Тома). Аналогичным образом рождается «из воздуха» видимый контур поверхности при изменении направления проектирования (рис. 41). Глядя на

бугор сверху, мы не видим контура. Когда луч зрения наклоняется, появляется вначале точечная особенность, которая затем быстро растет (пропорционально  $\sqrt{t - t_0}$ , где  $t_0$  — момент появления особенности) и имеет вид «губ». Описанную здесь перестройку можно реализовать как перестройку плоского сечения поверхности с ребром возврата при поступательном движении плоскости (в момент перестройки плоскость касается ребра возврата (рис. 42)).



Рис. 43. Перестройка «верблюду»

Метаморфозу 3 также можно увидеть на видимом контуре, для этого достаточно посмотреть на двугорбого верблюда, проходя мимо него (рис. 43). В момент метаморфозы профиль имеет такую же особенность, как кривая  $y^3 = x^4$ .

Все перестройки видимых контуров поверхностей в общих однопараметрических семействах исчерпываются первыми тремя изображенными на рис. 40, 1—3.

Метаморфозы каустик, движущихся в трехмерном пространстве, получают сечениями большими (трехмерными) каустик в четырехмерном пространстве-времени трехмерными изохронами. Эти метаморфозы изображены на рис. 44 и 45.

Одна из этих метаморфоз (1) описывает рождение новой каустики «из воздуха». Мы видим, что вновь родившаяся каустика имеет вид блюда с заостренными краями. Через время  $t$  после рождения длина и ширина блюда порядка  $\sqrt{t}$ , глубина порядка  $t$ , а толщина порядка  $t\sqrt{t}$ .

Каустика может сделаться видимой, если на пути светового пучка имеется рассеивающая среда (пыль, туман). В. М. Закалюкин предположил, что каустики этого вида наблюдатели описывают как летающие блюда.

Ребра возврата движущихся в трехмерном пространстве каустик заматают поверхность бикаустики. Особенности бикаустик общего положения, соответствующих различным метаморфозам рис. 44 и 45, изображены на рис. 46.

Как известно, лучи описывают распространение воли (скажем, световых) лишь в первом приближении; при более точном волновом описании появляется новый

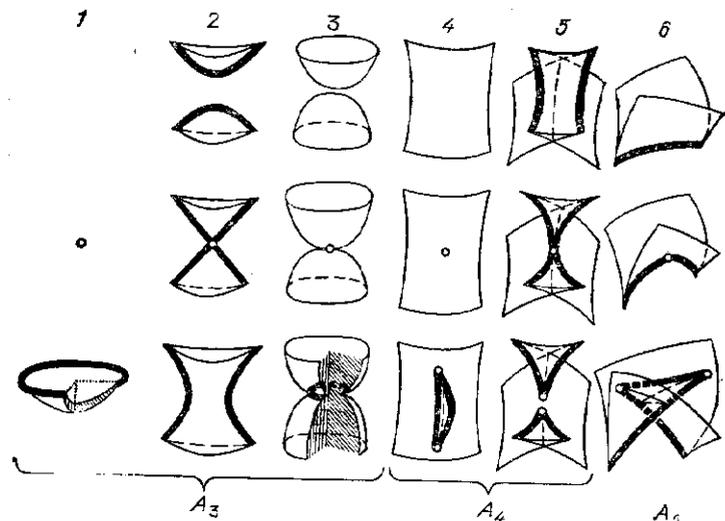


Рис. 44. Типичные перестройки каустик в трехмерном пространстве: серия А

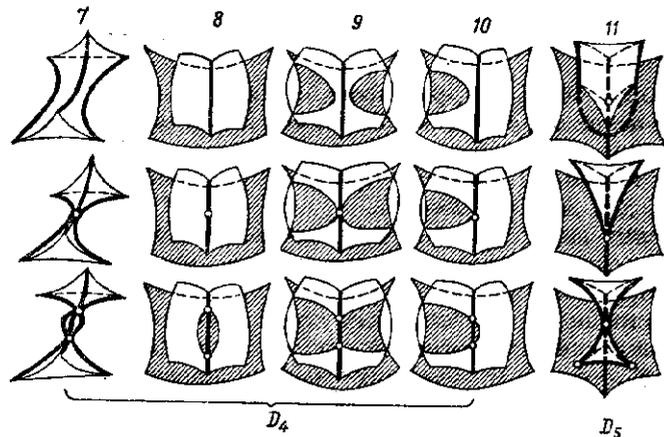


Рис. 45. Типичные перестройки каустик в трехмерном пространстве: серия D

существенный параметр — длина волны (лучевое описание пригодно лишь в случае, когда эта длина мала по сравнению с характерным геометрическим размером системы).

Интенсивность света вблизи каустики больше, а вблизи ее особенностей еще больше. Коэффициент усиления оказывается пропорциональным  $l^{-\alpha}$ , где  $l$  — длина волны, а показатель  $\alpha$  — рациональное число, зависящее от

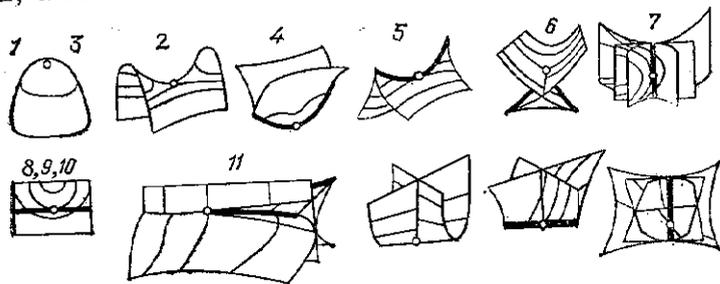


Рис. 46. Типичные особенности бикаустик

характера особенности. Для простейших особенностей значения  $\alpha$  таковы:

Каустика	Ребро возврата	Плоский хвост	Пирамида	Кошелек
1/6	1/4	3/10	1/3	1/3

Таким образом, ярче всего светятся точечные особенности типа пирамиды и кошелек. В случае движущейся каустики в отдельные моменты времени могут возникать более яркие особенности \*)  $A_5$ ,  $D_5$  (см. рис. 44, 45,  $\alpha = 1/3$  для  $A_5$ ,  $3/8$  для  $D_5$ ).

Если свет настолько интенсивен, что способен разрушать среду, то разрушение начнется в точках наибольшей яркости, поэтому показатель  $\alpha$  определяет зависимость интенсивности разрушающего среду света от частоты.

Аналогичная описанной выше классификация особенностей каустик и волновых фронтов проведена в многомерных пространствах до размерности 10 (В. М. Закалюкин).

\*) Все перечисленные особенности классифицируются по типам  $A_k$ ,  $D_k$ , о которых подробнее рассказано на с. 89—90.

Предсказания теории особенностей геометрии каустик, фронтов и их перестроек получили полное подтверждение в экспериментах, и сейчас даже кажется странным, почему эта теория не была построена лет двести назад. Дело, однако, в том, что соответствующий математический аппарат не тривиален \*) и связан с такими разделами математики, как классификации простых алгебр Ли и кристаллографических групп Кокстера, с теорией кос, теорией ветвления интегралов, зависящих от параметров, и т. д. — он даже связан (довольно таинственным образом) с классификацией правильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве.

Катастрофисты пытаются избежать серьезной математики. Например, в составленной К. Зиманом в 1980 г. обширной библиографии по теории катастроф опущены ссылки на математические работы, вышедшие после 1976 г. Таким образом, катастрофисты продолжают попытки экспериментально нащупать ответы в задачах, давно решенных математиками. Например, в работе 1980 г. о ветровых полях и движении льда можно найти полуудачные попытки угадать список метаморфоз каустик в трехмерном пространстве (см. рис. 44, 45), опубликованный математиками еще в 1976 г.

## 9. КРУПНОМАСШТАБНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВА ВО ВСЕЛЕННОЙ

В настоящее время распределение вещества во Вселенной крайне неоднородно (существуют планеты, Солнце, звезды, галактики, скопления галактик и т. д.). Современная астрофизика считает, что на ранних этапах развития Вселенной таких неоднородностей не было. Как же они образовались? Я. Б. Зельдович в 1970 г. предложил объяснение образования скоплений пылевидной материи, математически эквивалентное анализу возникновения особенностей каустик, начатому в 1963 г. Е. М. Лифшицем, Халатниковым и Судаковым.

Рассмотрим *бесстолкновительную* среду, т. е. среду настолько разреженную, что ее частицы проходят друг «сквозь» друга, не сталкиваясь. Предположим, для простоты, что частицы не взаимодействуют и движутся по инер-

\*) Первоначальное доказательство теоремы Уитни, с которой мы начали, занимало около 40 страниц; хотя окончательные геометрические результаты теории особенностей легко могут быть поняты и использованы, доказательства продолжают оставаться сложными.

пии: через время  $t$  частица, находившаяся в точке  $x$ , перейдет в точку  $x + vt$ .

Предположим, что в начальный момент скорость частицы, находящейся в точке  $x$ , была  $v_0(x)$ ; векторное поле  $v_0$  называется *начальным полем скоростей* среды. С течением времени частицы будут двигаться и поле скоростей будет меняться (хотя скорость каждой частицы и не меняется, в следующий момент времени эта частица находится на новом месте).

На рис. 47 изображено начальное поле скоростей одномерной среды  $v_0$  и получающиеся из него через время  $t = 1, 2$  и  $3$  поля  $v_1, v_2, v_3$ .

Мы видим, что, начиная с некоторого момента, более быстрые частицы начинают обгонять более медленные; в результате поле скоростей становится трехзначным: че-

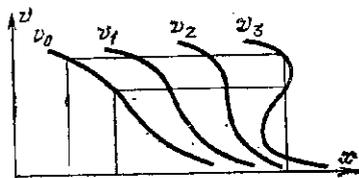


Рис. 47. Эволюция поля скоростей бесстолкновительной среды

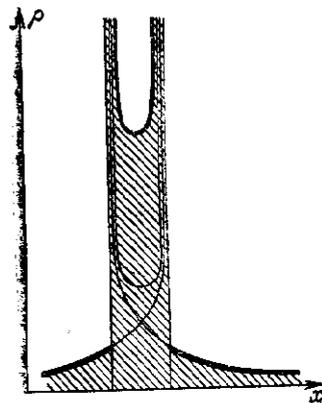


Рис. 48. Особенности плотности после обгона

рез одну точку пространства проходят с разными скоростями три потока частиц.

Движение нашей среды можно описать как *однопараметрическое семейство отображений прямой на прямую*. Именно для каждого  $t$  определено отображение  $g_t$ , переводящее начальное положение частицы ( $x$ ) в конечное:  $g_t(x) = x + v_0(x)t$ .

Отображение  $g_0$  есть тождественное преобразование, оставляющее каждую точку на месте. Отображения, соответствующие моментам  $t$ , близким к 0, взаимно однозначны и не имеют особенностей. После момента первого обгона отображение  $g_t$  имеет две складки.

Пусть в начальный момент плотности среды в точке  $x$  была  $\rho_0(x)$ . С течением времени плотность будет меняться,

Нетрудно сообразить, что после обгона график плотности будет иметь вид, изображенный на рис. 48 (на расстоянии  $\epsilon$  от точки складки плотность оказывается порядка  $1/\sqrt{\epsilon}$ ).

Таким образом, небольшие отличия начального поля скоростей от постоянного приводят через достаточно большое время к образованию скоплений частиц (в местах бесконечно большой плотности).

Этот вывод сохраняется при переходе от одномерной среды к среде, заполняющей пространство любой размерности, и при учете влияния на движение ее частиц внешнего силового поля или поля, созданного средой, а также при учете эффектов теории относительности и расширения Вселенной.

Если силовые поля потенциальны (т. е. их работа на любом пути зависит лишь от начала и конца пути) и начальное поле скоростей тоже потенциально, то задача описания особенностей отображений  $g_t$  и их метаморфоз при изменении  $t$  математически тождественна задаче об особенностях каустик и их метаморфоз (то и другое составляет предмет теории так называемых *лагранжевых особенностей*).

Точки бесконечной плотности образуют в случае двухмерной среды кривые на плоскости. Эти кривые образованы критическими значениями отображения  $g_t$ , т. е. его значениями в критических точках (для отображения рис. 1 критические точки — это точки экватора сферы, критические значения — точки видимого контура на горизонтальной плоскости).

Линия критических значений отображения  $g_t$  называется его *каустикой*. Ее можно определить как место пересечений бесконечно близких лучей (траекторий частиц), т. е. так же, как обычную оптическую каустикку.

Таким же образом описание метаморфоз оптических каустик доставляет нам описание перестроек скоплений частиц (мест бесконечной плотности среды) при потенциальном движении.

Первая особенность на плоскости выглядит как серпик с полукубически заостренными вершинами (в трехмерном пространстве новорожденная каустика имеет вид блюдца). Я. Б. Зельдович назвал такую каустикку *блином* (первоначально блины интерпретировались как галактики, позже — как скопления).

При дальнейшем движении среды рождаются новые блины. Кроме того, имеющиеся блины начинают перестраиваться и могут взаимодействовать друг с другом.

Одна из типичных последовательностей событий в двухмерной среде изображена на рис. 49.

Все возможные в трехмерной среде элементарные перестройки изображены на рис. 44, 45 (получение этих результатов уже требует сложной математической теории лагранжевых особенностей).

В результате перестроек плотность имеет особенности различных порядков на поверхностях блинов, на линиях

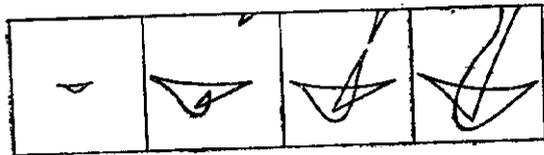


Рис. 49. Сценарий взаимодействия «блинов» Зельдовича

и в отдельных точках. Будем характеризовать особенность *средней плотностью* в  $\varepsilon$ -окрестности рассматриваемой точки (т. е. отношением массы, попавшей к  $\varepsilon$ -окрестности, к объему окрестности).

В точках каустики средняя плотность стремится к бесконечности, когда радиус окрестности  $\varepsilon$  стремится к нулю.

Порядок величины средней плотности в различных точках каустик таков:

Каустика	Ребро возврата	Ласточкин хвост	Кошелек, пирамида
$\varepsilon^{-1/2}$	$\varepsilon^{-2/3}$	$\varepsilon^{-3/4}$	$\varepsilon^{-1}$

При изменении времени в отдельные моменты появляются особенности  $A$ , со средней плотностью порядка  $\varepsilon^{-1/2}$  и  $B$ , ( $\varepsilon^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ ).

Согласно астрофизикам, в те времена, когда радиус Вселенной был раз в тысячу меньше нынешнего, крупномасштабное распределение вещества во Вселенной было практически однородным, а поле скоростей — практически потенциальным. Дальнейшее движение частиц привело к образованию каустик, т. е. особенностей плотности и скопления частиц. До образования блинов плотность остается достаточно малой, чтобы считать среду бесстолкновительной. После этого момента среду можно считать бесстолкновительной, если предполагать, что значитель-

ная часть массы Вселенной сосредоточена в массивных нейтрино; если же большая часть массы приходится на протоны и нейтроны, то к выводам из геометрии каустик и их перестроек следует относиться с осторожностью, так как среда перестает быть бесстолкновительной.

Выводы о скоплении вещества на поверхностях с преимущественным скоплением вдоль некоторых линий (шнуров), соединяющихся в особых точках (узлах), по-видимому, соответствуют астрономическим наблюдениям, по крайней мере в общих чертах (С. Ф. Шандария).

## 10. ОСОБЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ: ФУНКЦИЯ МАКСИМУМА

Многочисленные особенности, бифуркации и катастрофы (скачки) возникают во всех задачах о нахождении экстремумов (максимумов, минимумов), задачах оптимизации, управления и принятия решений. Представим себе, например, что мы должны выбрать  $x$  так, чтобы обеспечить наибольшее значение функции  $f(x)$  (рис. 50).

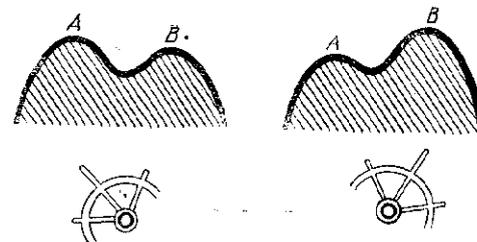


Рис. 50. Разрыв оптимального управления

При плавном изменении функции оптимальное решение меняется скачком, перескакивая с одного из двух конкурирующих максимумов ( $A$ ) на другой ( $B$ ).

Ниже мы рассмотрим несколько задач такого рода; все они далеки от полного решения, хотя в некоторых классификация особенностей проведена достаточно далеко.

Рассмотрим семейство  $f(x, y)$  функций переменной  $x$ , зависящих от параметра  $y$ . При каждом фиксированном значении параметра  $y$  вычислим максимум функции, обозначим его через

$$F(y) = \max_x f(x, y).$$

Функция  $F$  непрерывна, но не обязательно гладкая, даже если  $f$  — многочлен.

**Пример 1.** Пусть  $y$  — азимут луча зрения,  $x$  — дальность,  $f$  — угловая высота ландшафта на расстоянии  $x$  при азимуте  $y$  (рис. 51). Тогда  $F$  определяет линию горизонта. Ясно, что линия горизонта гладкой поверхности

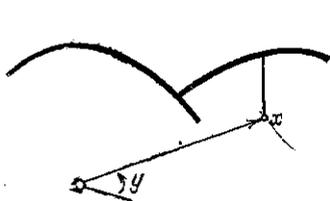


Рис. 51. Излом линии горизонта гладкого ландшафта

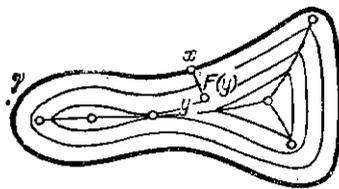


Рис. 52. Расстояние до кривой и его особые точки

может иметь изломы и они неустранимы малым шевелением.

Переменная  $x$  и параметр  $y$  могут быть точками пространства любой размерности; наряду с максимумами встречаются и минимумы.

**Пример 2.** Пусть  $x$  — точка плоской кривой  $\gamma$ ,  $y$  — точка области, ограниченной этой кривой,  $f(x, y)$  — расстояние от  $y$  до  $x$ .

Будем рассматривать  $f$  как функцию точки кривой, зависящую от точки области как от параметра. Тогда функция минимума семейства,  $F(y)$ , есть кратчайшее расстояние от точки  $y$  до кривой  $\gamma$  (рис. 52). Ясно, что эта функция непрерывна, но не всюду гладкая.

Мы можем представить себе лопату, ограниченную кривой  $\gamma$ ; насыпем на эту лопату возможно большую кучу сухого песка. Поверхность кучи будет тогда графиком функции  $F$ . Ясно, что для лопаты общего положения поверхность кучи имеет хребет (линию излома).

Линии уровня функции  $F$  — не что иное, как передние фронты распространяющегося внутрь кривой  $\gamma$  возмущения.

Теория особенностей позволяет перечислить особенности функций максимума  $F$  как в описанном примере, так и для семейств общего положения функций любого числа переменных при условии, что число параметров  $y$  не больше 10 (Л. Н. Брызгалова). Рассмотрим простейшие случаи одного и двух параметров.

Выбирая координаты на оси (плоскости) значений параметра  $y$  и вычитая из  $F$  гладкую функцию параметров, мы можем привести функцию максимума семейства общего положения в окрестности каждой точки к одной из следующих нормальных форм:

один параметр:

$$F(y) = |y|;$$

два параметра:

$$F(y) = \begin{cases} |y_1| \\ \text{или } \max(y_1, y_2, y_1 + y_2) \\ \text{или } \max(-x^2 + y_1x^2 + y_2x). \end{cases}$$

Формула, относящаяся к случаю одного параметра, означает, в частности, что линия горизонта гладкого ландшафта общего положения не имеет особенностей, отличных от простейших изломов. Особенности функции максимума, описанные формулами для двух параметров, дают следующие особенности функции минимума (например, особенности поверхности кучи песка на лопате): линия хребта, точка соединения трех хребтов и конец хребта (см. рис. 52).

В последнем случае график функции минимума есть часть поверхности ласточкиного хвоста (см. рис. 34), получающаяся удалением прилежащей к ребру возврата пирамиды  $(BCB)$  (и еще отражением поверхности рис. 34 в горизонтальной плоскости).

При 3, 4, 5 и 6 параметрах число различных особенностей равно соответственно 5, 8, 12 и 17; начиная с 7 параметров, число типов несводимых друг к другу особенностей становится бесконечным: нормальные формы неизбежно содержат «модули», являющиеся функциями от параметров.

Топологически функция максимума (минимума) семейства общего положения устроена как гладкая функция общего положения (В. И. Матов).

На рис. 53 изображены типичные особенности множества негладкости функции максимума трехпараметрического семейства.

Они позволяют исследовать типичные перестройки особенностей ударных волн на плоскости, происходящие с течением времени: для этого нужно сперва изучить типичные перестройки двумерных сечений пяти изображенных на рис. 53 поверхностей (эти перестройки также изображены на рисунке). Оказывается, некоторые из них яв-

ляются, а некоторые не являются перестройками ударных волн (например, для потенциальных решений уравнения Бюргера  $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$  с исчезающей вязкостью  $\nu$ ).

А именно, реализуются ударными волнами те перестройки, которые отмечены на рис. 53 стрелками. Правила отбора найдены И. А. Богаевским и Ю. М. Барышиковым:

1) возникающая после перестройки ударная волна в окрестности точки перестройки стягиваема;

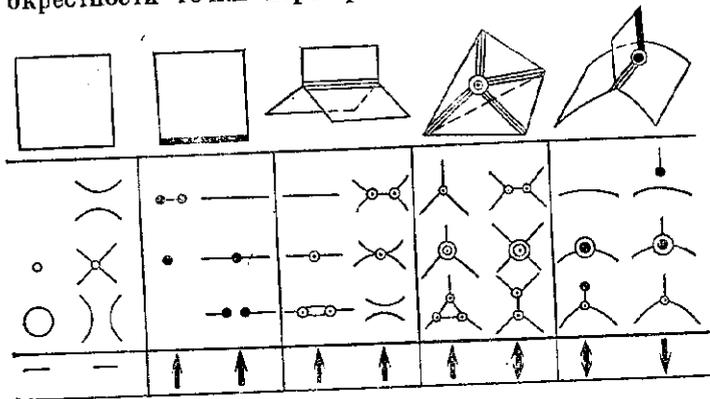


Рис. 53. Типичные особенности множества негладкости максимума и типичные перестройки ударных волн

2) дополнение к ударной волне в момент перестройки и сразу после нее топологически (гомотопически) одинаковы.

Каждое из этих условий необходимо и достаточно для реализуемости типичной перестройкой ударных волн на плоскости и в трехмерном пространстве типичной перестройки особенностей функции максимума. Так ли это в многомерном случае — неизвестно.

## 11. ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦЫ ДОСТИЖИМОСТИ

Управляемая система в фазовом пространстве задается так: в каждой точке пространства дан не один вектор скорости (как в обычной эволюционной системе), а целое множество векторов, называемое *индикатрисой допустимых скоростей* (рис. 54).

Задача управления состоит в том, чтобы, выбирая в каждый момент времени вектор скорости из предостав-

ляемого индикатрисой набора допустимых скоростей, достичь заданной цели (например, прийти за кратчайшее время на заданное подмножество фазового пространства).

Зависимость кратчайшего времени достижения цели от начальной точки может иметь особенности. Рассматривавшиеся в п. 10 особенности функции минимума расстояния до кривой — частный случай (индикатриса — окружность, а цель — кривая). В отличие от этого частного случая особенности кратчайшего времени в общей задаче управления изучены весьма слабо.

В общем случае достичь цели можно не при любом начальном условии. Точки фазового пространства, из которых можно достичь цели (за любое время), называются *областью достижимости*.

Граница области достижимости может иметь особенности даже в том случае, когда ни цель, ни поле индикатрис в различных точках фазового пространства особенностей не имеют. Мы приводим ниже классификацию особенностей границы достижимости в общей управляемой системе на фазовой плоскости в случае, когда индикатрисы и цель — гладкие кривые (по А. А. Давыдову).

Из четырех типов особенностей границы три записываются простыми формулами (при подходящем выборе локальных координат на плоскости):

$$1) \quad y = |x|, \quad 2) \quad y = x|x|, \quad 3) \quad y = x^2|x|.$$

Особенность четвертого типа связана с теорией дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, называемых также *нелзяными дифференциальными уравнениями*.

Такое уравнение имеет вид  $F(x, y, p) = 0$ , где  $p = dy/dx$ . Геометрически уравнение  $F = 0$  задает поверхность в трехмерном пространстве с координатами  $(x, y, p)$ . Она называется *поверхностью уравнения*.

Условие  $p = dy/dx$  выделяет плоскость в каждой точке нашего трехмерного пространства. Эта плоскость состоит из векторов,  $y$ -компонента которых в  $p$  раз больше  $x$ -компоненты, где  $p$  — координата точки приложения. Та-

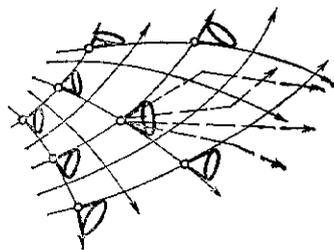


Рис. 54. Поле индикатрис допустимых скоростей управляемой системы

кая плоскость называется *контактной*. Контактная плоскость в каждой точке вертикальна (содержит направление оси  $p$ ). Все вместе контактные плоскости задают *поле контактных плоскостей*, называемое также *контактной структурой*.

Контактная структура высекает на поверхности уравнения поле направлений (с особыми точками в тех местах, где контактная плоскость касается поверхности). Поверхность уравнения здесь предполагается гладкой. Это условие выполняется для уравнений общего положения.

Вопрос о строении типичных особых точек неявных дифференциальных уравнений рассматривался еще в прошлом веке, и король Швеции Оскар II включил его, наряду с проблемой трех тел, в список из четырех вопросов на премию 1885 г.

Решение этого вопроса было получено лишь в 1985 г. А. А. Давыдовым в виде побочного продукта исследования областей достижимости управляемых систем на плоскости.

Ответ доставляет следующий список нормальных форм (к которым уравнение приводится локальным диффеоморфизмом плоскости):

$$y = (x + kp)^2.$$

В зависимости от значения параметра  $k$  здесь возможны три случая. Особая точка поля на поверхности уравнения может оказаться седлом, узлом или фокусом. Проектирование поверхности уравнения на плоскость  $(x, y)$  вдоль оси  $p$  имеет особенностью складку. В окрестности типичной точки складки уравнение приводится к нормальной форме Чибрарио (1932),  $x = p^2$ . Все особые точки автоматически попадают на складку. Результат складывания изображен на рис. 55: особые точки на плоскости  $(x, y)$  называются *сложенным седлом* (*узлом*, *фокусом* соответственно). Оказывается, несмотря на сложность узора, образованного интегральными кривыми на плоскости  $(x, y)$ , он (даже не только топологически, но и с точностью до диффеоморфизма) однозначно определяется единственным «модулем»  $k$  (как и фазовый портрет соответствующего векторного поля на плоскости вблизи особой точки).

Сложенные особые точки — седла, узлы, фокусы — встречаются во многих приложениях. Рассмотрим, например, *асимптотические линии* на поверхности в трехмерном пространстве (поверхность имеет с касательными

прямыми касание выше первого порядка в каждой своей точке). Для поверхности общего положения сеть асимптотических линий заполняет область гиперболичности, где поверхность имеет отрицательную кривизну (как обыкновенное седло). Через каждую точку области гиперболичности проходят две асимптотические линии и

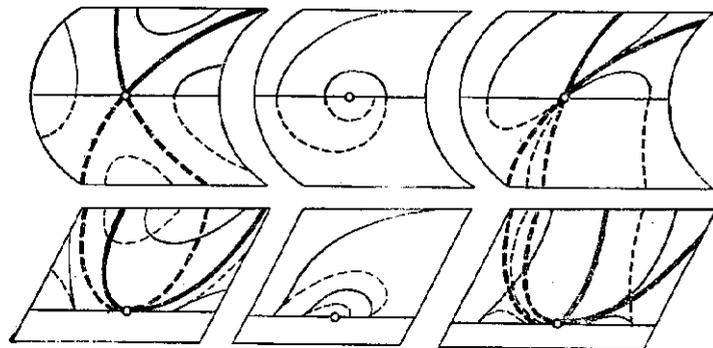


Рис. 55. Сложенные особенности

Область гиперболичности ограничена линией параболических точек, на которой оба асимптотических направления совпадают.

В окрестности типичной параболической точки асимптотические линии имеют полукубическую особенность и вся сеть их приводится к такой же нормальной форме  $y = c \pm x^{3/2}$ , как и семейство интегральных кривых уравнения Чибрарио.

Однако в окрестности отдельных точек на линии параболичности поведение асимптотических линий сложнее: они устроены как интегральные кривые неявных уравнений вблизи сложенных особых точек (рис. 55).

Сложенные особенности появляются также в теории релаксационных колебаний. Пусть система имеет одну быструю и две медленных переменных, так что полное фазовое пространство трехмерно. Точки, где скорость изменения быстрой переменной равна нулю, образуют (вообще говоря гладкую) поверхность — *медленную поверхность* системы. Движение фазовой точки состоит из нескольких процессов. Вначале быстрая переменная *релаксирует*, т. е. фазовая точка быстро движется по «вертикали» (по направлению оси быстрой переменной) к медленной поверхности, затем начинается медленное движение вдоль

этой поверхности. Траектории этого движения определяются полем направлений, высекаемым на ней полем плоскостей, натянутых на вертикальное направление (направление оси быстрой переменной) и направление возмущений. Это поле плоскостей определяет, вообще говоря, контактную структуру в фазовом пространстве, и особенности медленного движения описываются, вообще говоря, сложными особыми точками рис. 55.

В качестве последнего примера тех же особенностей рассмотрим движение материальной точки в потенциальной яме (или у потенциального барьера) в присутствии трения. Обозначим (рис. 56) через  $x$  координату точки, а через  $E$

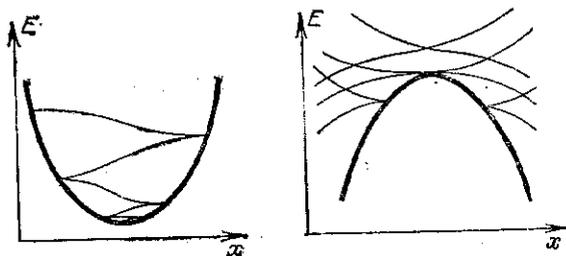


Рис. 56. Диссипация энергии в яме и у барьера

ее полную энергию. Проекция фазовой траектории на плоскость  $(x, E)$  имеют при подходе к графику потенциальной энергии полукубические, вообще говоря, особенности. Минимуму (максимуму) потенциальной энергии отвечает особая точка. Для потенциальной энергии общего положения получаются все те же сложные особенности Давыдова.

Причина, по которой сложные особенности встречаются столь часто, состоит в том, что часто встречаются как обычные особенности векторного поля, так и складывания. Неожиданным здесь является лишь то, что комбинирование складывания с особенностью не приводит к большему разнообразию случаев, чем в классификации самих особенностей векторных полей. А именно, рассмотрим складывание как инволюцию (дiffeоморфизм, квадрат которого — тождественное преобразование) на плоскости, несущей векторное поле с особой точкой. Если линия неподвижных точек инволюции проходит через особую точку поля и инволюция на этой линии меняет знак каждой точки поля на противоположный, то такая инволюция (почти всегда) переводится в любую другую инволю-

цию с такими свойствами при помощи диффеоморфизма,двигающего вдоль себя каждую фазовую кривую заданного поля. Этот (довольно неожиданный) результат является источником всей описанной выше теории.

Четвертая особенность границы достижимости получается из двух сепаратрис сложенных седел, входящих с разных сторон в сложенный узел. Приведенная выше нормальная форма сложенного узла позволяет явно выписать нормальную форму четвертой особенности, но я здесь не буду этого делать.

Примеры управляемых систем и целей, приводящих к указанным особенностям границы достижимости, изображены на рис. 57, 58, 59. На этих рисунках цель  $\gamma$  обозначена двойной линией, граница области достижимости — T-образным пунктиром (попка буквы T обращена в сторону области достижимости). Линии со стрелками касаются краев конусов допустимых направлений в каждой точке; горизонтально заштрихована область «полной управляемости» (выпуклая оболочка индикатрисы окружает 0). Рассматривая рис. 57—59 читатель может проверить неустранимость особенностей 1—4.

Чтобы разобраться в этих рисунках, мы построим сеть *предельных линий*, определяемую следующим образом.

В каждой точке вне области полной управляемости направления допустимых скоростей расположены внутри угла, меньшего  $180^\circ$ .

Стороны этого угла определяют направления *предельных скоростей* в данной точке. Таким образом, в каждой точке вне области полной управляемости возникают два предельных направления. Интегральные кривые полей предельных направлений (т. е. кривые, имеющие предельное направление в каждой своей точке) называются *предельными линиями*.

Сеть предельных линий изображена на рис. 54 вместе с индикатрисами допустимых скоростей (они имеют вид эллипсов) и с опирающимися на индикатрисы углами, образованными допустимыми направлениями движения.

Граница области достижимости состоит из отрезков предельных линий (и, быть может, отрезков линии цели, если цель не лежит в области полной управляемости, см. рис. 57). Эти отрезки соединяются между собой в точках, которые и составляют особенности границы области достижимости.

На рис. 57 цель имеет вид контура лежащей на спине буквы С. Допустимые скорости во всех точках плоскости одинаковы и направлены вверх под углом, составляющим не более  $45^\circ$  с вертикалью.

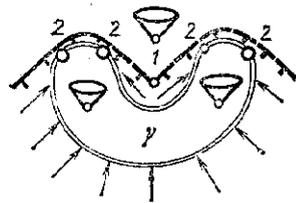


Рис. 57. Устойчивость особенностей 1 и 2 на границе области достижимости

Наклон всех предельных линий  $\pm 45^\circ$ . Граница достижимости обозначена Т-образным пунктиром. Видны особые точки границы двух типов: 1 и 2.

В точке 1 соединяются отрезки двух разных предельных линий. Они пересекаются под ненулевым углом. Ясно, что из точек, расположенных выше указанной на рис. 57 границы, при движении по направлению, образующему с вертикалью угол  $45^\circ$  или меньше, попасть на цель нельзя, а из точек, расположенных ниже, — можно. Интересно отметить, что вершина 1 зияет на границе области достижимости: область недостижимости вклинивается в этом месте в область достижимости. Таким образом, в смысле п. 7 хорошим оказывается именно недостижимое.

В точке 2 на границе достижимости соединяется отрезок предельной линии и отрезок линии-цели. В этой точке направление линии-цели предельное, так что граница достижимости имеет касательную. Кривизна границы, однако, меняется в точке 2 скачком при переходе с предельной линии на линию-цель.

Заменяем теперь цель на рис. 57 любой близкой гладкой кривой (близость кривых предполагает близость их касательных, кривизн и т. д.) и заменим поле индикатрис допустимых скоростей на рис. 57 близким полем. Тогда ясно, что граница допустимости новой системы по-прежнему будет иметь вблизи точки 1 точку излома (где под ненулевым углом соединяются отрезки двух предельных линий). Точно так же вблизи каждой из точек 2 возникает точка аналогичного характера для новой системы.

Таким образом, ситуация, изображенная на рис. 57, устойчива относительно малых шевелений системы. Подобным свойством устойчивости обладают и ситуации, изображенные на рис. 58 и 59.

События, приводящие к указанным на этих рисунках особенностям сети предельных линий, состоят в следующем.

На рис. 58 кривая  $K$  ограничивает заштрихованную область полной управляемости: в заштрихованной области движение в любом направлении возможно (если допускать так называемые смешанные стратегии, т. е. движения быстро сменяющимися галсами). Цель на рис. 58 лежит в области полной управляемости. Следовательно, вся ограниченная кривой  $K$  область достижима.

На границе  $K$  области полной управляемости угол между допустимыми направлениями составляет ровно  $180^\circ$ . Граница  $K$  образована

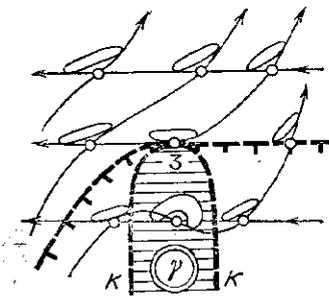


Рис. 58. Устойчивость особенности 3 на границе области достижимости

теми точками плоскости, для которых двойная касательная, делающая выпуклой индикатрису допустимых скоростей, проходит через начало координат плоскости скоростей (двойная касательная — это прямая, касающаяся кривой в двух точках).

На рис. 58 эта двойная касательная в каждой точке кривой  $K$  горизонтальна. Событие, приводящее к образованию изображенной на рис. 58 особенности, состоит в том, что кривая  $K$  сама касается проходящей через нуль двойной касательной к индикатресе.

Для систем общего положения такое событие происходит лишь в отдельных точках границы  $K$  области полной управляемости. На рис. 58 оно происходит в точке 3, где касательная к  $K$  горизонтальна.

Из сказанного выше ясно, что описанное событие реализуется устойчивым образом: при малом шевелении системы, т. е. цели и поля индикатрис допустимых скоростей, точка 3 несколько сместится, но не исчезнет.

Рассмотрим теперь сеть предельных линий вблизи точки 3. Оба поля предельных направлений вблизи нее гладкие. Выбором соответствующей системы координат одно из них можно выпрямить. На рис. 58 система координат так и выбрана: первое из двух семейств предельных линий состоит из горизонтальных прямых (направленных влево).

Линии второго семейства — гладкие кривые. На кривой  $K$  они касаются линии первого семейства. В интересующей нас точке 3 оба семейства касаются линии  $K$ . Из этих соображений уже нетрудно усмотреть, что сеть предельных линий вблизи точки 3 выглядит так, как указано на рис. 58: выше кривой  $K$  линии второго семейства поднимаются при движении вдоль допустимого направления, ниже — опускаются (выбор направлений линий сети допускает еще несколько вариантов, аналогичных изображенному; разобравшись в рис. 58, читатель легко разберется в них сам).

Теперь на рис. 58 видно, что левее точки 3 граница области достижимости идет по линии второго предельного направления, а правее — первого (горизонтального). В точке 3 обе линии имеют второй порядок касания (как прямая и кубическая парабола). В окрестности этой точки граница достижимости диффеоморфна \*) графику функции  $y = x^2 |x|$ .

Таким образом, точки 1 и 2 на рис. 57 и точка 3 на рис. 58 дают примеры устойчиво реализуемых событий на границе области дости-

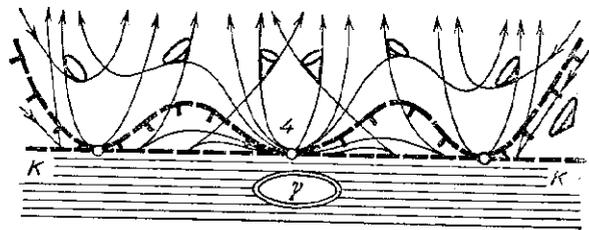


Рис. 59. Сложенные особенности на границе области достижимости

жимости, вызывающих особенности первых трех видов с. 49. Особенности четвертого вида возникают в ситуации рис. 59.

На этом рисунке, как и на рис. 58, цель находится внутри заштрихованной области полной управляемости. На границе  $K$  этой области расположены точки плоскости, в которых выпуклая индикатреса проходит через нуль. Ясно, что в управляемых си-

\*) Диффеоморфизм — это замена координат, гладкая вместе с обратной заменой.

стемах общего положения это явление — прохождение индикатрисы через 0 — реализуется на линии. По одну сторону этой линии  $K$  лежит область полной управляемости (индикатриса окружает 0), по другую — область с двумя предельными направлениями. На разделяющей их границе  $K$  оба эти поля направлений сливаются в одно — поле направленный касательных к индикатрисам в нуле.

В общей точке кривой  $K$  направление этого поля составляет с  $K$  ненулевой угол. Событие, приводящее к особенности четвертого типа на границе области достижимости, — это *касание кривой  $K$  с предельным направлением*. Для систем общего положения такое касание реализуется в отдельных точках границы области полной управляемости  $K$ . На рис. 59 таких точек на кривой  $K$  три; средняя из них обозначена цифрой 4.

Чтобы изучить сеть предельных линий в окрестностях этих особых точек, полезно рассмотреть наше двузначное поле предельных направлений как однозначное поле направлений на поверхности, двулистно накрывающей область выше кривой  $K$ .

С этой целью рассмотрим множество всех направлений линейных элементов на плоскости. Это множество является трехмерным многообразием, так как направление определяется точкой приложения линейного элемента (две координаты) и еще своим азимутом (одна угловая координата).

Множество всех предельных направлений составляет подмножество множества всех направлений. Это подмножество — гладкая поверхность в трехмерном многообразии всех направлений. Трехмерное многообразие всех направлений проектируется на исходную плоскость (линейный элемент проектируется в свою точку приложения). Поверхность, образованная предельными направлениями, проектируется при этом в часть плоскости, расположенную выше кривой  $K$ . Это отображение проектирования поверхности на плоскость над кривой  $K$  имеет особенность, а именно складку Уитни.

Двузначное поле предельных направлений на плоскости определяет на построенной поверхности однозначное поле направлений всюду, кроме тех самых особых точек кривой  $K$  (где индикатриса в 0 касается  $K$ ), которые мы хотим изучать.

Предельные линии обоих полей предельных направлений после перехода на построенную поверхность образуют систему фазовых кривых гладкого векторного поля с особенностями в интересующих нас точках. Эти особые точки могут быть узлами, фокусами или седлами (на рис. 59 средняя точка — узел, а обе крайние — седла). Таким образом, расположение предельных линий на исходной плоскости получается из расположения фазовых кривых векторного поля в окрестности особой точки при отображении складки Уитни. Хотя это отображение Уитни и фазовые кривые не вполне независимы (в частности, над  $K$  фазовые кривые касаются ядра проектирования), сказанного достаточно, чтобы исследовать расположение предельных линий вблизи особой точки (между прочим, такую же картину образуют асимптотические линии вблизи параболической кривой на поверхности).

На рис. 59 изображен один из вариантов этого расположения. На рисунке видно, что изображенная Т-образным пунктиром граница области достижимости образована проекциями сепаратрис седел (крайних особых точек) при отображении двулистно накрывающей поверхности на плоскость. Над точкой 4 на накрывающей лежит особая точка типа «узел». В этот узел входят с разных сторон две сепаратрисы седел.

В узле эти две кривые имеют общую касательную и (в случае общего положения) могут быть заданы уравнениями парабол степени  $\alpha > 1$  вида

$$y = A |x|^\alpha \quad \text{при } x \leq 0, \quad y = B |x|^\alpha \quad \text{при } x \geq 0$$

в подходящей системе координат.

Четвертая особенность границы области достижимости получается из этой пары парабол степени  $\alpha$  на накрывающей поверхности при отображении складки Уитни.

Это обстоятельство показывает, между прочим, ошибочность чрезвычайно распространенного среди катастрофистов вульгарного истолкования деклараций Р. Тома о том, что «в природе встречаются только устойчивые явления и потому при изучении каждой задачи следует изучать устойчивые случаи, отбрасывая остальные как нереализуемые». В данном случае особенности первых трех типов устойчивы (с точностью до диффеоморфизмов), а четвертого нет. В то же время все 4 типа особенностей встречаются одинаково часто и изучение последней ничуть не менее важно, чем исследование остальных трех.

Об особенностях области достижимости, функции времени и оптимальной стратегии в управляемых системах общего положения с фазовым пространством большей размерности известно удивительно мало — лишь в 1982 г. доказано, что область достижимости является топологическим многообразием с краем.

Одним из промежуточных вопросов при исследовании управляемых систем оказывается вопрос об особенностях выпуклых оболочек гладких многообразий (кривых, поверхностей, ...).

*Выпуклой оболочкой* множества называется пересечение всех содержащих его полупространств. Индикатриса управляемой системы может быть невыпуклой.

Однако оказывается, что невыпуклую индикатрису можно заменить ее выпуклой оболочкой.

Например, индикатриса скоростей яхты при встречном ветре невыпукла (рис. 60). Против ветра можно, однако, двигаться *галсами*, применяя *смешанную стратегию*, т. е. перемежая участки движения с разными скоростями, принадлежащими индикатрисе. Средняя скорость движения при смешанной стратегии принадлежит множеству средних арифметических используемых векторов индикатрисы, т. е. выпуклой оболочке.

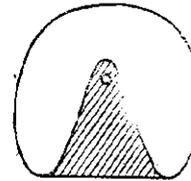


Рис. 60. Выпукление индикатрисы при помощи смешанной стратегии

Особенности выпуклых оболочек кривых и поверхностей общего положения в трехмерном пространстве исследованы В. Д. Седых и В. М. Закалюкиным. В случае кривых с точностью до гладкой замены переменных

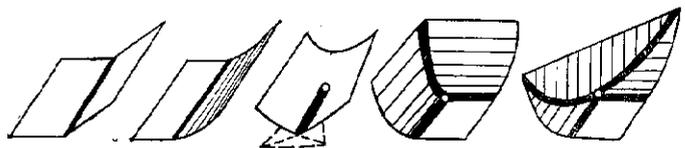


Рис. 61. Типичные особенности выпуклых оболочек пространственных кривых

оболочка задается в окрестности каждой своей точки одной из шести формул:

$$\begin{aligned} z \geq 0, \quad z \geq |x|, \quad z \geq |x|, \\ z \geq \min(u^4 + xu^2 + yu), \quad z \geq \min^2(x, y, 0), \\ (z \geq \min^2(x, y, 0), \quad x + y \geq 0) \end{aligned}$$

(рис. 61). В случае поверхностей — одной из трех формул

$$z \geq 0, \quad z \geq x|x|, \quad z \geq \rho^2(x, y),$$

где  $\rho(x, y)$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до угла  $y \geq c|x|$  (рис. 62). Число  $c > 0$  является модулем (инвариантом) оболочки, соответствующие разным  $c$ , не сводятся одна к другой гладким преобразованием.

Особенности выпуклых оболочек в пространстве большей размерности мало изучены. Согласно В. Д. Седых, выпуклая оболочка общего  $k$ -мерного многообразия в пространстве размерности выше  $k+2$  имеет модули, являющиеся функциями  $k$  переменных.

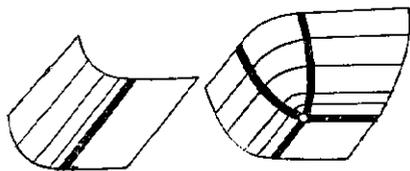


Рис. 62. Типичные особенности выпуклых оболочек поверхностей

Тень, отбрасываемая бесконечно-гладким или даже аналитическим выпуклым телом, может, как это ни кажется странным, иметь особенности. А именно, граница тени трехмерного выпуклого тела может иметь разрывы третьей производной, а тела размерности 4 и выше — даже второй (И. А. Богаевский, 1990).

Много новых интересных особенностей возникает в

оптимизационных задачах с ограничениями, например в задаче об обходе препятствия. Их исследование привело к новым результатам в одной из самых классических областей математики — геометрии гладких поверхностей в трехмерном пространстве.

## 12. ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Гладкая кривая на плоскости может иметь касательную со сколь угодно большим числом точек касания (рис. 63), но это не в случае общего положения. Малым шевелением кривой можно добиться того, что никакая прямая не будет касаться ее более чем в двух точках.

В скольких точках может касаться прямой поверхность общего положения? Немного подумав или поэкспериментировав, читатель может убедиться, что наибольшее число точек касания равно четырём; сохраняя три точки касания, прямую можно двигать, две — двигать в двух направлениях.

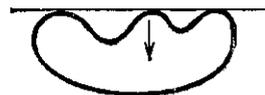


Рис. 63. Тройная касательная нетипичной кривой

Порядок касания прямой с кривой или поверхностью также может быть различным (например, порядок касания оси  $x$  с графиком  $y = x^2$  первый,  $x^3$  — второй и т. д.) Плоская кривая общего положения не имеет касательных выше второго порядка (второй порядок касания встречается в отдельных точках кривой, называемых *точками перегиба*).

Для поверхности в пространстве дело обстоит уже не так просто. В точках, близ которых поверхность не выпукла, имеются касательные выше первого порядка (они называются *асимптотическими касательными*). Для поверхности общего положения касательные третьего порядка имеются на некоторой линии, а четвертого — в отдельных точках; касательных выше четвертого порядка общая поверхность не имеет.

Все точки поверхности общего положения делятся по порядкам касательных на следующие 7 классов (рис. 64):

- 1) область эллиптических точек (все касательные порядка 1);
- 2) область гиперболических точек (две асимптотические касательные).

Эти две области разделяет общая граница:  
 3) линия параболических точек (одна асимптотическая касательная).

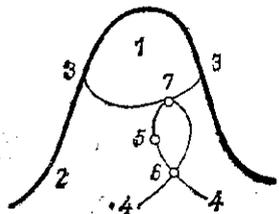


Рис. 64. Классификация точек на гладкой поверхности

Внутри области гиперболичности выделяется особая линия:  
 4) кривая перегиба асимптотических линий (есть касательная третьего порядка).

Наконец, на этой кривой выделены еще особые точки трех типов:  
 5) точка двойного перегиба касательная четвертого порядка;  
 6) перегиб обеих асимптотических линий (две касательные третьего порядка);

7) общие точки линий 3) и 4).

Для поверхностей общего положения в точках 6) происходит пересечение двух ветвей линии перегибов под ненулевым углом, а в точках 7) — касание (первого порядка) линий 3) и 4).

Описанная классификация точек поверхности (О. А. Платонова, Е. Е. Ландис) следующим образом связана с классификацией особенностей волновых фронтов.

Математики называют точками объекты любой природы. Рассмотрим, например, множество всех невертикальных прямых на плоскости  $(x, y)$ .

Такие прямые задаются уравнениями вида  $y = ax + b$ . Следовательно, одна прямая определяется парой чисел  $(a, b)$  и может рассматриваться как точка плоскости с координатами  $(a, b)$ . Эта плоскость называется двойственной к исходной плоскости. Ее точки — это прямые исходной плоскости.

Если на исходной плоскости дана гладкая кривая, то в каждой ее точке имеется касательная прямая. При движении точки вдоль кривой касательная меняется, следовательно, движется точка двойственной плоскости. Таким образом, на двойственной плоскости возникает кривая — множество всех касательных исходной кривой. Эта кривая называется двойственной к исходной.

Если исходная кривая гладкая и выпуклая, то двойственная кривая тоже гладкая, если же исходная кривая имеет точку перегиба, то на двойственной кривой ей соответствует точка возврата (рис. 65).

Кривые, двойственные к гладким кривым общего положения, имеют такие же особенности, как волновые

фронты общего положения на плоскости, и так же перестраиваются при общей гладкой деформации исходной кривой, как перестраивается распространяющийся общим образом по плоскости общий фронт.

Точно так же плоскости в трехмерном пространстве образуют двойственное трехмерное пространство, и все касательные плоскости к гладкой поверхности образуют

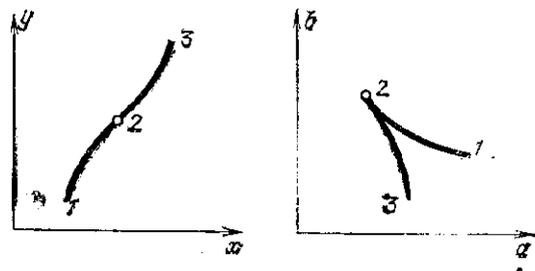


Рис. 65. Двойственность точек перегиба и возврата

двойственную поверхность. Особенности поверхности, двойственной к поверхности общего положения, такие же, как у волнового фронта, т. е. ребра возврата с ласточкиными хвостами.

Линии параболических точек исходной поверхности соответствует на двойственной поверхности ребро возврата. Особые точки на этой линии (где она касается линии перегиба асимптотических) соответствуют ласточкиным хвостам. Линия самопересечения ласточкиного хвоста состоит из двойных касательных плоскостей исходной поверхности. Следовательно, в точке 7) сливаются две точки касания плоскости с исходной поверхностью, чем и заканчивается однопараметрическое семейство двойных касательных плоскостей.

Классы точек на поверхности общего положения проявляются также в виде различных особенностей видимого контура. Если направление проектирования — общего положения, то особенности — лишь складки и сборки, по теореме Уитни. Однако, выбрав направление проектирования специальным образом, можно получить и некоторые не общие проекции поверхности общего положения. Оказывается, все такие проектирования локально приводятся к проектированиям перечисленных ниже 9 поверхностей  $z = f(x, y)$  вдоль оси  $x$ :

Тип	1	2	3,4	5
$f$	$x^2$	$x^3 + xy$	$x^3 \pm xy^2$	$x^3 + xy^3$
Тип	6	7	8,9	
$f$	$x^4 + xy$	$x^4 + x^2y + xy^2$	$x^5 + x^3y \pm xy$	

(поверхности проектируются на плоскость,  $(y, z)$ , приведение осуществляется заменой  $X(x, y, z), Y(y, z), Z(y, z)$ ).

Видимые контуры, соответствующие этим проекциям, изображены на рис. 66.

Соответствие между классификацией проектирований и точек на поверхности состоит в следующем. 1 — это проектирование по неасимптотическому направлению (складка Уитни).

Проектирование по асимптотическому направлению в общей точке гиперболической области принадлежит типу 2. Это проектирование имеет особенностью смену Уитни. При малом шевелении направления проектирования особая точка лишь немного перемещается по поверхности: новое направление оказывается асимптотическим в близкой точке. Таким образом, чтобы увидеть смену, достаточно взглянуть на общую поверхность по асимптотическому направлению.

При движении поверхности или наблюдателя в отдельные моменты появятся особенности 3, 4 и 6.

Проектирования 6 (и 8 или 9) соответствуют гиперболической области (а именно асимптотическим касательным третьего и четвертого порядков соответственно).

По спине двугорбого верблюда (см. рис. 43) проходит линия перегиба асимптотических. Касательные третьего порядка, приложенные в ее точках, образуют поверхность. Проходя мимо верблюда, мы дважды пересекаем эту поверхность. В момент пересечения видимый контур спины имеет особенность типа  $y^3 = x^4$ , а проектирование — тип 6.

Остальные особенности возникают при проектировании по направлению, асимптотическому в параболической точке. Простейшие из них — особенности 3 и 4. Проектирование 3 реализуется в момент, когда мы, спускаясь с бугра, начинаем видеть его контур (см. рис. 41). Первая появляющаяся точка контура — параболическая.

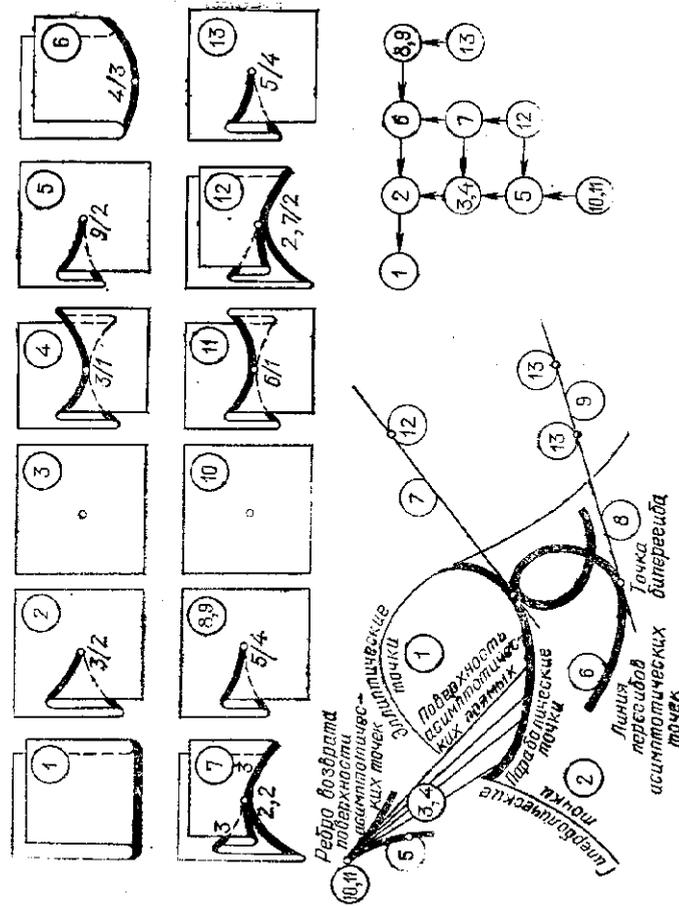


Рис. 66. Видимые контуры и порядки их особенностей для типичных проектирований

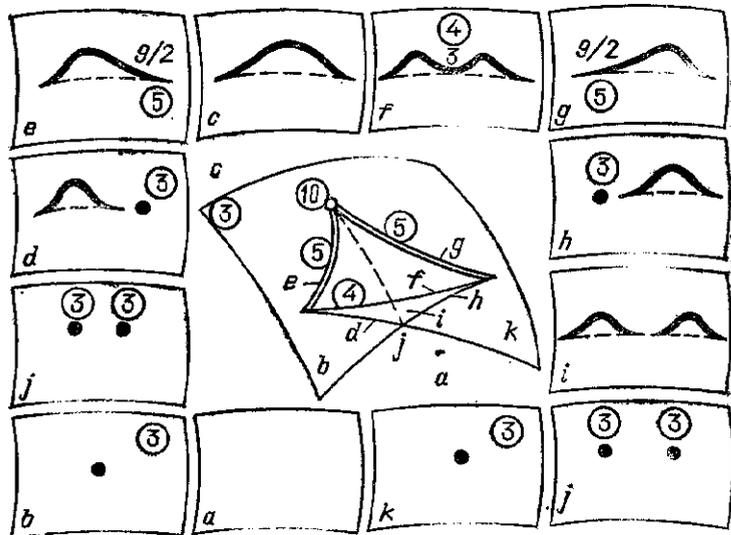


Рис. 67. Бифуркации проектирований при деформации центра проекции: случаи 10–11,  $z = x^3 \pm xy^4$

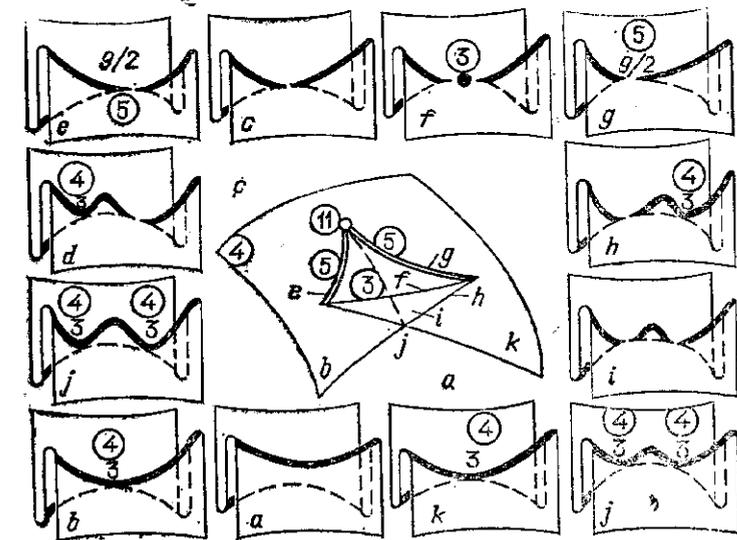


Рис. 68. Бифуркации проектирований: случай 12,  $z = x^4 + x^2y + xy^3$

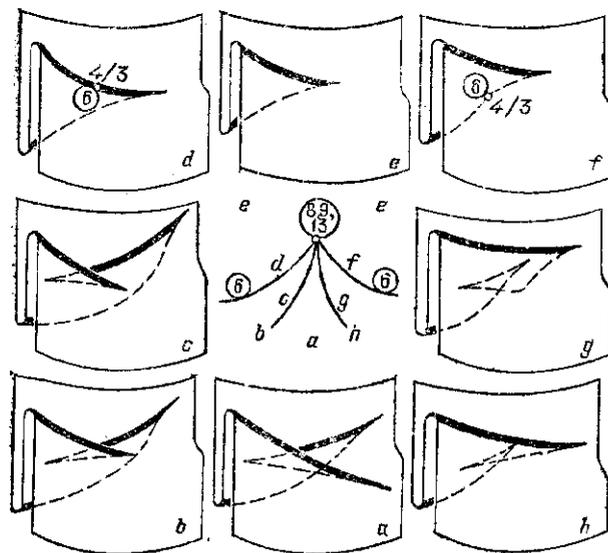


Рис. 69. Бифуркации проектирований: случай 13,  $z = x^5 + xy$   
З. В. Н. Арнольд

При прохождении особенности 4 происходит слияние или разделение двух компонент видимого контура.

Особенности 5, 7, 8 и 9 реализуются лишь при изолированных направлениях проектирования, и их нужно специально искать. (8 и 9 — проектирование вдоль касательной четвертого порядка, 7 — вдоль параболической касательной третьего порядка, 5 — точка «параллельности асимптотических в бесконечно близких параболических точках»). При проектировании из отдельных точек реализуются еще 4 особенности 10—13:  $z = x^3 \pm xy^4$ ,  $z = x^4 + x^2y + xy^3$ ,  $z = x^5 + xy$  (рис. 66—69).

### 13. ЗАДАЧА ОБ ОБОДЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве препятствие, ограниченное гладкой поверхностью (рис. 70). Ясно, что кратчайший путь из  $x$  в  $y$  в обход препятствия состоит из отрезков прямых и отрезков геодезических (кратчайших линий) на поверхности препятствия. На геометрию кратчайших путей сильно влияют различные перегибы поверхности препятствия.

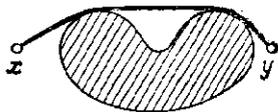


Рис. 70. Кратчайший путь в обход препятствия

Предположим, что начальная точка пути,  $x$ , зафиксирована, и рассмотрим кратчайшие пути, ведущие из  $x$  во всевозможные точки  $y$ . Пути в загороженные препятствием точки начинаются с отрезков касающихся препятствия прямых. Продолжения этих путей образуют пучок (однопараметрическое семейство) геодезических на поверхности препятствия. Следующие участки путей представляют собой новые отрезки прямых, касательных к геодезическим; они могут заканчиваться в конечной точке  $y$  или снова касаться поверхности препятствия и т. д.

Рассмотрим простейший случай пути, состоящего из начального и конечного отрезков прямой с отрезком геодезической между ними. Близкие геодезические пучка заполняют на поверхности препятствия некоторую область. В каждой точке этой области геодезическая пучка имеет определенное направление. В точках общего положения это направление не асимптотическое. Условие касания геодезической пучка с асимптотическим направлением — это одно условие на точку поверхности. Для по-

верхности и пучка общего положения это условие выполняется на некоторой кривой на поверхности (зависящей от пучка). На рис. 71 асимптотические направления изображены горизонтальными отрезками, а кривая касания обозначена буквой  $K$ ; геодезические — жирные линии.

В отдельных точках (0 на рис. 71) эта кривая  $K$  сама будет иметь асимптотическое направление — это точки пересечения  $K$  с кривой  $\mathcal{L}$  перегиба асимптотических (см. п. 12).

Таким образом возникает *двупараметрическое семейство путей*: один параметр нумерует геодезические линии пучка, другой — точку срыва касательной, уходящей с поверхности препятствия. Вдоль каждого пути определена функция времени (отсчитываемая от начальной точки  $x$ ). Время достижения конечной точки  $y$  по такому пути определено не однозначно (в одну конечную точку может вести несколько таких путей), и вдобавок не все наши пути обходят препятствие. Тем не менее ясно, что исследование полученной многозначной функции времени составляет необходимый этап изучения особенностей системы кратчайших путей.

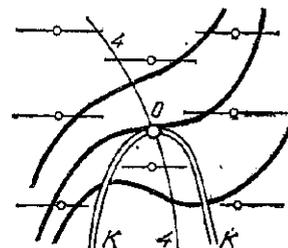


Рис. 71. Асимптотические направления и типичный пучок геодезических на поверхности

Расположим за препятствием еще одну поверхность (стенку) общего положения и рассмотрим *отображение срыва* поверхности препятствия на стенку, сопоставляющее каждой точке препятствия точку пересечения срывающейся в ней касательной к геодезической пучка со стенкой.

Когда стенка удаляется на бесконечность, отображение срыва переходит в *гауссово отображение пучка*: каждой точке поверхности препятствия сопоставляется точка единичной сферы, а именно конец вектора длины 1, параллельного касательной к геодезической.

*Отображение срыва и гауссово отображение пучка имеют особенности в точности на той линии, где направление геодезической пучка асимптотическое.* Эти особенности оказываются складками в общих точках и сборками в особых точках, где направление кривой асимптотическое (О. А. Платонова).

Многозначная функция времени также имеет особенность в точках, соответствующих асимптотическому срыву.

При подходящем выборе системы гладких координат функция времени приводится к виду  $T = x - y^{5/2}$  в окрестности общей точки особой поверхности  $y = 0$ . Иными словами, если отметить на каждом срывающемся луче точку, отвечающую пути длины  $T$ , то эти точки образуют поверхность

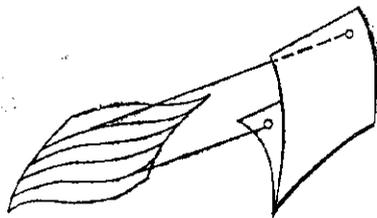


Рис. 72. Типичная особенность фронта в задаче об обходе препятствия: ребро возврата степени  $5/2$

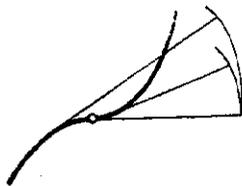


Рис. 73. Типичная особенность эвольвенты плоской кривой — клюв степени  $5/2$  на касательной перегиба кривой

фронта с ребром возврата, локально задающуюся уравнением  $x^2 = y^5$  (рис. 72).

Аналогичный результат получается в плоской задаче (в этом случае фронты называются эвольвентами и имеют особенность типа  $x^2 = y^5$  в точках касательной перегиба (рис. 73)).

Фронт пространственной задачи в особой точке (точке сборки гауссова отображения пучка) локально задается уравнениями

$$x = u, \quad y = v^3 + uv, \quad z = (135v^4 + 189uv^2 + 70u^2)v^3,$$

где  $(u, v)$  — параметры,  $(x, y, z)$  — криволинейные координаты в пространстве с началом в не лежащей на поверхности препятствия точке особого асимптотического луча.

#### 14. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ И КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИИ

Многие вопросы теории особенностей (например, классификация особенностей каустик и волновых фронтов, а также исследование всевозможных особенностей в задачах оптимизации и вариационного исчисления) становятся понятными только в рамках геометрии симплектических и контактных многообразий, освежающе непохожей на обычные геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Начнем с трех примеров особенностей специального вида.

1. **Градиентное отображение.** Рассмотрим в евклидовом пространстве гладкую функцию. *Градиентным отображением* называется отображение, сопоставляющее точке значение градиента функции в ней. Градиентные отображения — весьма специальный класс отображений пространств одинаковой размерности.

Особенности градиентных отображений общего положения отличны от общих особенностей отображений пространств одинаковых размерностей: их «меньше» потому, что не всякое отображение можно реализовать как градиентное, но «больше» потому, что явление, не типичное для общих отображений, может быть типичным для градиентных.

2. **Нормальное отображение.** Рассмотрим множество всех векторов нормалей к поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Сопоставим каждому вектору его конец (вектору  $p$ , приложенному в точке  $q$ , сопоставляем точку  $p + q$ ). Мы получаем отображение трехмерного многообразия векторов нормалей в трехмерное пространство ( $n$ -мерного в  $n$ -мерное, если начать с подмногообразия любой размерности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве).

Это отображение называется *нормальным отображением* исходного многообразия. Особенности нормальных отображений подмногообразий общего положения составляют специальный класс особенностей отображений пространств одинаковой размерности. Критические значения нормального отображения образуют каустик (геометрическое место центров кривизны) исходного подмногообразия: см. рис. 33, где исходное многообразие — эллипс.

3. **Гауссово отображение.** Рассмотрим двустороннюю поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Перенесем единичные векторы положительных нормалей из каждой точки поверхности в начало координат. Концы этих векторов лежат на единичной сфере. Полученное отображение поверхности на сферу называется *гауссовым отображением*.

Гауссовы отображения составляют еще один специальный класс отображений многообразий одинаковой размерности ( $n - 1$ , если начинать с гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве).

И вот оказывается, что *типичные особенности отображений всех этих трех классов* (градиентных, нормальных и гауссовых) *одинаковы*: все три теории — частные случаи общей теории лагранжевых особенностей в симплектической геометрии.

Симплектическая геометрия — это геометрия фазового пространства (пространства координат и импульсов классической механики). Она явилась итогом длительного развития механики, вариационного исчисления и т. д.

В прошлом веке эту область геометрии называли аналитической динамикой, и Лагранж гордился, что изгнал из нее чертежи. Чтобы проникнуть в симплектическую геометрию, минуя длинный исторический путь, проще всего воспользоваться аксиоматическим методом, имеющим, как заметил Б. Рассел, много преимуществ, подобных преимуществам воровства перед честным трудом.

Сущность этого метода состоит в том, чтобы превращать теоремы в определения. Содержательная часть теоремы становится тогда *мотивировкой* определения, и алгебраисты ради повышения авторитета своей науки ее обычно опускают (понять немотивированное определение невозможно, но многие ли из пассажиров самолета знают, как и почему он изготовлен?).

*Теорема Пифагора*, бывшая в свое время высшим достижением математической культуры, низведена в современном аксиоматическом изложении евклидовой геометрии до малозаметного *определения*: *евклидовой структурой* в линейном пространстве называется линейная по каждому аргументу симметрическая функция пары векторов (*скалярное произведение*), для которой скалярный квадрат любого ненулевого вектора положителен.

Определение *симплектической структуры* в линейном пространстве аналогично: это линейная по каждому аргументу кососимметрическая функция пары векторов (*кососкалярное произведение*), которая невырождена (любой ненулевой вектор не всем векторам косоортогонален, т. е. его кососкалярное произведение с некоторыми векторами ненулевое).

**П р и м е р.** Назовем кососкалярным произведением двух векторов на ориентированной плоскости ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы (т. е. определитель матрицы, составленной из компонент векторов). Это произведение — симплектическая структура на плоскости.

В трехмерном пространстве (и вообще в нечетномерном пространстве) симплектических структур нет. Симплектическую структуру в четырехмерном (и вообще в четномерном) пространстве легко построить, представив пространство в виде суммы двумерных плоскостей: кососкалярное произведение распадается в сумму площадей проекций на эти плоскости.

Все симплектические пространства фиксированной размерности изоморфны (как и все евклидовы). Мы будем называть кососкалярное произведение двух векторов «площадью» натянутого на них параллелограмма.

Каждое линейное пространство в евклидовом пространстве имеет *ортогональное дополнение*, его размерность равна коразмерности исходного подпространства.

В симплектическом пространстве определено *косоортогональное дополнение* к линейному подпространству: оно состоит из всех векторов, кососкалярные произведения которых со всеми векторами подпространства равны нулю. Размерность косоортогонального дополнения также равна коразмерности исходного подпространства. Например, косоортогональное дополнение к прямой на плоскости — сама эта прямая.

Линейное подпространство, являющееся своим собственным косоортогональным дополнением, называется *лагранжевым подпространством*. Его размерность равна половине размерности исходного симплектического пространства.

*Риманова структура* на многообразии задается выбором евклидовой структуры в пространстве, касательном к многообразию в любой точке.

Точно так же *симплектическая структура* на многообразии задается выбором симплектической структуры в каждом его касательном пространстве; однако в отличие от риманова случая эти структуры не произвольны, а связаны между собой, как это объяснено ниже.

Риманова структура на многообразии позволяет измерять длины кривых на нем, суммируя длины малых векторов, составляющих кривую. Точно так же симплектическая структура позволяет измерять «площади» ориентированных двумерных поверхностей, лежащих в симплектическом многообразии (суммируя «площади» составляющих поверхность малых параллелограммов). Дополнительное условие, связывающее симплектические структуры в разных касательных пространствах, таково: «площадь» всей границы любой трехмерной фигуры равна 0.

В линейном симплектическом пространстве можно ввести структуру симплектического многообразия, определив кососкалярное произведение приложенных в любой точке векторов как кососкалярное произведение векторов, полученных из них параллельным переносом в начало. Легко проверить, что условие согласования здесь выполнено.

Существует много неизоморфных друг другу римановых структур в окрестности точки плоскости или пространства большего числа измерений (для различения их Риман ввел свою кривизну).

В отличие от римановых многообразий *все симплектические многообразия фиксированной размерности в окрестности каждой своей точки изоморфны* (отображаются друг на друга с сохранением «площадей»). Таким образом, локально каждое симплектическое многообразие изоморфно стандартному симплектическому линейному пространству. В таком пространстве можно ввести координаты  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  так, что кососкалярное произведение равно сумме ориентированных площадей проекций на плоскости  $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ .

Подмногообразие симплектического пространства называется *лагранжевым многообразием*, если его касательная плоскость в каждой точке лагранжева.

Расслоение симплектического пространства на подмногообразия называется *лагранжевым расслоением*, если слои лагранжевы.

Всякое лагранжево расслоение локально изоморфно стандартному расслоению фазового пространства над конфигурационным,  $(p, q) \mapsto q$  (слои — пространства импульсов,  $q = \text{const}$ ). Конфигурационное  $q$ -пространство называется *базой* этого расслоения.

Предположим теперь, что в пространстве лагранжева расслоения дано еще одно лагранжево многообразие. Тогда возникает гладкое отображение этого лагранжева многообразия на базу лагранжева расслоения (т. е. на конфигурационное пространство с координатами  $q_i$ ): каждой точке  $(p, q)$  лагранжева многообразия сопоставляется точка  $q$  конфигурационного пространства.

Полученное отображение многообразий одинаковой размерности  $n$  называется *лагранжевым отображением*, а его особенности — *лагранжевыми особенностями*.

Это — специальный класс особенностей гладких отображений многообразий одинаковой размерности. Для этого класса построена классификационная теория, аналогичная общей теории особенностей.

При  $n = 2$  лагранжевы особенности общего положения исчерпываются складками и сборками, как и общие особенности (впрочем, лагранжева сборка имеет два лагранжево неэквивалентных\*) варианта).

Особенности лагранжевых отображений трехмерных лагранжевых многообразий общего положения уже не все встречаются среди обычных особенностей общего положения.

Теперь мы покажем, что *градиентные, нормальные и гауссовы особенности лагранжевы*.

1. Пусть  $F$  — гладкая функция от  $p$ . Тогда многообразие  $q = \partial F / \partial p$  лагранжево. Поэтому особенности градиентного отображения лагранжевы.

2. Рассмотрим гладкое подмногообразие в евклидовом пространстве. Рассмотрим множество всех перпендикулярных ему векторов (во всех его точках  $q$ ). Многообразие, образованное векторами  $p$ , приложенными в точках  $p + q$ , лагранжево. Нормальное отображение можно рассматривать как лагранжево отображение этого многообразия на базу,  $(p, p + q) \mapsto (p + q)$ .

3. Рассмотрим многообразие всех ориентированных прямых в евклидовом пространстве. Это многообразие симплектическое, так как его можно рассматривать как фазовое пространство движения точки по сфере (направление прямой определяет точку на сфере, а точка пересечения прямой с перпендикулярной ей касательной плоскостью сферы — величину импульса).

Рассмотрим многообразие ориентированных нормалей к поверхности в нашем пространстве. Это подмногообразие в симплектическом многообразии прямых лагранжево. Гауссово отображение можно рассматривать как лагранжево отображение (отображение проектирования построенного подмногообразия на сферу, являющуюся базой лагранжева расслоения фазового пространства).

Таким образом, теории градиентных, нормальных и гауссовых особенностей сводятся к теории лагранжевых особенностей.

Встретившаяся нам в конце симплектическая структура многообразия ориентированных прямых — не столь искусственное образование, как это кажется на первый

\*) Лагранжева эквивалентность двух лагранжевых особенностей — это отображение первого лагранжева расслоения на второе, переводящее первую симплектическую структуру во вторую и первое лагранжево подмногообразие во второе.

взгляд. Дело в том, что множество решений любой вариационной задачи (или вообще множество решений уравнений Гамильтона с фиксированным значением функции Гамильтона) образует симплектическое многообразие, очень полезное для исследования свойств решений.

Рассмотрим, например, двухпараметрическое семейство лучей, срывающихся с геодезических на поверхности препятствия в трехмерном пространстве, как это указано на рис. 72. Это семейство оказывается двумерным лагранжевым подмногообразием четырехмерного пространства всех лучей. Но в отличие от ранее встречавшихся нам лагранжевых подмногообразий это лагранжево многообразие само имеет особенности. Особенности эти проявляются там, где срывающийся луч — асимптотический для поверхности препятствия. Такие лучи образуют ребро возврата (типа  $x^2 = y^3$ ) лагранжева многообразия срывающихся лучей.

На этом ребре возврата есть еще особые точки, в окрестности которых многообразие срывающихся лучей устроено как раскрытый ласточкин хвост (поверхность в четырехмерном пространстве многочленов  $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ , образованная многочленами с трехкратными корнями).

Эта поверхность встречается также в других задачах теории особенностей (например, при исследовании заметания каустики ребрами возврата движущихся волновых фронтов) и является, видимо, одним из основных примеров будущей теории лагранжевых многообразий с особенностями.

В евклидовой и в римановой геометрии имеется обширная теория внешней кривизны: кроме внутренних свойств подмногообразия, определяемых его метрикой, имеются еще различия в расположении подмногообразий с одинаковыми внутренними геометриями в объемлющем пространстве.

В симплектической геометрии, как недавно доказал А. Б. Гивенталь, дело обстоит проще: внутренняя геометрия (сужение симплектической структуры на множество касательных векторов к подмногообразию) определяет внешнюю. Иными словами, *подмногообразия с одинаковой внутренней геометрией локально переводятся друг в друга сохраняющим симплектическую структуру диффеоморфизмом объемлющего пространства.*

Здесь открывается новая глава теории особенностей — исследование особенностей расположения подмногообра-

зий в симплектическом пространстве, на важность которого обратил внимание Р. Мельроз в недавних работах по дифракции. Начало классификации таких особенностей получается, по теореме Гивенталья, из результатов Ж. Мартине и его последователей о вырождениях симплектической структуры. Например, двумерное подмногообразие общего положения в четырехмерном симплектическом пространстве локально приводится сохраняющим симплектическую структуру преобразованием к одной из двух нормальных форм:

$$p_2 = q_2 = 0 \text{ или } q_1 = 0, p_2 = p_1^2.$$

На нечетномерных многообразиях не бывает симплектических структур, но зато бывают контактные. Контактная геометрия играет для оптики и теории распространения волн такую же роль, как симплектическая для механики.

Контактная структура на нечетномерном многообразии определяется выбором в касательном пространстве в каждой точке гиперплоскости (подпространства коразмерности один). Два поля гиперплоскостей на многообразии фиксированной размерности локально эквивалентны (переводятся друг в друга диффеоморфизмом), если только оба они общего положения вблизи изучаемых точек.

*Контактной структурой* называется поле гиперплоскостей, являющееся полем общего положения вблизи каждой точки нечетномерного многообразия.

Контактным является многообразие всех линейных элементов на плоскости. Оно трехмерно. Контактная структура задается так: скорость движения элемента принадлежит (гипер)плоскости поля, если скорость движения точки приложения принадлежит элементу. Точно так же определяется контактная структура в  $2n - 1$ -мерном многообразии элементов гиперплоскостей на любом  $n$ -мерном многообразии.

Роль лагранжевых многообразий в контактном случае переходит к лежандровым (интегральным подмногообразиям поля гиперплоскостей наибольшей возможной размерности, т. е. размерности  $m$  в контактном многообразии размерности  $2m + 1$ ).

Особенности волновых фронтов, преобразований Лежандра, а также гиперповерхностей, двойственных к гладким, — это лежандровы особенности. Вся симплектическая теория (включая, например, теорему Гивенталья) имеет контактные аналоги, чрезвычайно по-

лезные для исследования особенностей в вариационных задачах.

Распространение волн в сплошных средах описывается *световой гиперповерхностью* в контактном пространстве (называемой также «дисперсионным соотношением» или «многообразием нулей главного символа» в пространстве контактных элементов пространства-времени).

Для волн, описываемых вариационными принципами с гиперболическими уравнениями Эйлера — Лагранжа, указанная гиперповерхность, вообще говоря, имеет особенности.

Многообразие особенностей световой гиперповерхности типичной вариационной системы имеет коразмерность 3 в контактном пространстве. На трансверсальном к многообразию особенностей трехмерном пространстве световая гиперповерхность оставляет след, диффеоморфный квадратичному конусу  $u^2 + v^2 = w^2$ .

Особенности световых лучей и волновых фронтов определяются расположением световой гиперповерхности по отношению к контактной структуре (лучи — это проекции ее характеристик, а фронты — ее лежандровых многообразий). Анализ типичных расположений обнаруживает своеобразное явление *внутреннего рассеяния* волн на неоднородностях среды.

Обычно волны разных типов (скажем, продольные и поперечные) распространяются внутри среды независимо и лишь на границе могут порождать друг друга. Здесь же трансформация волн осуществляется во внутренних точках среды. Например, при распространении волн в одномерной нестационарной, неоднородной среде рассеяние в отдельные моменты времени испытывают отдельные лучи. Соответствующие характеристики в пространстве-времени касаются в одной точке (рис. 74).

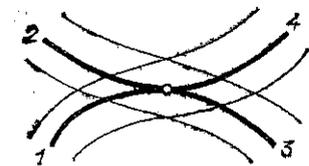


Рис. 74. Трансформация волн в одномерной среде

Кривые 1 3 и 2 4 на этом рисунке — гладкие, с касанием первого порядка. Касающиеся характеристики — это 1 4 и 2 3. На типичном волновом фронте, движущемся в трехмерном пространстве, трансформация волн происходит в отдельных изолированных точках.

За последние годы симплектическая и контактная геометрии появляются во всех отделах математики; как

у каждого жаворонка должен появиться хохолок, так всякая область математики в конце концов симплектизируется. В математике есть ряд операций разных уровней: функции действуют на числа, операторы — на функции, функторы — на операторы и т. д. Симплектизация относится к небольшому числу операций самого высшего уровня, действующих не на какие-нибудь мелочи (функции, категории, функторы), а на всю математику сразу. Хотя известно уже несколько таких операций высшего уровня (например, алгебраизация, бурбакизация, комплексификация, суперизация, симплектизация), для них нет никакой аксиоматической теории.

## 15. КОМПЛЕКСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Математики хорошо знают, что переход к комплексным числам обычно не усложняет, а упрощает задачу. Например, всякое алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет ровно  $n$  комплексных корней, в то время как нахождение числа вещественных корней — легкая задача.

Причина этого явления состоит в следующем. Одно комплексное уравнение — это два вещественных. Множества, заданные двумя уравнениями (скажем, линии в пространстве или точки на плоскости) называются множествами коразмерности два. Множества коразмерности два не разделяют объемлющее пространство. Поэтому от любой точки пространства вне множества коразмерности два можно добраться до любой другой такой точки путем, обходящим это множество.

Рассмотрим пространство каких-либо комплексных объектов (скажем, многочленов фиксированной степени с комплексными коэффициентами). Особые объекты (скажем, многочлены с кратными корнями) определяются *комплексным* уравнением на коэффициенты. Следовательно, *множество особых объектов имеет коразмерность два и не делит пространство всех объектов*. Например, комплексный ласточкин хвост, образованный в пространстве комплексных многочленов  $x^4 + ax^2 + bx + c$  многочленами с кратными корнями, не делит пространство всех таких многочленов (вещественно шестимерное).

Поэтому от любого неособого комплексного объекта (например, многочлена без кратных корней) к любому другому можно перейти непрерывным путем, оставаясь среди неособых объектов (в примере — среди многочле-

пов без кратных корней). Но при малой деформации неособого объекта его топология не меняется (скажем, число корней многочлена без кратных корней не меняется при достаточно малом изменении коэффициентов). Следовательно, топологические инварианты одинаковы у всех неособых объектов данного класса (например, число комплексных корней всех многочленов данной степени без кратных корней одинаково). Итак, остается изучить топологию одного неособого комплексного объекта (найти число комплексных корней одного уравнения без кратных корней \*), чтобы узнать топологию всех. Напротив, в вещественном случае множество особых объектов делит пространство всех объектов на части. Например, обычный ласточкин хвост (рис. 34) делит пространство вещественных многочленов  $x^4 + ax^2 + bx + c$  на 3 части: в одной лежат многочлены с четырьмя вещественными корнями, в другой с двумя, в третьей — без вещественных корней (сообразите, в какой части сколько корней!).

Рассмотрим теперь в качестве объектов кривые, заданные на плоскости  $(x, y)$  условием  $f(x, y) = 0$ , где  $f$  — какой-либо многочлен фиксированной степени. Например, если степень равна 2, то неособая кривая будет, как правило, эллипсом или гиперболой (все другие кривые второго порядка соответствуют исключительным, особым случаям).

Множество пар комплексных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению  $f(x, y) = 0$ , называется *комплексной кривой*. С вещественной точки зрения это двумерная поверхность в четырехмерном пространстве. Как правило почти при любых коэффициентах многочлена  $f$  комплексная кривая — неособая. Из предыдущих рассуждений следует, что все неособые кривые данной степени топологически одинаковы. Чтобы найти топологию этих поверхностей, достаточно поэтому изучить одну из неособых комплексных кривых данной степени.

Ответ оказывается таким: поверхность получается из сферы приделыванием  $g = (n-1)(n-2)/2$  ручек и выкидыванием из образовавшейся поверхности  $n$  точек. Например, комплексная прямая ( $n=1$ ) — это вещественная плоскость (сфера без одной точки), комплексная окружность — вещественный цилиндр (сфера без двух

\* Достаточно взять уравнение  $(x-1) \dots (x-n) = 0$ ; к приведенным рассуждениям остается добавить очень немного, чтобы получить вполне строгое доказательство «основной теоремы алгебры», по которой всякое уравнение степени  $n$  имеет  $n$  комплексных корней.

точек), комплексная кривая степени 3 топологически устроена как поверхность тора, проколота в трех местах.

Самый простой способ в этом убедиться — получить неособую кривую небольшим шевелением из набора  $n$  прямых. Начнем, скажем, с  $n$  вещественных прямых, расположенных общим образом на плоскости и потому пересекающихся в  $n(n-1)/2$  точках (рис. 75).

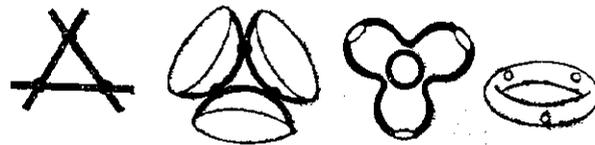


Рис. 75. Риманова поверхность плоской алгебраической кривой

Каждая прямая задается линейным неоднородным уравнением вида  $l = 0$ , где  $l = ax + by + c$ . Перемножим соответствующие  $n$  прямыми линейные функции  $l$ . Произведение обращается в нуль в точности на  $n$  прямых. Замена распадающейся на прямые кривой  $f = 0$  на неособую кривую  $f = (\text{малое число})$  и есть нужное шевеление.

При переходе к комплексным  $x$  и  $y$  каждая прямая становится в вещественном смысле плоскостью, так что кривая  $f = 0$  превращается при комплексификации в набор  $n$  плоскостей. Каждые две такие плоскости в четырехмерном пространстве пересекаются по точке (ведь точки при комплексификации так и остаются точками). При описанном выше шевелении поверхность становится гладкой. Сглаживание устроено так: окрестность точки пересечения на каждой из обеих пересекающихся плоскостей выкидывается и затем две образовавшихся окружности склеиваются друг с другом (так, чтобы получилась ориентируемая поверхность).

Например, из трех попарно пересекающихся по точке сфер при сглаживании трех точек пересечения получается тор (рис. 75). Точно так же из  $n$  сфер получается сфера с  $(n-1)(n-2)/2$  ручками, а из  $n$  плоскостей — сфера со столько же ручками без  $n$  точек.

Тем самым мы решили задачу о топологическом строении неособой комплексной алгебраической кривой степени  $n$  (сфера с ручками, возникающая в этой конструкции, называется римановой поверхностью кривой \*).

Что же касается топологического строения вещественной кривой степени  $n$ , то оно до сих пор известно лишь для кривых малой степени (неизвестно уже, как могут располагаться ветви кривой степени 8 на плоскости).

\* Между прочим, из топологических свойств тора (а именно из того, что пара меридианов делит тор на две части) следует, что периоды колебаний с одинаковой полной энергией в обоих ямах механической системы с потенциальной энергией четвертой степени одинаковы (на торической римановой поверхности множества уровней энергии — фазовые кривые обеих ям — равные меридианы).

Подобно теории кривых, теория особенностей также упрощается при переходе в комплексную область; многие явления, кажущиеся с вещественной точки зрения совершенно загадочными, в комплексной области получают прозрачное объяснение.

Рассмотрим, например, строение простейших критических точек комплексных функций (т. е. комплексификацию теории максимумов и минимумов).

Для вещественной функции критические точки связаны с перестройками линий или поверхностей уровня. Например, вещественная линия уровня  $x^2 + y^2 = c$  функции  $f = x^2 + y^2$  пуста при  $c < 0$  и является окружностью при  $c > 0$ . Для функции  $x^2 - y^2 = c$  перестройка иная: асимптоты гиперболы  $x^2 - y^2 = c$  по-разному соединены ветвями этой гиперболы в зависимости от знака  $c$ . В этих примерах единственное критическое значение  $c = 0$ . Многообразия критического уровня — негладкие, некритического — гладкие.

В комплексном случае ось значений функции становится плоскостью комплексного переменного  $c$ . Критические значения лежат в этой плоскости изолированно и не делят ее на части. Поэтому многообразия уровня  $c$  при всех некритических значениях  $c$  устроены топологически одинаково. Если  $c$ , изменяясь, проходит через критическое значение, то никакой перестройки не происходит: многообразие уровня, правда, становится особым в момент прохождения  $c$  через критическое значение, но затем мгновенно возвращается в первоначальное состояние.

В комплексном случае вместо того, чтобы *проходить* через критическое значение, нужно *обходить* вокруг него (проявление общего принципа, согласно которому комплексным аналогом вещественного понятия «край» является «разветвленное накрытие»).

Итак, рассмотрим на плоскости комплексного переменного  $c$  путь, обходящий критическое значение.

Каждой точке этого пути отвечает неособое многообразие уровня,  $f = c$ . При непрерывном изменении  $c$  многообразие уровня непрерывно меняется, оставаясь топологически таким же.

Иными словами, мы можем сопоставить каждой точке начального многообразия уровня близкую точку близкого многообразия уровня так, что получится взаимно-однозначное взаимно-непрерывное соответствие между обоими многообразиями уровня. Таким образом, мы получаем

отождествление исходного многообразия уровня с многообразием близкого уровня  $c$ .

При непрерывном изменении  $c$  это отождествление непрерывно меняется, и в конце концов, когда  $c$  возвращается к исходному положению, мы получаем отождествление исходного многообразия уровня с самим собой. Это отождествление называется *монодромией*.

Итак, монодромия есть взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение многообразия неособого уровня на самого себя. Оказывается, это отображение — вовсе не тождественное преобразование: когда  $c$  делает полный оборот вокруг критического значения, возвращается на место лишь многообразие уровня  $c$ , а вовсе не его отдельные точки \*).

Чтобы понять, что происходит при монодромии с точками многообразия неособого уровня, рассмотрим пример

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Изучим прежде всего многообразие неособого уровня  $x^2 + y^2 = c$ ,  $c \neq 0$ . В вещественном случае это уравнение определяет окружность, нас же интересует «комплексная окружность» — множество точек  $(x, y)$  плоскости двух комплексных переменных, сумма квадратов (комплексных) координат которых имеет фиксированное значение.

Мы уже знаем, что эта поверхность топологически устроена как цилиндр в четырехмерном пространстве.

Оказывается, монодромия поворачивает каждую из составляющих цилиндр окружностей на свой угол, меняющийся непрерывно от нуля на одном основании до  $2\pi$  на другом. Таким образом, оба края цилиндра поточечно остаются на месте,

в то время как поверхность перекручивается на целый оборот, так что, например, образующая цилиндра

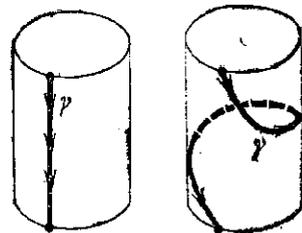


Рис. 76. Скручивание Дена — монодромия функции  $x^2 + y^2$

\* ) Ситуация здесь в точности такая же, как с листом Мёбиуса. При непрерывном обходе вдоль осевой окружности листа Мёбиуса мы можем непрерывно отождествлять поперечные ей отрезки. Но когда мы впервые вернемся к исходному отрезку, полученное отождествление этого отрезка с самим собой будет менять местами его концы.

превращается в спираль, делающую на пути от одного основания к другому полный оборот вокруг цилиндра (рис. 76).

Чтобы понять, почему это так, исследуем подробнее «комплексную окружность». Уравнение ее можно записать в виде  $y = \sqrt{c - x^2}$ . Из этой формулы видно, что каждому (комплексному) значению  $x$  соответствует пара значений  $y$ , за исключением  $x = \pm \sqrt{c}$  — каждому из этих двух особых значений  $x$  соответствует единственное (нулевое) значение  $y$ .

Следовательно, график комплексной «двузначной функции»  $y = \sqrt{c - x^2}$  распространит над плоскостью комплексной переменной  $x$  двулистно, причем оба листа соединены только в двух точках. Однако разделить оба листа, удалив лишь эти две точки, не удастся. В самом деле, заставим  $x$  обойти одну из этих точек по малому контуру, охватывающему ее один раз. Соответствующее значение  $y$ , непрерывно меняясь, вернется не к прежнему значению, а к другому. Действительно, из формулы

$$c - x^2 = (\sqrt{c} - x)(\sqrt{c} + x)$$

видно, что при обходе  $x$  вокруг одной из точек  $\pm \sqrt{c}$ , аргумент одного из сомножителей меняется на  $2\pi$ , а другого не меняется. Значит, аргумент  $y$  меняется при указанном обходе на  $\pi$ , т. е.  $y$  меняет знак и переходит с одного листа на другой.

При двукратном обходе  $x$  вокруг точки  $\sqrt{c}$  величина  $y$  возвращается к исходному значению. Точки  $x = \pm \sqrt{c}$  называются *точками ветвления* функции  $y = \sqrt{c - x^2}$ .

Чтобы лучше представить себе поверхность, заданную этой функцией, соединим обе точки ветвления отрезком. Если точка  $x$  гуляет по плоскости, не пересекая этого отрезка, то  $y$  возвращается к первоначальному значению всякий раз, когда  $x$  описывает замкнутый путь. Действительно, однократный обход любой из точек ветвления меняет лишь знак  $y$ , поэтому обход всего отрезка не меняет знака  $y$ .

Ясно, что наша поверхность  $x^2 + y^2 = c$  топологически устроена как объединение двух экземпляров плоскости комплексного переменного  $x$ , разрезанной вдоль отрезка между точками ветвления, при склеивании верхнего берега разреза на каждом экземпляре с нижним берегом на другом. Топологически эта поверхность есть

цилиндр. Разрез изображается на этом цилиндре экваториальной окружностью (рис. 77).

При приближении  $c$  к критическому значению 0 обе точки ветвления сближаются. Соединяющий их отрезок и обходящий его путь на римановой поверхности в пределе при  $c \rightarrow 0$  исчезают в критической точке. Поэтому

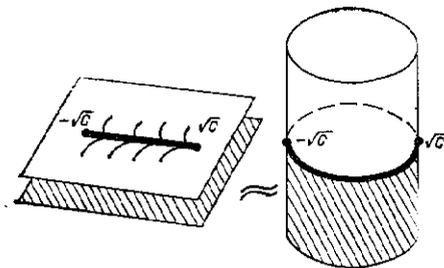


Рис. 77. Риманова поверхность кривой  $x^2 + y^2 = c$

экваториальный цикл на цилиндре  $x^2 + y^2 = c$  называют *исчезающим циклом*.

Для  $c > 0$  этот исчезающий цикл — обычная вещественная окружность. Итак, мы разобрались в строении множества неособого уровня вблизи критической точки при фиксированном значении функции, близком к критическому. Вид функции при этом не важен, лишь бы критическая точка была невырожденной. Ибо все невырожденные критические точки комплексных функций топологически локально одинаковы в соответствии с объясненным выше общим принципом (комплексное вырождение накладывает два вещественных условия). В частности, топология исчезающего цикла для гиперболического случая ( $x^2 - y^2 = c$ ) такая же, как для эллиптического,  $x^2 + y^2 = c$ , только в гиперболическом случае исчезающий цикл весь лежит в комплексной области.

Пусть теперь значение  $c$  обходит по малому контуру вокруг критического значения. Применим наш анализ комплексной линии уровня функции к исследованию особой точки, то есть линии уровня (вещественные или комплексные), достаточное близкое к критическому, можно взаимно-непрерывно и взаимно-однозначно спроектировать на линию критического уровня (вне указанной окрестности особой точки, рис. 78).

Отсюда следует, что монодромия, т. е. отождествление линий уровня  $c$ , непрерывно зависящее от пути, пробегаемого значением  $c$  при обходе критического значения, может быть выбрана так, что вне указанной окрестности все точки линии уровня вернутся на место, когда  $c$  совершит полный оборот.

Остается разобраться, что произойдет внутри окрестности. При этом достаточно рассмотреть стандартную

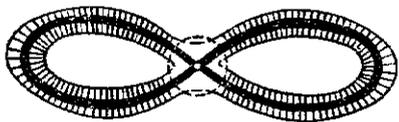


Рис. 78. Отождествление соседних множеств уровня функции вдали от критических точек

функцию  $f = x^2 + y^2$ . Часть комплексной линии уровня, попавшая внутрь окрестности, топологически представляет собой цилиндр, оба края которого выходят на границу окрестности. В то же время эта часть двулистно накрывает область на плоскости комплексного переменного  $x$  с ветвлением в точках  $\pm \sqrt{c}$ , как это объяснено выше (рис. 77).

Когда  $c$  совершает полный оборот вокруг нуля, отрезок между точками ветвления совершает пол-оборота, в результате чего мы возвращаемся к прежним (хотя и переставившимся) точкам ветвления. Непрерывно отождествляя между собой возникающие по дороге поверхности (так, чтобы точки краев оставались все время близкими к своему исходному положению), мы получим в конце концов отображение цилиндра на себя (монодромию), устроенное следующим образом.

Отрезок образующей цилиндра, обозначенный на рисунке 79, 1 буквой  $\gamma$ , в процессе отождествления переходит в кривые, обозначенные этой же буквой на промежуточных поверхностях (2, 3, 4). В конце концов мы возвращаемся к исходному цилиндру (5), но кривая  $\gamma$  переходит в новую кривую с теми же концами. Легко сообразить, что на поверхности цилиндра эта новая кривая делает один полный оборот вдоль направляющей окружности, как и изображено на рис. 76.

Таким образом, монодромия перекручивает цилиндрическую часть комплексной линии уровня функции, расположенную вблизи критической точки, ровно на один це-

лый оборот. Исчезающий цикл при таком перекручивании переходит в себя (повернувшись на  $\pi$ ). Другие же циклы на линии уровня преобразуются в, вообще говоря, новые циклы. А именно, всякий раз, когда какой-либо цикл проходил вдоль образующей нашего цилиндра (т. е. пересекал исчезающий цикл), перекручивание изменяет проходящий цикл на исчезающий, так что (с точностью до

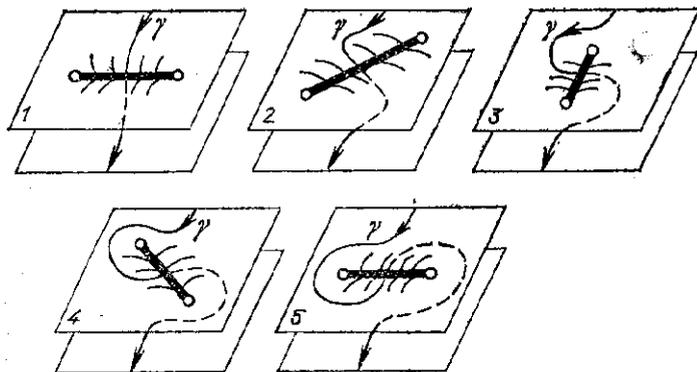


Рис. 79. Построение монодромии последовательным отождествлением близких римановых поверхностей

непрерывных деформаций) образ проходящего цикла при монодромии получается из проходящего цикла добавлением столько раз взятого исчезающего цикла, сколько раз проходящий цикл (с учетом знаков) пересекал исчезающий. Если это число равно нулю, то проходящий цикл называется ортогональным исчезающему. Такой цикл при монодромии не меняется.

Мы вывели, таким образом (для функций двух переменных), «формулу Пикара — Лефшеца», основную в комплексной теории критических точек функций. При переходе к функциям любого числа  $n$  переменных исчезающий цикл становится сферой размерности  $n - 1$ , а цилиндр — множеством всех его касательных векторов. Если число переменных  $n$  нечетно, то монодромия действует на классы циклов как отражение в зеркале, ортогональном исчезающему циклу (сам он при монодромии меняет знак).

Сложные критические точки функций при общих малых шевелениях распадаются на простейшие. В результате общего малого шевеления возникает несколько крити-

ческих значений и около каждого из них — по исчезающему циклу. Обход каждого из критических значений определяет преобразование монодромии. Подход от некритического исходного значения к каждому критическому значению по некритическому пути переносит исчезающий цикл в многообразии исходного неособого уровня пошевеленной функции. В результате там возникает целый набор исчезающих циклов.

Например, неособая комплексная линия уровня функции  $x^3 + y^2$  — это тор без одной точки. Малое шевеление  $x^3 - \varepsilon x + y^2$  имеет два критических значения (рис. 80).

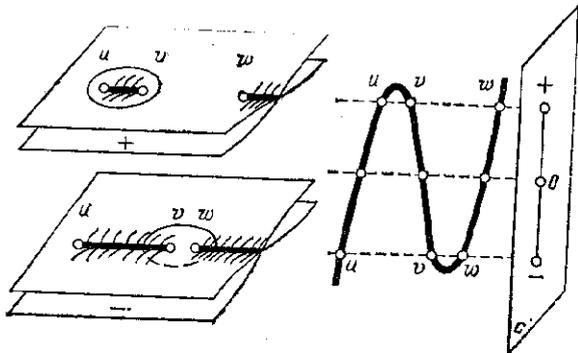


Рис. 80. Исчезающие циклы функции  $x^3 + y^2$

Подход к ним от некритической комплексной линии уровня определяет на этом торе два исчезающих цикла: параллель и меридиан тора. Точно так же на поверхности уровня функции  $x^3 + y^3 + z^3$  лежат две исчезающих сферы, пересекающиеся в одной точке. Соответствующие им преобразования монодромии — отражения пространства классов циклов в ортогональных исчезающим циклам зеркалах.

Таким образом, в теории критических точек функций появляются группы отражений: они составляются преобразованиями монодромии при обходе вокруг критических значений.

Теория групп отражений представляет собой хорошо разработанный отдел математики. Рассмотрим, например, на плоскости два зеркала. Если угол между ними несоизмерим с  $2\pi$ , то число разных преобразований, полученных комбинированием отражений в этих зеркалах, бесконечно, а если соизмерим — то конечно. Точно так же

в трехмерном пространстве найдены все расположения проходящих через 0 зеркал, порождающие конечное число преобразований; классификация таких расположений известна и при любой размерности пространства.

Вычисление групп монодромий простейших вырожденных критических точек функций вскрыло глубокие связи между теориями критических точек функций, каустик и волновых фронтов, с одной стороны, и теорией групп, порожденных отражениями — с другой.

Проявления этой связи иногда выглядят довольно неожиданно. Рассмотрим, например, задачу об обходе препятствия, ограниченного кривой общего положения с обычной точкой перегиба на плоскости. Линия уровня времени в этой задаче — эвольвенты кривой. Эти эвольвенты имеют особенности на кривой (порядка  $3/2$ ) и на касательной перегиба (порядка  $5/2$ ). Оказывается, перестройкой особенностей эвольвент при прохождении точки перегиба управляет группа симметрий икосаэдра. Отсюда выводится, например, что график функции времени в окрестности точки перегиба гладкой заменой координат приводится к нормальной форме вроде ласточкиного хвоста. А именно, нормальной формой является поверхность многочленов  $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$  с кратными корнями (или поверхность касательных к кривой  $(t, t^3, t^5)$ , рис. 81, О. В. Ляшко, О. П. Щербак).

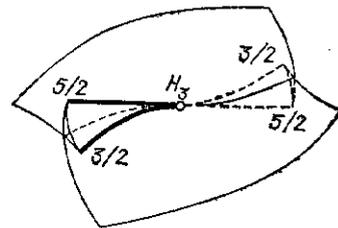


Рис. 81. Дискриминант группы симметрий икосаэдра — типичная особенность графика многозначной функции времени на поверхности с краем

## 16. МИСТИКА ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Естественнонаучные приложения теории особенностей не исчерпывают всех направлений теории катастроф: наряду с конкретными исследованиями типа работ Зимана имеются скорее философские труды математика Р. Тома, который первым осознал всеобъемлющий характер работ Уитни по теории особенностей (и предшествовавших им работ Пуанкаре и Андронова по теории бифуркаций), ввел термин «теория катастроф» и занялся широкой пропагандой этой теории.



Оказывается, все связанные простые колчаны получаются произвольной расстановкой стрелок на изображенных на рис. 83 диаграммах Дынкина, образующих две бесконечные серии и три исключительные диаграммы.

Простые особенности каустик и волновых фронтов также образуют две бесконечные серии  $A_k$  и  $D_k$  и три исключительные особенности  $E_k$  (начальные члены серий изображены на рис. 34—45).

Группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве также образуют две бесконечные

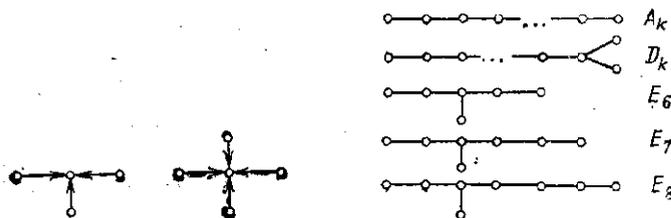


Рис. 82. Простой и непростой колчаны

Рис. 83. Диаграммы Дынкина, определяющие простые колчаны

серии и три исключения (исключения — группы симметрий тетраэдра ( $E_6$ ), октаэдра ( $E_7$ ) и икосаэдра ( $E_8$ ), серии — группы правильного многоугольника и правильно-двухстороннего многоугольника с окрашенными в разные или одинаковые цвета гранями).

На первый взгляд, функции, колчаны, каустики, фронты и правильные многогранники не связаны между собой. На самом деле соответственные объекты не случайно обозначены одинаково: например, из икосаэдра можно построить функцию  $x^2 + y^3 + z^5$ , а из нее — диаграмму  $E_8$ , а также каустик и волновой фронт того же имени.

Легко проверяемым свойством одного из соответствующих друг другу объектов соответствуют не обязательно очевидные свойства других. Таким образом, связи между всеми  $A$ ,  $D$ ,  $E$ -классификациями используются для одновременного изучения всех простых объектов, несмотря на то, что происхождение многих из них (например, связей между функциями и колчанами) остается необъясненным проявлением загадочного единства всего сущего.

## По словам поэта:

Мир создан купно. Целостность его  
 Не устаёт показывать планета —  
 И вот в глаза бросается родство  
 То тут, то там сияющего света.  
 Наверно, есть какое-то ядро,  
 Откуда свет расходится повсюду:  
 И в зрелый свет сентябрьских щедрот,  
 И в нашей жизни трепетное чудо.

Описание в терминах теории особенностей было найдено в 1983 г. для всех групп Кокстера, порожденных отражениями в евклидовых пространствах, включая некристаллографические, вроде  $H_3$  и  $H_4$ .

Группы  $B_k$ ,  $C_k$  и  $F_4$  связаны с краевыми особенностями функций (1978). Катастрофисты, кажется, все еще не заметили связей теории краевых особенностей с простейшими (и важнейшими) случаями так называемой теории несовершенных бифуркаций. Более сложные случаи последней связаны с теорией Горюнова проектирований полных пересечений, которая является далеким обобщением теории краевых особенностей. В теории Горюнова, в частности, исключительная группа  $F_4$  оказывается родоначальником целого семейства особенностей  $F_k$ ,  $k \geq 4$ .

Геометрическая интерпретация каустики  $F_4$  найдена И. Г. Щербак. Рассмотрим поверхность с краем в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Каустика поверхности с краем состоит из трех поверхностей: фокального множества исходной поверхности (образованного ее центрами кривизны), фокального множества граничной кривой (являющегося огибающей семейства нормальных плоскостей) и поверхности, составленной из нормалей к исходной поверхности в граничных точках. Для поверхностей с краем общего положения в отдельных точках край касается направления главной кривизны. В окрестности фокальной точки на нормали к поверхности, проведенной в такой точке края, каустика поверхности локально диффеоморфна каустике группы  $F_4$  (рис. 84).

$H_3$ , группа симметрий икосаэдра, связана с перестройками эвольвент плоской кривой вблизи ее точки перегиба. В соответствующей плоской задаче об обходе препятствий график многозначной функции времени диффеоморфен многообразию нерегулярных орбит группы  $H_3$ ; он диффеоморфен также объединению касательных к кривой  $x = t$ ,  $y = t^3$ ,  $z = t^5$  (О. В. Ляшко, О. П. Щербак). В задаче об обходе препятствия в трехмерном пространстве

то же многообразие описывает особенность фронта в некоторых точках на поверхности препятствия.

$H_4$  — это группа симметрий правильного 600-гранника в четырехмерном евклидовом пространстве. Чтобы описать этот многогранник, начнем с группы вращений икосаэдра. При двулистном накрытии  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  эта группа из 60 вращений накрывается «бинарной группой икосаэдра» из 120 элементов. Группа  $SU(2)$  естественно изометрична трехмерной сфере, и 120 элементов бинарной группы образуют набор вершин искомого правильного многогранника в четырехмерном пространстве.

Рассмотрим теперь задачу об обходе препятствия в трехмерном пространстве. График (многозначной) функции времени является гиперповерхностью в четырехмерном пространстве-времени. Для задачи об обходе препятствия общего положения эта гиперповерхность локально

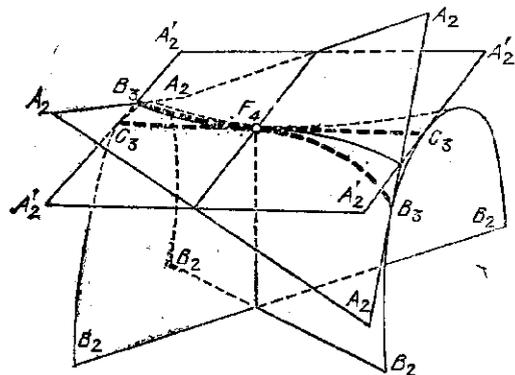


Рис. 84. Каустика группы  $F_4$  — типичная особенность фокального множества поверхности с краем

диффеоморфна многообразию нерегулярных орбит группы  $H_4$  в некоторой точке. А именно, нужная точка лежит на касательной к геодезической на поверхности препятствия, имеющей в параболической точке касания асимптотическое для поверхности направление (О. П. Щербак, 1984).

## Добавление

### ПРЕДШЕСТВЕННИКИ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Сначала мысль, воплощена  
В поэму сжатую поэта,  
Как дева юная, темна  
Для невнимательного света;  
Потом, осмелившись, она  
Уже увертлива, речиста,  
Со всех сторон своих видна,  
Как искушенная жена  
В свободной прозе романиста;  
Болтуня старая, затем  
Она, подвемля крик нахальный,  
Плодит в полемике журнальной  
Давно уж ведомое всем.

*Е. Баратынский*

Не претендуя на полноту, я приведу здесь несколько ярких работ, авторы которых рассматривали особенности, бифуркации и катастрофы в системах общего положения, возникающих в различных областях знания.

Каустики встречаются уже у Леонардо да Винчи, название им дал Чирнгаузен.

В 1654 г. Гюйгенс построил теорию эволют и эвольвент плоских кривых, обнаружив одновременно устойчивость точек возврата на каустиках и волновых фронтах (т. е. сборок соответствующих отображений). Перестройки фронтов на плоскости исследовались Лопиталем (около 1700 г.) и Кэли в 1868 г.

Гамильтон в 1837–1838 г. применил исследование критических точек семейств функций к изучению особенностей систем лучей в геометрической оптике, вроде конической рефракции и двойного лучепреломления.

Якоби в лекциях по динамике (1866) исследовал каустики системы геодезических эллипсоида, выходящих из одной точки, и обнаружил устойчивость точек возврата на каустиках.

Алгебраические геометры прошлого века хорошо знали типичные особенности кривых (Плюккер) и поверхностей (Сальмон), двойственных гладким. Ласточкин хвост подробно описан Кронекером (1878) и входил в учебники алгебры (Вебер, 1898); его можно найти в каталоге гипсовых поверхностей (Бриль, 1892), имеющихся в кабинетах геометрии старых университетов.

Типичные особенности отображений поверхностей в трехмерное пространство (зонтик Уитни,  $z^2 = xy^2$ , половина которого изображена выше, на рис. 31) исследованы Кэли в 1852 г. Кэли изучал также геометрию семейства эквидистант и каустику трехосного эллипсоида — тем самым «кошелек», изображенный выше, на рис. 39, в. Он явно сформулировал задачу о топологии семейств линий уровня гладкой функции общего положения (1868) и исследовал бифуркации в некоторых типичных трехпараметрических семействах функций двух переменных.

Алгебраические аналоги теорем трансверсальности теории особенностей систематически использовались алгебраическими геометрами, особенно итальянской школы (Бертини, 1882 и др.).

Пуанкаре далеко развил теорию бифуркаций (включая более сложные, чем «бифуркация Хопфа» случаи) в своей диссертации и в «Новых методах небесной механики» (т. I, п. 37, п. 51; т. III, гл. 28 и т. п.).

К сожалению, бесхитростные тексты Пуанкаре трудны для математиков, воспитанных на теории множеств. Пуанкаре сказал бы: «прямая делит плоскость на две полуплоскости» там, где современные математики пишут просто: «множество классов эквивалентности дополнения  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^1$  к прямой  $\mathbb{R}^1$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , определяемых следующим отношением эквивалентности: две точки  $A, B \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^1$  считаются эквивалентными, если соединяющий их отрезок  $AB$  не пересекает прямую  $\mathbb{R}^1$ , состоит из двух элементов» (цитирую по памяти из школьного учебника).

В книге «Математическое наследие Пуанкаре», изданной Американским математическим обществом, написано даже, что Пуанкаре не знал, что такое многообразие. В действительности определение (вещественного) гладкого многообразия в *Analysis Situs* Пуанкаре подробно изложено. В современных терминах оно таково: многообразие называется подмногообразием евклидова пространства, рассматриваемое с точностью до диффеоморфизма.

Это простое определение настолько же лучше современных аксиоматических конструкций, насколько опре-

деление группы как (рассматриваемой с точностью до изоморфизма) группы преобразований и определение алгоритма, основанное на какой-либо (универсальной) машине Тьюринга, понятнее абстрактных определений.

Абстрактные определения возникают при попытках обобщить «наивные» понятия, сохраняя их основные свойства. Теперь, когда мы знаем, что эти попытки не приводят к реальному расширению круга объектов (для многообразий это установил Уитни, для групп — Кэли, для алгоритмов — Черч), не лучше ли и в преподавании вернуться к «наивным» определениям?

Сам Пуанкаре подробно обсуждает методические преимущества наивных определений окружности и дроби в «Науке и методе»: невозможно усвоить правило сложения дробей, не разрезая, хотя бы мысленно, яблоко или пирог.

В 1931 г. А. А. Андронов выступил с обширной программой, отличающейся от современной программы катастрофистов только тем, что место еще не созданной к тому времени теории особенностей Уитни занимают качественная теория дифференциальных уравнений и теория бифуркаций Пуанкаре. Идеи структурной устойчивости (грубости), коразмерности (степени негрубости), бифуркационные диаграммы, явная классификация бифуркаций общего положения и даже исследование складок и сборок гладких отображений поверхностей на плоскость явно присутствуют в работах А. А. Андропова и его школы.

Физики всегда использовали более или менее эквивалентные теории катастроф построения при исследовании конкретных задач. В термодинамике эти идеи систематически использовались Максвеллом и особенно Гиббсом (1873). Перестройка изотерм диаграммы ван дер Ваальса — типичный пример применения геометрии сборки. Анализ асимптотики в окрестности критической точки быстро приводит к пониманию независимости этой геометрии от точного вида уравнения состояния — факт, хорошо известный со времен Максвелла и упоминаемый в большинстве учебников термодинамики (например, Ландау и Лифшица). Предложение Максвелла провести горизонтальный участок изотермы так, чтобы площади лунок над и под ним были равны, означает переход от одного из двух конкурирующих минимумов потенциала к другому в момент, когда второй становится ниже. Соответствующая бифуркационная диаграмма в теории катастроф называется *стратом Максвелла*. «Правило фаз» Гиббса

доставляет топологические ограничения на строение этой и подобных ей бифуркационных диаграмм (открытие необходимости строго доказывать подобные факты — заслуга математики более позднего периода). Гиббс также явно указал на связь термодинамики с геометрией контактной структуры.

Геологические применения анализа особенностей указаны Скрейнемакерсом (1917).

В теории «теплого взрыва» Семенова (1929) и в работах его последователей по теории горения явно изучались перестройки стационарных режимов при изменении параметров, что приводило к необходимости исследования и складок, и сборок, и более сложных ситуаций. В частности, в работе Я. В. Зельдовича 1940 г. проанализированы явления, происходящие при морсовской перестройке кривой равновесий на плоскости фазовой переменной и параметра (рождении новых островков или их слиянии с основной кривой). В современной математической теории аналогичный анализ выполнен лишь в последние годы.

Анализ волнового поля вблизи каустики и ее особенностей привел Эйри и Пирси к осциллирующим интегралам, фаза которых доставляет нормальную форму складки и сборки соответственно. В связи с этим стоит отметить, что найденные М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком асимптотики поля вблизи границы до сих пор не переварены теорией катастроф.

В теории упругости Койтер в 1945 г. обнаружил полукубическую особенность в зависимости предельной нагрузки от нецентральности ее приложения в задаче о прощелкивании арки. Специалисты по теории упругости использовали геометрию сборки для выбора программ испытаний упругих конструкций, при которых не происходит прощелкивания несмотря на высокие нагрузки.

Вычисления в этих исследованиях обычно проводились без общей теории, за счет правильного отбрасывания одних членов ряда Тейлора и оставления других «наиболее важных». Из физиков, особенно систематически применявших теорию катастроф до ее возникновения, стоит особо выделить Л. Д. Ландау. В его руках искусство отбрасывать «несущественные» члены ряда Тейлора, сохраняя меньшие по величине «физически важные» члены, дало много включаемых в теорию катастроф результатов.

Так, в работе 1943 г. о возникновении турбулентности Ландау прямо выписывает этим методом уравнение «би-

фуркации Хопфа» для квадрата амплитуды теряющего устойчивость колебания. Теория фазовых переходов второго рода по Ландау сводится к анализу бифуркаций критических точек симметрических функций. Кривые Ландау в теории фейнмановских интегралов, зависящих от параметров, с их устойчивыми точками возврата, включаются в число основных бифуркационных диаграмм современной теории катастроф.

Конечно, современная общая теория позволяет с меньшей затратой сил исследовать более сложные особенности. Однако наибольшую практическую ценность имеют в большинстве случаев именно исследования наиболее простых и часто встречающихся особенностей: затраты сил на преодоление технических трудностей, стоящих на пути исследования более сложных случаев, не всегда оправдываются практической ценностью получаемых результатов. Напротив, фундаментальные работы предшественников теории катастроф (как упомянутых выше, так и многих других) сохраняют все свое значение и теперь, когда их математическая структура вполне выяснена теориями особенностей и бифуркаций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Газеты приносят вести о все новых катастрофах. Землетрясения, наводнения, взрывы, войны, эпидемии окружают нас со всех сторон, и вдобавок над всем земным шаром нависает угроза страшной из катастроф — ядерной. Пора запретить атомную гражданскую войну.

Математическая теория катастроф сама по себе не предотвращает катастрофы, подобно тому, как таблица умножения, при всей ее полезности для бухгалтерского учета, не спасает ни от хищений отдельных лиц, ни от неразумной организации экономики в целом.

Математические модели катастроф указывают, однако, некоторые общие черты самых разных явлений скачкообразного изменения режима системы в ответ на плавное изменение внешних условий. Например, устойчивый установившийся режим (скажем, режим работы реактора, или экологический или экономический режим) обычно погибает либо столкнувшись с неустойчивым (причем в момент столкновения скорость конвергенции бесконечно велика), либо вследствие нарастания (опять бесконечно быстро) самоподдерживающихся колебаний. Это объясняет, почему так трудно бороться с катастрофой, когда ее признаки сделались уже заметными: скорость ее приближения неограниченно возрастает по мере приближения к катастрофе.

К катастрофической потере устойчивости может приводить оптимизация и интенсификация. Например, для простейшей модели рыболовства

$$\dot{x} = x - x^2 - kx$$

оптимизация (максимизация) квоты отлова  $c = 1/4$  приводит к неустойчивости установившегося режима (рис. 85) и катастрофе — уничтожению популяции малыми случайными колебаниями.

Устойчивость не теряется, если ввести обратную связь: жесткий план  $c$  заменить величиной, пропорциональной фактически имеющимся ресурсам (урожаю, популяции, ...). В модели с обратной связью (рис. 86)

$$\dot{x} = x - x^2 - kx$$

оптимальное значение коэффициента  $k$  равно  $1/2$ . При таком выборе установится средний многолетний вылов

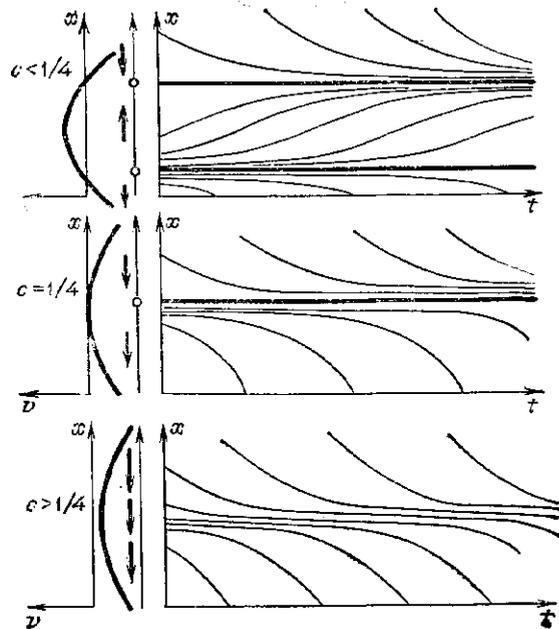


Рис. 85. Катастрофическая потеря устойчивости при оптимизации в простейшей модели рыболовства с учетом конкуренции за пищу

$kx_0 = 1/4$ . Это — такой же вылов, как максимальный жесткий план отлова (большая производительность в этой системе невозможна).

Но в то время как при максимальном жестком плане система теряет устойчивость и самоуничтожается, введение обратной связи стабилизирует ее и, например, небольшие изменения коэффициента  $k$  (или иные случайности) приведут лишь к небольшому уменьшению производительности, а вовсе не к катастрофе.

Управление без обратной связи всегда приводит к ка-

тастрофам: важно, чтобы лица и организации, принимающие ответственные решения, лично, материально зависели от последствий этих решений.

Агрессоры, развязывающие войны или межнациональную вражду, обычно считают, что они не будут нести личной ответственности за последствия, а боязнь личного

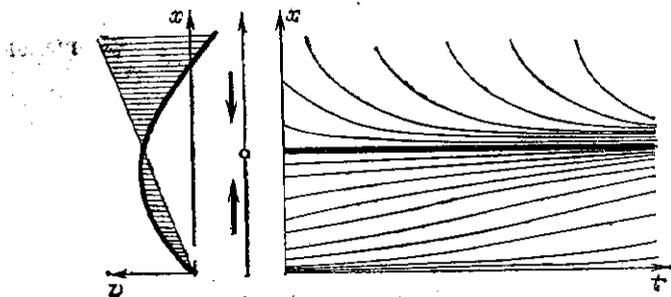


Рис. 86. Стабилизация при замене жесткого плана обратной связью

ядерно-лагерного уничтожения служит важным сдерживающим фактором.

Ученые, исследовавшие модели гонки вооружений, еще в 60-х годах предсказали, что введение разделяющихся боеголовок повлечет потерю устойчивости стратегического равновесия. Они предсказали также, что если дипломатическим путем удастся благополучно миновать этот опасный период, то дальнейшее удорожание вооружения стабилизирует ситуацию и устойчивость может восстановиться.

Нынешняя перестройка во многом объясняется тем, что начали действовать хотя бы некоторые механизмы обратной связи (боязнь личного уничтожения).

Трудность проблемы перестройки связана с ее нелинейностью. Привычные методы управления, при которых результаты пропорциональны усилиям, тут не действуют, и нужно вырабатывать специфически нелинейную интуицию, основанную на порой парадоксальных выводах нелинейной теории.

Математическая теория перестроек была создана задолго до нынешней перестройки. Вот некоторые простейшие качественные выводы из этой теории применительно к нелинейной системе, находящейся в установившемся устойчивом состоянии, признанном, плохим, поскольку

в пределах видимости имеется лучшее, предпочтительное устойчивое состояние системы (рис. 87).

1. Постепенное движение в сторону лучшего состояния сразу же приводит к ухудшению. Скорость ухудшения при равномерном движении к лучшему состоянию увеличивается.

2. По мере движения от худшего состояния к лучшему сопротивление системы изменению ее состояния растет.

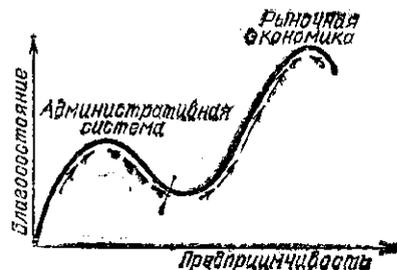


Рис. 87. Перестройка с точки зрения теории перестроек

3. Максимум сопротивления достигается раньше, чем самое плохое состояние, через которое нужно пройти для достижения лучшего состояния. После прохождения максимума сопротивления состояние продолжает ухудшаться.

4. По мере приближения к самому плохому состоянию на пути перестройки сопротивление, начиная с некоторого момента, начинает уменьшаться, и как только самое плохое состояние пройдено, не только полностью исчезает сопротивление, но система начинает притягиваться к лучшему состоянию.

5. Величина ухудшения, необходимого для перехода в лучшее состояние, сравнима с финальным улучшением и увеличивается по мере совершенствования системы. Слабо развитая система может перейти в лучшее состояние почти без предварительного ухудшения, в то время как развитая система, в силу своей устойчивости, на такое постепенное, непрерывное улучшение неспособна.

6. Если систему удастся сразу, скачком, а не непрерывно, перевести из плохого устойчивого состояния достаточно близко к хорошему, то дальше она сама собой будет эволюционировать в сторону хорошего состояния.

С этими объективными законами функционирования нелинейных систем нельзя не считаться. Выше формули-

рованы лишь простейшие качественные выводы. Теория доставляет также количественные модели, но качественные выводы представляются более важными и в то же время более надежными: они мало зависят от деталей функционирования системы, устройство которой и численные параметры могут быть недостаточно известными.

Наполеон критиковал Лапласа за «попытку ввести в управление дух бесконечно малых». Математическая теория перестроек — это та часть современного анализа бесконечно малых, без которой сознательное управление сложными и плохо известными нелинейными системами практически невозможно.

Не требуется, однако, специальной математической теории, чтобы понять, что пренебрежение законами природы и общества (будь то закон тяготения, закон стоимости или необходимость обратной связи), падение компетентности специалистов и отсутствие личной ответственности за принимаемые решения приводит рано или поздно к катастрофе.

## ЗАДАЧИ

К разделу 1 (здесь и далее переменная  $z$  — комплексная,  $x$  и  $y$  — вещественные)

1. Найдите критические точки и критические значения отображений  $z \mapsto z^2$ ,  $z \mapsto z^2 + \bar{e}z$ .

2. Найдите критические точки и критические значения отображений  $(x, y) \mapsto (x^2 + ay, y^2 + bx)$ .

3. Исследуйте бифуркации особых точек дифференциального уравнения  $\dot{x} = -x^3 + x + a$  при изменении параметра  $a$ .

4. Исследуйте бифуркации особых точек в системе дифференциальных уравнений  $\dot{z} = ez - z^2\bar{z} + A\bar{z}^3$ , где  $A$  — фиксированное комплексное число, а комплексное число  $e$  обходит вокруг нуля.

5. Сколько имеется топологически различных вещественных многочленов пятой степени  $x^5 + \dots$  с четырьмя различными вещественными критическими значениями? Два многочлена топологически одинаковы, если один можно превратить в другой непрерывными и сохраняющими ориентацию заменами зависимой и независимой вещественных переменных.

6. Обозначим через  $a_n$  число типов многочленов  $x^{n+1} + \dots$  с  $n$  различными критическими значениями (так что ответ в предыдущей задаче будет обозначаться  $a_4$ ) и составим функцию  $p(t) = \sum a_n t^n / n!$ . Докажите, что  $p(t) = \sec t + \operatorname{tg} t$  (так что  $a_n$  выражаются через числа Бернулли при нечетных  $n$  и через числа Эйлера — при четных).

7. Рассмотрим в пространстве многочленов  $x^5 + \dots$  область, образованную многочленами с четырьмя различными вещественными критическими значениями. Сколько компонент связности имеет эта область?

8. Предположим, что второй дифференциал гладкой функции двух переменных в критической точке положительно определен. Докажите, что после надлежащей гладкой замены зависимой переменной  $u$  и независимых

переменных  $(x, y)$  функция приводится к виду  $u = x^2 + y^2$ .

9. Предположим, что второй дифференциал гладкой функции  $n$  переменных в критической точке — невырожденная квадратичная форма. Докажите, что после надлежащей гладкой замены зависимой переменной  $u$  и  $n$  независимых переменных  $(x, y)$  функция приводится к виду  $u = x_1^2 + \dots + x_k^2 - y_1^2 - \dots - y_l^2, k + l = n$ .

10. Докажите, что в критической точке аналитической функции двух переменных исчезают, как правило, 6 (комплексных) точек перегиба линии уровня.

### К разделу 2

11. Сколько точек сборки имеет отображение  $z \mapsto z^2 + \bar{e}z$ ?

12. Имеют ли точки сборки отображение  $(x, y) \mapsto (x^2 + ay, y^2 + bx)$ ?

13. Докажите, что число точек сборки отображения (общего положения) сферы на плоскость четно.

14. Пусть на сфере дана функция, интеграл которой по сфере равен нулю и для которой нуль — не критическое значение. Существует ли гладкое отображение сферы на плоскость, все особенности которого — складки и которое имеет якобианом данную функцию?

15. Докажите, что отображение сферы на плоскость, все критические точки которого — складки и сборки, может иметь линией критических точек любую (непустую) гладкую кривую на сфере.

16. Предположим, что все критические точки гладкого отображения сферы на плоскость — складки и сборки и что число областей на сфере, где якобиан отображения положителен, равно  $a$ , а где он отрицателен —  $b$ . Докажите, что число сборок не меньше, чем  $2|a - b|$ .

17. Сопоставим каждому вектору нормали к эллипсу его конец. Докажите, что построенное отображение цилиндра на плоскость имеет четыре точки сборки.

18. Если заменить в задаче 17 эллипс несамопересекающейся кривой общего положения, то число точек сборки соответствующего отображения цилиндра на плоскость не меньше четырех.

### К разделу 3

19. Рассмотрим на эллипсе функцию «расстояние от точки эллипса до фиксированной точки плоскости». Крити-

ческие точки таких функций образуют поверхность в трехмерном многообразии — прямом произведении эллипса на плоскость. Сколько сборок имеет проектирование этой поверхности на плоскость? Как выглядит множество критических значений проектирования?

20. Рассмотрим в пространстве функций на окружности множество всех функций, имеющих кратные критические значения. Лежит ли эта гиперповерхность в пространстве функций односторонне или двусторонне (т. е. можно ли ее снабдить трансверсальным направлением, меняющимся непрерывно вплоть до точек самопересечения и граничных точек)?

### К разделу 4

21. Рассмотрим параболический цилиндр, опирающийся образующей прямой на горизонтальную плоскость. При каких положениях центра тяжести цилиндра над точкой касания положение равновесия устойчиво, а при каких — нет? Исследуйте особенности границы области устойчивости.

22. Нарисуйте график функции

$$f(u, v) = \min_x (x^4 + ux^2 + vx).$$

### К разделу 5

23. При каких значениях параметров теряет устойчивость положение равновесия системы  $\dot{x} = x(a + bx + cy), \dot{y} = y(d + ex + fy)$ , для которого  $xy \neq 0$ ? Как выглядят фазовые кривые при этих значениях параметров?

24. Рассмотрим гладко зависящее от одного параметра векторное поле на прямой. Докажите, что гладкой заменой параметра и гладкой заменой координаты на прямой, гладко зависящей от параметра, такое поле общего положения приводится (в окрестности бифурцирующей особой точки) к полю, определяющему эволюционную систему  $\dot{x} = x^2 + a + f(a)x^3$ , где  $f$  — гладкая функция,  $a$  — параметр (в аналитическом случае все замены можно сделать аналитическими).

25. Исследуйте поверхность равновесий зависящего от двух параметров семейства уравнений  $\dot{x} = -x^3 + ax + b$  и особенности ее проектирования на плоскость параметров. Какая часть поверхности равновесий

соответствует устойчивым положениям равновесия? Исследуйте поведение фазовой точки при медленном изменении параметров  $a(t)$ ,  $b(t)$ .

26. Составьте однопараметрическое семейство векторных полей на прямой, соответствующее бифуркациям рис. 13.

### К разделу 6

27. Мягко или жестко теряет устойчивость положение равновесия системы  $\dot{z} = (i\omega + a)z + Cz|z|^2$  при продолжении вещественного параметра  $a$  через нуль? Сравните результат с рис. 16.

28. Задайте формулами бифуркацию рис. 21 (компоненты поля — многочлены степени 5).

29. Исследуйте потерю устойчивости цикла  $z = 0$ ,  $|w| = 1$  системы

$$\begin{cases} \dot{z} = (a - 1 + i/2)z + (a + 1)\bar{z}w \pm \bar{w}(z + \bar{w})^2 \\ \dot{w} = iw + w(1 - |w|^2) \end{cases}$$

при прохождении параметра  $a$  через нуль. Найдите приближенно ответвляющийся двукратный цикл и исследуйте его устойчивость. Сравните результаты с рис. 22.

30. Исследуйте бифуркации фазового портрета системы, описывающей резонанс  $p/q$ ,  $q \geq 5$ ,  $\dot{z} = \varepsilon z + z|z|^2 A(|z|^2) + \bar{z}^q$  при обходе малого комплексного числа  $\varepsilon$  вокруг нуля ( $A$  — комплексная функция общего положения). Сравните результаты с рис. 23.

31. Исследуйте бифуркации фазового портрета системы, описывающей резонанс  $1:3$ ,  $\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^2$  при обходе комплексного параметра  $\varepsilon$  вокруг нуля ( $A$  — комплексное число общего положения).

32. Исследуйте бифуркации фазового портрета системы, описывающей резонанс  $1:4$ ,  $\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3$ , при обходе комплексного параметра  $\varepsilon$  вокруг нуля (на плоскости комплексного переменного  $A$  известно 48 областей, различающихся цепочками бифуркаций, но не доказано даже, что число разных устойчивых цепочек конечно).

33. Исследовать затягивание потери устойчивости в системе  $\dot{z} = (i + a)z - z|z|^2 + b$  при медленном изменении параметров  $a = \varepsilon t$ ,  $b = \varepsilon \varepsilon t$ .

### К разделу 7

34. Найти границу устойчивости семейства уравнений  $\dot{x} + ax + bx = 0$  на плоскости вещественных параметров  $(a, b)$ .

35. Доказать, что граница устойчивости семейства уравнений  $\dot{x} + ax + bx + cx = 0$  диффеоморфна поверхности  $w^2 = u^2v^2$ ,  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

36. Доказать, что граница устойчивости семейства уравнений  $\dot{z} + Az + Bz = 0$  в трехмерном пространстве  $\text{Im } A = 2$  диффеоморфна поверхности  $w^2 = uv^2$ ,  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

37. Найти число типов особенностей границы устойчивости семейства общего положения линейных многомерных систем, зависящих от четырех параметров.

### К разделу 8

38. Исследовать особенности каустики (огibaющей семейства нормалей) трехосного эллипсоида.

39. Исследовать особенности каустики — огibaющей семейства геодезических на эллипсоиде, выходящих из одной точки.

40. Доказать, что каустика — огibaющая семейства геодезических любой римановой метрики общего положения на сфере, выходящих из одной точки, имеет не менее четырех точек возврата.

41. Доказать, что объединение касательных прямых к кривой  $\{(t^2, t^3, t^4)\}$  диффеоморфно множеству многочленов  $x^4 + ax^2 + bx + c$ , имеющих кратные вещественные корни.

42. Доказать, что гладкая функция  $f(a, b, c)$ , производная которой по  $a$  в начале координат отлична от нуля, приводится в окрестности начала координат к виду  $\pm a + \text{const}$  гладкой заменой координат, сохраняющей ласточкин хвост предыдущей задачи.

43. Доказать, что гладкое векторное поле, вектор которого в начале координат имеет ненулевую  $c$ -компоненту, приводится в окрестности начала координат к полю  $\pm \partial/\partial c$  (задающему систему  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{b} = 0$ ,  $\dot{c} = \pm 1$ ) гладкой заменой координат, сохраняющей ласточкин хвост двух предыдущих задач.

44. Пусть большая каустика в трехмерном пространстве-времени образована теми значениями параметра  $q = (q_1, q_2, q_3)$ , при которых функция  $x^4 + q_1x^3 + cx$

имеет вырожденные критические точки. Нарисовать перестройки мгновенных каустик, получающихся при пересечении большой каустики изохронами, для функции времени  $t = q_1 \pm q_3^2$ .

45. Доказать, что функция времени общего положения приводится в окрестности каждой точки большой каустики предыдущей задачи, либо к виду  $t = q_3 + \text{const}$ , либо к виду  $t = \pm q_1 \pm q_3^2 + \text{const}$  сохраняющим эту большую каустику диффеоморфизмом пространства-времени.

46. Пусть большая каустика в четырехмерном пространстве-времени образована теми значениями параметра  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ , при которых функция  $x^4 + q_1x^2 + q_2x$  имеет вырожденные критические точки. Исследовать перестройки мгновенных каустик, получающихся при пересечении большой каустики изохронами, для функции времени  $t = q_1 \pm q_3^2 \pm q_4^2$ .

47. Нарисовать поверхность, образованную теми значениями параметра  $q$ , при которых функция  $x^2y \pm y^3 + q_1y^2 + q_2y + q_3x$  имеет вырожденные критические точки.

48. Пусть большая каустика в четырехмерном пространстве-времени образована теми значениями параметра  $q$ , при которых функция  $x^2y + y^4 + q_1y^3 + q_2y^2 + q_3y + q_4x$  имеет вырожденные критические точки. Исследовать перестройки мгновенных каустик, получающихся при пересечении большой каустики изохронами различных функций времени общего положения.

49. Нарисуйте образ плоскости  $(u, v)$  и ее разбиения на прямые  $u = \text{const}$  (или на кривые  $t = \text{const}$ , где  $dt/dv \neq 0$ ) при отображении  $(u, v) \mapsto (u^2, v, uv)$  в трехмерное пространство. Сравните ответ с рис. 46 и с рис. 31.

50. Нарисуйте образ поверхности общего положения с полукубическим ребром возврата при отображении складывания трехмерного пространства  $(u, v, w) \mapsto (u, v, w^2)$  (предполагая, что касательная плоскость поверхности в точке трансверсального пересечения ребра возврата с плоскостью критических точек  $w = 0$  не содержит направления оси  $w$ ). Сравните ответ с рис. 46.

51. Нарисуйте поверхность  $y^2 = z^3x^2$  и сравните ответ с рис. 46 и с предыдущей задачей.

52. Нарисуйте объединение касательных к кривой  $\{(t_1, t^2, t^4)\}$  и сравните с предыдущими задачами.

53. Докажите, что объединение касательных к пространственной кривой общего положения локально диффеоморфно поверхности  $y^2 = z^3x^2$  в окрестности каждой точки, где кручение кривой обращается в нуль.

## К разделу 9

54. Определить плотность пылевидной тяготеющей одномерной среды на замкнутой кривой в фазовой плоскости так, чтобы при движении частиц эта кривая и эта плотность сохранялись (указание: кривая  $q^2 + p^2 + |p|^3 = 4/27$ ).

55. Доказать, что при пролетании одномерного потока пылевидной среды, определяющего первоначально гладкое поле скоростей, над скоплением с коренной особенностью плотности  $(a(x, t)x^{-1/2}\theta(x) + b(x, t))$ , где  $a$  и  $b$  — заданные гладкие функции,  $a \neq 0$ ,  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $1$  при  $x > 0$ ) поле скоростей приобретает слабую особенность вида  $c(x, t)x^{3/2}\theta(x)$ ; гладкой заменой переменных можно свести  $c$  к единице.

56. Рассмотрим  $N$  частиц в единичном кубе и окружим каждую из них шаром радиуса  $r$ . При каком минимальном  $r$  эти шары образуют связную цепь диаметра единицы? Покажите, что радиус убывает как  $C/N$  для распределений частиц вдоль линий, как  $C/N^{1/2}$  для распределений вдоль поверхностей, как  $C/N^{3/2}$  для пространственных распределений (вычисляемая таким способом «размерность» крупномасштабного распределения галактик оказывается лежащей между 1 и 2).

## К разделу 10

57. Нарисуйте множество негладкости функции

$$F(y) = \min(\min(x^4 + y_1x^2 + y_2), y_3)$$

и сравните с рис. 53.

58. Нарисуйте перестройку линий негладкости функции  $F(y_1, y_2, y_3) = \min(y_1, y_2, y_1 + y_2)$ , заданной в трехмерном пространстве-времени, на изохронах  $t = \text{const}$ , для функции времени  $t = y_1 + y_2 \pm y_3^2$  и сравните с рис. 53.

59. Докажите, что особенности поверхностей уровня общего положения функций максимума типичных  $n$ -параметрических семейств функций такие же, как особенности графиков функций максимума  $n - 1$ -параметриче-

ских семейств общего положения (причем множества меньших значений соответствуют надграфикам). В этой ситуации «хорошие» значения параметров те, в которых функция максимума меньше фиксированной константы (а «хорошие» значения константы — те, которые больше максимума).

#### К разделу 11

60. Рассмотрим уравнение  $x + kx \pm x = 0$ .

Определить, какие значения  $k$  отвечают сложным фокусам, какие — сложным узлам и какие — сложным седлам на плоскости ( $x, E = x^2 + x^2$ ).

61. Найти поверхность, асимптотические линии которой образуют локально систему интегральных кривых сложного фокуса (узла, седла).

62. Докажите, что интегральные кривые сложного седла, соответствующие лежащим по одну сторону от складки сепаратрисам, подходят к особой точке с противоположных сторон, а интегральные кривые сложного узла, соответствующие лежащим по одну сторону от складки выделенным фазовым кривым узла, подходят к особой точке с одной стороны.

63. Рассмотрим  $k$ -параметрическое семейство гладких гиперповерхностей в  $n$ -мерном линейном пространстве, снабженном проекцией на  $n - 1$ -мерное подпространство. Насколько негладким может оказаться видимый контур, если проектируемая поверхность выпукла, а семейство — общего положения?

64. Найти число модулей особенностей выпуклых оболочек типичных гладких поверхностей в четырехмерном пространстве и типичных гладких подмногообразий размерности 3 в пятимерном пространстве.

#### К разделу 12

65. Плоская кривая, двойственная к кривой  $y = x^2 + x^{5/2}$ , диффеоморфна исходной кривой, а двойственная к диффеоморфной ей кривой  $y = x^{5/2} - \text{нет}$ .

66. Кривая, двойственная к типичной кривой с особенностью степени  $5/2$ , имеет подобную же особенность.

67. Число (комплексных) особых точек типа 7 (см. рис. 64) на типичной алгебраической поверхности достаточно большой степени  $d$  равно  $2d(d - 2)(11d - 24)$ , а типа  $5 - 5d(d - 4)(7d - 12)$ .

68. Когда поверхность уровня типичной функции трех переменных приближается к поверхности критического уровня, в критической точке исчезают 24 (комплексные) точки типа 7 (рис. 64).

#### К разделу 13

69. Эвольвента плоской кривой, проходящая через обыкновенную точку перегиба кривой, имеет в ней особенность типа  $5/3$ .

70. Нарисуйте эвольвенты кубической параболы  $y = x^3$ .

71. Нарисуйте график (трехзначной) функции времени вблизи точки кубического перегиба ограничивающей препятствие кривой на плоскости.

72. Нарисуйте поверхность, образованную в трехмерном пространстве линейных элементов на плоскости элементами, касательными к эвольвентам плоской кривой, вблизи точки (кубического) перегиба этой кривой. Какие особенности имеет эта поверхность и какие — ее проектирование на плоскость (сопоставляющее каждому линейному элементу точку его приложения)?

73. Рассмотрим на поверхности препятствия функцию, равную сумме расстояния до цели (по прямой) и расстояния до некоторой начальной точки вдоль поверхности препятствия. Докажите, что кратности критических точек этой функции четны.

74. Уравнения  $C = \int_0^x (t^3 + At + B)^2 dt, x^3 + Ax + B = 0$ , определяющие в пространстве с координатами  $(A, B, C)$  поверхность. Нарисуйте эту поверхность и исследуйте ее особенности (она локально диффеоморфна фронту пространственной задачи об обходе препятствия в точке, соответствующей сборке гауссова отображения пучка, и ее ребро возврата степени  $5/2$  имеет полукубическую точку возврата в начале координат).

#### К разделу 14

75. Сколько симплектически неэквивалентных плоскостей размерности  $k$  имеет симплектическое пространство большей размерности? Докажите, что их число равно целой части  $k/2$ .

76. Полным флагом в линейном пространстве называется набор из последовательно вложенных друг в друга

подпространств всех размерностей. Сколько симплектически неэквивалентных полных флагов имеет симплектическое пространство размерности  $2n$ ? Докажите, что их число равно  $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$ .

77. В пространстве однородных многочленов нечетной степени от двух переменных имеется симплектическая структура, инвариантная относительно естественного действия группы сохраняющих площади линейных преобразований плоскости; эта структура единственна (с точностью до ненулевого множителя). Найдите ее явное выражение через коэффициенты многочленов.

78. В каждом слое лагранжева расслоения имеется естественная локальная аффинная структура (избранный класс систем координат, в которых лагранжевы эквивалентности задают аффинные преобразования).

79. Докажите, что график преобразования Лежандра гладкой функции является фронтом (образом лежандрова отображения гладкого лежандрова многообразия).

80. Основания перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости не содержащей начала координат поверхности в евклидовом пространстве, образуют поверхность, называемую производной (исходная же поверхность называется первообразной для своей производной). Докажите, что особенности производных гладких поверхностей — лежандровы (т. е. что производная диффеоморфна фронту лежандрова отображения).

81 (продолженне). Докажите, что особенности первообразных гладких поверхностей — лежандровы. Нарисуйте первообразные эллипса на плоскости и эллипсоида в трехмерном пространстве.

82. Фронтом какого лежандрова отображения является эквидистанта гладкой поверхности в евклидовом пространстве?

83. Фронтом какого лежандрова отображения является график (многозначной) функции расстояния до данной гладкой поверхности в евклидовом пространстве?

84. Докажите, что в слоях лежандрова расслоения имеются естественные структуры локально проективных пространств (так что лежандровы эквивалентности, т. е. диффеоморфизмы, сохраняющие контактную структуру и структуру лежандрова расслоения, задают на слоях проективные преобразования).

85. Продолжим действие группы, порожденной отражениями плоскости в двух составляющих угол  $\pi/q$  зеркалах, на комплексную плоскость. Докажите, что многообразие орбит само гомеоморфно комплексной плоскости, а многообразие нерегулярных орбит (орбит точек зеркал) — кривой  $z^2 = w^q$  на плоскости двух комплексных переменных.

86. Продолжим действие группы, порожденной отражениями в диагональных плоскостях  $x_i = x_j$  трехмерного пространства  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  на комплексное пространство. Докажите, что многообразие орбит — трехмерное комплексное пространство, а многообразие нерегулярных орбит — комплексный ласточкин хвост.

87. На рис. 81 изображена вещественная часть многообразия нерегулярных орбит действия группы симметрий икосаэдра на комплексном пространстве. Где располагаются вещественные орбиты?

88. Преобразования группы монодромии, заданные функцией  $x^3 - ex + y^2$ , действуют на торе без точки. Докажите, что любую замкнутую несамопересекающуюся кривую на торе без точки, не стягиваемую на торе, можно перевести в любую другую такую кривую преобразованием из группы монодромии.

89. Сколько ручек имеет комплексная линия неособого уровня функции  $z^n + w^2$ ? Докажите, что их число равно  $g$ , если  $n = 2g + 1$  или  $2g + 2$ .

90. Степени преобразования комплексной плоскости в себя  $(z, w) \mapsto (az, \bar{a}w)$ ,  $a = e^{2\pi i/q}$ , образуют группу — бинарную группу  $q$ -угольника. Докажите, что все инвариантные относительно этой группы многочлены выражаются через  $X = z^q$ ,  $Y = w^q$ ,  $Z = zw$  и что многообразие орбит совпадает с поверхностью  $XY = Z^q$  в трехмерном комплексном пространстве. Докажите, что эта поверхность диффеоморфна нулевому множеству уровня простой функции  $A_{q-1}$  трех комплексных переменных.

91. Докажите, что многообразие орбит действия бинарной группы тетраэдра (октаэдра, икосаэдра) на комплексной плоскости совпадает с поверхностью нулевого уровня функции  $E_6 (E_7, E_8)$  от трех комплексных переменных.

92. Набор проходящих через начало координат гладких подмногообразий называется простым, если все близкие наборы исчерпываются конечным списком (с точностью до диффеоморфизма окрестности начала координат). Найдите все простые наборы на плоскости и в трехмерном пространстве.

93. Критическая точка 0 гладкой функции  $f(x, y)$  называется простой краевой особенностью (на плоскости с краем  $x = 0$ ), если все близкие функции исчерпываются конечным списком (с точностью до диффеоморфизма окрестности начала координат, сохраняющего прямую  $x = 0$ ). Докажите, что простые критические точки функции двух комплексных переменных исчерпываются списком

$$B_k = x^k + y^2 \quad (k \geq 2); \quad C_k = xy + y^k \quad (k \geq 3),$$

$$F_4 = x^2 + y^3$$

(уравнение края  $-x = 0$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К предисловию

Работы Тома, Мазера, Морена и др. собраны в сборнике переводов: Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Мир, 1968.— 268 с.

Обсуждаемые в предисловии статьи:

Тюринга Г. Н. Топологические свойства изолированных особенностей комплексных пространств коразмерности один // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— Т. 32.— С. 605—620.

Nye J. F., Hannay J. H. The orientation and distortion of caustics in geometrical optics // Optica Acta.— 1984.— V. 31, № 1.— P. 115—130.

Чеканов Ю. В. Каустики геометрической оптики // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, вып. 3.— С. 66—69.

О гипотезе Тома:

Thom R. Topological models in biology // Topology.— 1969. V. 8.— P. 313—336.

Guckenheimer J. Bifurcation and Catastrophe // Proc. Internat. Sympos. in Dynamical Systems (Salvador, 1974) / Ed. M. Peixoto.— New York: Academic Press, 1973.

Хесин Б. А. Бифуркация особых точек градиентных динамических систем // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, вып. 3.— С. 94—95.

Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1988.— Т. 33.— С. 113—155.— (Итоги науки и техники).

Монтель об особенностях:

Montel P. Sur les methodes recentes pour l'etude des singularites des fonctions analytiques // Тр. I Всесоюзного съезда математиков (Харьков, 1930).— М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.— С. 36—57.

### К разделам 1—5

Обширная библиография имеется в следующих источниках: Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 608 с.

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. I.— М.: Наука, 1982.— 304 с. Т. II.— М.: Наука, 1984.— 336 с.

Zeeman E. C., V.W.W. 1981 Bibliography on Catastrophe Theory.— Coventry: University of Warwick, 1981.— 73 p.

Арнольд В. И. Особенности систем лучей // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, вып. 2.— С. 77—147.

Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1983.— Т. 22.— 244 с.— (Итоги науки и техники); 1988.— Т. 33.— 236 с.— (Итоги науки и техники).

Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНТИ, 1986.— Т. 5.— 284 с.; 1988.— Т. 6.— С. 256, 1989.— Т. 39.— С. 256.

Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.— М.: Мир, 1985.— 256 с.

Первая работа по теории особенностей:

Whitney H. On singularities of Mappings of Euclidean Spaces I. Mappings of the Plane into the Plane // Ann. Math.— 1955.— V. 62.— P. 374—410.

Учебники:

Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977.— 208 с.

Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности.— М.: Мир, 1977.— 296 с.

Джильмор Р. Теория катастроф для ученых и инженеров.— М.: Мир, 1983.

Брюс Дж., Джиблин П. Кривые и особенности.— М.: Мир, 1988.

Дискуссия о катастрофах:

Thom R. Topological models in biology // Topology.— 1969.— V. 8, № 3.— P. 313—335.

Thom R. Stabilité structurelle et morphogenèse.— New York: Benjamin, 1972.— 362 p.

Thom R. Catastrophe Theory: Its present state and future perspectives // Dynamical Systems. Warwick, 1974.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1—75.— P. 366—372. Lecture Notes Math. V. 468.

Zee-man E. C. Catastrophe theory: a reply to Thom // Loc. cit. P. 373—383.

Zee-man E. C. Catastrophe theory: Selected Papers. 1972.— 1977. Addison-Wesley. Reading Mass. 1977.

Guckenheimer J. The Catastrophe Controversy // Math. Intell. 1978.— V. 1.— P. 15—20.

Fussbudget H. J., Znarler R. S. Sagacity theory. A. Critique // Math. Intell.— 1979.— V. 2.— P. 56—59.

К разделу 6

Диссертация Пуанкаре:

Poincaré H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles Paris.: G. V. 1879, Oeuvres de Henry Poincaré, Tome I, Paris: Gauthier—Villars. 1951, XLIX—CX XIX.

Диссертация содержит, между прочим, теорему о версальных деформациях для нульмерных полных пересечений (лемма IV на стр. XI) и метод нормальных форм.

Работы Андронова по теории структурной устойчивости и теории бифуркаций были представлены уже в докладе:

Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзная конференция по колебаниям.— М.; Л.:

ГТТИ, 1933.— С. 82—72; Андронов А. А. Собр. соч. М., 1956.— С. 85—124).

Его статья 1939 г. (совместная с Е. А. Леонтович) содержит исследование обоих типов бифуркации рождения цикла: локального (цикл рождается из положения равновесия) и нелокального (рождение цикла из петли сепаратрисы). См.:

Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров // Учен. зап. Горьковского гос. ун-та.— 1939.— № 6.— С. 3—24.

Андронов А. А., [Витт А. А.], Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1937 (в поздних изданиях указывается, что фамилия второго автора была пропущена «вследствие трагической ошибки»).

Работы об экспоненциальном разбегании траекторий суммированы в:

Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы // Успехи мат. наук.— 1967.— Т. 22, вып. 5.— С. 107—172.

Смэйл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук.— 1970.— Т. 25, вып. 1.— С. 113—185.

Lozenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci.— 1963.— V. 20.— P. 130—141.

Приложения экспоненциального разбегания траекторий к теории гидродинамической неустойчивости описаны в:

Arnold V. I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier.— 1966.— V. 16, № 1.— P. 319—361.

Цитированные в тексте работы об оценках размерности аттракторов:

Ильяшенко Ю. С. Слабо сжимающие системы и аттракторы галёркинских приближений для уравнений Навье — Стокса // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, вып. 3.— С. 243—244.

Ильяшенко Ю. С., Четаев А. Н. Слабо сжимающие системы и аттракторы галёркинских приближений для уравнений Навье — Стокса на двумерном торе // Успехи механики.— 1982.— Т. 5, вып. 1; 2.— С. 31—63.

Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы для эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных и оценки их размерности // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, вып. 4.— С. 133—187.

Теорема Богданова впервые была анонсирована в обзоре:

Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи мат. наук.— 1972.— Т. 27, вып. 6.— С. 119—184.

Доказательства опубликованы в:

Богданов Р. И. Бифуркация предельного цикла в семействе векторных полей на плоскости // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1976.— Т. 2.— С. 23—85.

Богданов Р. И. Версальная деформация особенности векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1976.— Т. 2.— С. 37—85.

Случай симметрии порядка 2, 3 или  $\geq 5$ :

Мельников В. К. Качественное описание резонансных явлений в нелинейных системах.— Препринт / ОИЯФ.— Дубна, 1962.— Р. 1013.— С. 1—17.

Хоровов И. Е. Версальные деформации эквивариантных векторных полей для случаев симметрии порядка 2 и 3 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1979.— Т. 5.— С. 163—192.

Симметрия порядка 4:

Арнольд В. И. Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, вып. 2.— С. 1—10.

Нейштадт А. И. Бифуркации фазового портрета некоторых систем уравнений, возникающих в задаче о теории потери устойчивости вблизи резонанса 1 : 4 // Прикл. математика и механика.— 1978.— Т. 42.— С. 830—840.

Березовская Ф. С., Хибник А. И. О бифуркациях сепаратрис в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4 // Прикл. математика и механика.— 1980.— Т. 44.— С. 938—943.

Затягивание потери устойчивости:

Ширкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // ДАН СССР.— 1973.— Т. 209, № 3.— С. 576—579.

Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук.— 1985.— Т. 40, вып. 5.— С. 300—301.

Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II // Дифференц. уравнения.— 1987.— Т. 23, вып. 12.— С. 2060—2067; 1988.— Т. 24, вып. 2.— С. 226—233.

Каскады удвоений:

Шапиро А. П. Математические модели конкуренции // Управление и информация.— Владивосток: Дальневосточ. науч. центр АН СССР, 1974.— Т. 10.— С. 5—75.

Мау R. M. Biological populations obeying difference equations; stable points, stable cycles and chaos // J. Theor. Biol. 1975. V. 51.— P. 511—524.

Feigenbaum M. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys.— 1978.— V. 19, № 1.— P. 25—52.

Collet P., Eckmann J. P. Iterated maps of the interval as dynamical system.— Boston: Birkhauser, 1980.— 248 p.

Бифуркации коразмерности два:

Жолондек Г. Версальность одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Мат. сб.— 1983.— № 120.— С. 473—499.

Zoladek H. Bifurcations of Certain Family of Planar Vector Fields Tangent to Axes // Journ. of Diff. Equa.— 1987.— V. 67, № 1.— P. 1—55.

К разделу 7

Теорема коэрентности доказана в:

Левантовский Л. В. Особенности границы области устойчивости // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 1.— С. 44—48.

Простейшие особенности описаны в:  
Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи мат. наук.— 1972.— Т. 27, вып. 5.— С. 119—184.

К разделу 8

Другой подход к теории перестроен волновых фронтов и каустик изложен в статье:

Wassermann D. Stability of unfoldings in space in time // Acta Math.— 1975.— V. 135.— P. 57—128.

Интересно отметить, что неудачный выбор точки зрения и постановки задачи привел автора этой статьи к сложным ответам в простейших случаях и скрыл от него управляющие более сложными случаями простые общие законы, описанные в цитируемых ниже работах. Изображения перестроен волновых фронтов в трехмерном пространстве впервые появились в:

Arnold V. I. Critical points of smooth functions // Proc. of the International Congress of Mathematicians, 1974.— Vancouver.— 1975.— V. 1.— P. 19—40.

Теория перестроен каустик и волновых фронтов изложена в статьях:

Arnold V. I. Wave Fronts Evolution and Equivariant Morse Lemma // Comm. Pure Appl. Math.— 1976.— V. 29.— P. 557—582.

Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра // Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, вып. 2.— С. 69—70.

Закалюкин В. М. Лежандровы отображения в гамильтоновых системах.— М.: МАИ, 1977.— С. 11—16.

Подробное изложение имеется в диссертации В. М. Закалюкина (М.: МГУ, 1978.— 145 с.), см. также:

Закалюкин В. М. Перестройка фронтов и каустик, зависящих от параметра, и версальность отображений // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1983.— Т. 22.— С. 56—93.— (Итоги науки и техники.)

Изображения перестроен каустик впервые появились в первом русском варианте настоящей книги:

Арнольд В. И. Теория катастроф // Природа.— 1979.— № 10.— С. 54—63.

Во французском переводе Ж.-М. Кантора (Matematica.— 1980, May.— P. 3—20) эти изображения были заменены страницей комментариев Р. Тома.

Теория бикаустик изложена в:

Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков бесстолкновительной среды и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1982.— Т. 8.— С. 21—57.

Результаты о бифуркациях были анонсированы на семинаре им. И. Г. Петровского осенью 1980 г. (см.: Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, вып. 4.— С. 233), а изображения бикаустик впервые появились в 1981 г. в первом издании настоящей книги. Некоторые из этих поверхностей изучались в работах Щербака и Гафни и дю Плессиса в 182 г. (в теории Щербака — в качестве объединений касательных к пространственным кривым).

Классификация особенностей каустик и волновых фронтов до размерности 10 проведена в статье:

З а к а л ю к и н В. М. Лагранжевы и лежандровы особенности // Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, вып. 1.— С. 26—38 и исправлена в § 21 книги:

А р н о л ь д В. И., В а р ч е н к о А. Н., Г у с е й н-З а д е С. М. Особенности дифференцируемых отображений. I. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.— М.: Наука, 1982.— 304 с.

Работа о движении льда:

Н у е J. F., Thorndike A. S. Events in evolving three-dimensional vector fields // J. Phys. A.— 1980.— V. 13.— P. 1—14.

#### К разделу 9

Л и ф ш и т з Е. М., H a l a t n i k o v I. M. Investigations in relativistic cosmology // Adv. Phys.— 1963.— V. 12.— P. 185.

З е л д о в и ч Я. В. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations // Astron. Astrophys.— 1970.— V. 5.— P. 84—89.

А р н о л ь д В. И., Ш а н д а р и н С. Ф., З е л д о в и ч Я. В. The Large Scale Structure of the Universe. I. General Properties. One and Two-Dimensional Models // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.— 1982.— V. 20.— P. 111—130.

А р н о л ь д В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков бесстолкновительной среды и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1982.— Т. 8.— С. 21—57.

А р н о л ь д В. И. Some Algebro-Geometrical Aspects of the Newton Attraction Theory // Arithmetic and Geometry. II. Geometry / Boston: Birkhäuser, 1983.— P. 1—3. Progress in Math: V. 36.

Ш а н д а р и н С. Ф. Теория перколяции и ячеистая структура Вселенной.— Препринт / ИИМ им. М. В. Келдыша.— М., 1982.— № 137.— С. 1—15.

#### К разделу 10

Б р ы з г а л о в а Л. Н. Особенности максимума функции, зависящей от параметра // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, вып. 1.— С. 59—60.

Б р ы з г а л о в а Л. Н. Функция максимума семейства функций, зависящих от параметров // Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, вып. 1.— С. 66—67.

В а с и л ь е в В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграммы Ньютона и классификация точек минимума // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, вып. 3.— С. 1—11.

М а т о в В. И. Топологическая классификация ростков функций максимума и минимакса семейств функций общего положения // Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, вып. 4.— С. 129—130.

М а т о в В. И. Области эллиптичности семейств однородных многочленов и функции экстремума // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, вып. 2.— С. 26—36.

Б о г а е в с к и й И. А. Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргера с исчезающей вязкостью // Алгебра и анализ.— 1989.— Т. 1, № 4.— С. 1—16.

#### К разделу 11

Классификация Давыдова построена в его диссертации: Д а в ы д о в А. А. Особенности в двумерных управляемых системах (М.: МГУ, 1982.— 149 с.).

Результаты частично анонсированы в:

Д а в ы д о в А. А. Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах // Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, вып. 3.— С. 183—184.

Д а в ы д о в А. А. Граница достижимости в двумерных управляемых системах // Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, вып. 4.— С. 129.

Доказательства опубликованы в:

Д а в ы д о в А. А. Граница множества достижимости в многомерных управляемых системах // Тр. Тбил. ун-та. Сер. Мат., Мех., Астрон.— 1982.— Т. 13; 14.— С. 78—96.

(о гёльдеровости и липшицевости границы).

Д а в ы д о в А. А. Нормальные формы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, в окрестности особой точки // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, вып. 2.— С. 1—10.

Д а в ы д о в А. А. Нормальные формы медленного движения уравнения релаксационного типа и расслоения биномиальных поверхностей // Мат. сб.— 1987.— Т. 132, вып. 1.— С. 131—139.

Д а в ы д о в А. А. Особенности полей предельных направлений двумерных управляемых систем // Мат. сб.— 1989.— Т. 136, вып. 4.— С. 478—499.

О теоремах Давыдова см.:

А р н о л ь д В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— 3 изд.— М.: Наука, 1984.— С. 266—267.

А р н о л ь д В. И. Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неавтономных дифференциальных уравнений // Геометрия и теория особенностей в нелинейных задачах: Сб. науч. тр.— Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1987.— С. 3—8.

Особенности выпуклых оболочек, случай поверхности в трехмерном пространстве:

З а к а л ю к и н В. М. Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 11, вып. 3.— С. 76—77.

Кривые в трехмерном пространстве:

С е д ы х В. Д. Особенности выпуклой оболочки кривой в  $R^3$  // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, вып. 1.— С. 81—82.

Общий случай:

С е д ы х В. Д. Особенности выпуклых оболочек // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, вып. 3.— С. 158—175.

С е д ы х В. Д. Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерности 1 и 2 // Мат. сб.— 1982.— Т. 119 (161).— С. 223—247.

Особенности тени выпуклой поверхности:

К и с е л м а н С. О. How smooth is the shadow of a smooth convex body? // J. Lond. Math. Soc. 1986.— V. 33, № 1.— P. 101—109.

Седых В. Д. Бесконечно гладкая компактная выпуклая гиперповерхность, граница тени которой не дифференцируема дважды // Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 23, вып. 3.— С. 86—87.

#### К разделу 12

Kergosien Y. L., Thom R. Sur les points paraboliques des surfaces // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A.— 1980.— V. 290.— P. 705—710.

[Ошибки частично исправлены в работе:

Kergosien Y. L. La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularites // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1.— 1981.— V. 292.— P. 929—932.]

Платонова О. А. Особенности взаимного расположения поверхности и прямой // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, вып. 1.— С. 248—249.

Платонова О. А. Особенности проекций гладких поверхностей // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 1.— С. 149—150.

Платонова О. А. Проекция гладких поверхностей // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1984.— Т. 10.— С. 135—149.

Ландис Е. Е. Тангенциальные особенности // Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 2.— С. 36—49.

Более подробное изложение имеется в диссертациях Платоновой (М.: МГУ, 1981.— 150 с.) и Ландис (М.: МГУ, 1983.— 142 с.).

Арнольд В. И. Особенности систем лучей // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, вып. 2.— С. 77—147.

Цербаков О. П. Проективно двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности // Тр. Тбил. ун-та. Сер. Мат. Мех. Астрон.— 1982.— Т. 13—14 (232—233).— С. 280—336.

Доказательства теорем о проектированиях основаны в работе: Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразиях с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проектирования гладких поверхностей // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 34, вып. 2.— С. 3—38.

Другой подход к проектированиям изложен в книге:

Vanchoff T., Gaffney T., McCroghy C. Cusps of Gauss mappings.— Boston — London — Melbourne: Pitman.— 1982.— Res. Notes Math.— V. 55.

Обзор об особенностях проектирований:

Горюнов В. В. Особенности проектирований полных пересечений // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1983.— Т. 22.— С. 167—206.— (Итоги науки и техники).

См. также:

Горюнов В. В. Геометрия бифуркационных диаграмм простых проектирований на прямую // Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 2.— С. 1—8.

Горюнов В. В. Проекция нульмерных полных пересечений на прямую и  $K(\pi, 1)$ -гипотеза // Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, вып. 3.— С. 179—180.

Горюнов В. В. Бифуркационные диаграммы некоторых простых и квазиоднородных особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, вып. 2.— С. 23—37.

122

Горюнов В. В. Проектирования и векторные поля, касающиеся дискриминанта полного пересечения // Функцион. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, вып. 2.— С. 26—37.

#### К разделу 13

Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли  $B_k, C_k, F_4$  и особенности эволют // Успехи мат. наук.— 1978.— Т. 33, вып. 5.— С. 94—105.

Платонова О. А. Особенности в задаче о скорейшем обходе препятствия // Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 2.— С. 86—87.

Платонова О. А. Особенности системы лучей вблизи препятствия.— Москва, 1981. 150 с.— Деп. ВИНТИ 11.02.81.— № 647—81.

Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1983.— Т. 22.— С. 3—55.— (Итоги науки и техники).

#### К разделу 14

Теория лагранжевых особенностей основана в 1966 г. См.:

Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функцион. анализ и его прил.— 1967.— Т. 1, вып. 1.— С. 1—14.

Hönlmann L. Fourier integral operators, I // Acta Math.— 1971.— V. 127.— P. 79—183.

Арнольд В. И. Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, вып. 3.— С. 61—62.

Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k, D_k, E_k$  и лагранжевы особенности // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, вып. 4.— С. 3—25.

См. также:

Guckenheimer J. Catastrophes and partial differential equations // Ann. Inst. Fourier.— 1973.— V. 23, № 2.— P. 31—59.

Теория лежандровых особенностей впервые появилась в книге: Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.— 432 с.,

и в докладе:

Arnold V. I. Critical points of smooth functions // Proc. of the International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974).— Canadian Mathematical Congress.— 1975.— V. 1.— P. 19—39.

См. также:

Sewell M. J. On Legendre transformations and elementary catastrophes // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1977.— V. 82.— P. 147—163.

Dubois J. G., Dufour J. P. La theorie des catastrophes, V. Transformee de Legendre et thermodynamique // Ann. Inst. Henri Poincare, Nouv. Ser. Sect. A. 1978.— V. 29.— P. 1—50.

О раскрытом ласточкином хвосте см.:

Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост // Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 4.— С. 1—14.

Arnold V. I. Singularities of Legendre varieties, of evolutes and of fronts at an obstacle // Ergodic Theory Dyn. Syst.—1982.— V. 2.— P. 301—309.

Гивенталь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые  $sl(2)$ -модули // Успехи мат. наук.—1983.— Т. 38, вып. 8.— С. 109—110.

Гивенталь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кратности, и обобщенное уравнение Ньютона // Функцион. анализ и его прил.—1982.— Т. 16, вып. 1.— С. 13—18.

Теоремы Гивенталь о подмногообразиях симплектического и контактного пространства впервые появились в первом издании этой книжки, в 1981 г. Они обобщают теорему Дарбу — Вейнштейна (разница состоит в том, что в теоремах Гивенталь структуры ограничиваются лишь на касательные к подмногообразию векторы). Теорема Дарбу — Вейнштейна доказана в статье:

Weinstein A. Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems // Ann. Math., II Ser.—1973.— V. 98.— P. 373—410.

О подмногообразиях симплектических и контактных пространств см. также:

Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики, Фундаментальные направления.— М.: ВИНТИ; 1985.— Т. 4.— С. 5—139.— (Итоги науки и техники.)

Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ, 1983.— Т. 22.— С. 3—5.— (Итоги науки и техники.)

Melrose R. B. Equivalence of glancing hypersurfaces // Invent. Math.—1976.— V. 37.— P. 165—191.

Melrose R. B. Equivalence of glancing hypersurfaces, II // Math. Ann. 1981.— V. 255.— P. 159—198.

Martinet J. Sur les singularites des formes differentielles // Ann. Inst. Fourier.—1970.— V. 20, № 1.— P. 95—178.

Roussarie R. Modeles locaux de champs et de formes // Asterisque.—1975.— V. 30.

Golubitsky M., Tischler D. An example of moduli for singular symplectic forms // Invent. Math.—1977.— V. 38, P. 217—225.

Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ; 1988.— Т. 33.— С. 55—112.— (Итоги науки и техники.)

Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями // Мат. заметки.—1988.— Т. 44, вып. 1.

Arnold V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles // J. of Geometry and Physics.—1988.— V. 5, № 4.— P. 458—475.

Гивенталь А. Б. Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни // Функцион. анализ и его прил.—1986.— Т. 20, вып. 3.— С. 35—41.

Пословица о хохолке жаворонка цитируется Плутархом: «как у каждого жаворонка должен появиться хохолок, так в каждом цивилизованном государстве должны появиться доносчики — сикофанты».

## К разделу 15

Более подробное изложение можно найти в следующих книгах: Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.— 128 с.

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. II. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, 1984.— 336 с.

Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Теория особенностей // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНТИ, 1988.— Т. 6.— С. 1—256.— (Итоги науки и техники.)

Brieskorn E. Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten // Bonn. Math. Schr.— Bonn.: Math. Inst. der Universität Bonn.—1983.— Bd 150.— 225 S.

Brieskorn E., Knörrer H. Ebene algebraische Kurven.— Boston: Birkhäuser, 1981.— 964 p.

Работы об икосаэдре:

Ляшко О. В. Классификация критических точек функций на многообразиях с особой границей // Функцион. анализ и его прил.—1983.— Т. 17, вып. 3.— С. 28—36.

Щербак О. П. Особенности семейств эволюент в окрестности точки перегиба кривой и группа  $H_3$ , порожденная отражениями // Функцион. анализ и его прил.—1983.— Т. 17, вып. 4.— С. 70—72.

## К разделу 16

Колчаны:

Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen, I // Manuscr., Math.—1972.— V. 6.— P. 71—103.

Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриэля // Успехи мат. наук.—1973.— Т. 28, вып. 2.— С. 19—33.

Назарова Л. А., Ройтер А. В. Поликолчаны и схемы Дынкина // Функцион. анализ и его прил.—1973.— С. 94—95.

Dlab A., Ringel K. M. Representation of graphs and algebras // Carleton Math. Lect. Notes. Ottawa:— Carleton University, 1974.— V. 8.

Правильные многогранники:

Клейн Ф. Лекции об икосаэдре.— М.: Наука, 1989.

МакКей Дж. Графы, особенности и конечные группы // Успехи мат. наук.—1983.— Т. 38, вып. 3.— С. 159—164.

Краевые особенности:

Arnold V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma // Commun. Pure Appl. Math.—1976.— V. 29, № 6.— P. 557—582.

Wasserman D. Classification of singularities with compact abelian symmetry // Regensburger Math. Schr. Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg, 1977.— V. 1.

Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли  $B_k, C_k, F_4$  и особенности эволют // Успехи мат. наук.—1978.— Т. 33, вып. 5.— С. 91—105.

Golubitsky M., Schaeffer D. A theory for imper fect bifurcation via singularity theory // Commun. Pure Appl. Math. 1979.— V. 32.— P. 21—98.

Pitt D. H., Poston T. Determinacy and unfolding in the presence of a boundary, 1978. (Мифический препринт, цитированный в 16-й главе книги Постона и Стюарта «Теория катастроф и ее приложения» (М.: Мир, 1980)).

Stodow P. Simple singularities and simple algebraic groups. Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1980.— 175 p. (Lect. Notes Math., v. 815).

Siersma D. Singularities of functions on boundaries, corners etc. // Q. J. Math. Oxf. 1981.— V. 32.— Ser. II.— P. 119—127.

Матов В. И. Особенности функций максимума на многообразиях с краем // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1981.— Т. 6.— С. 195—222.

Матов В. И. Унимодальные и бимодальные ростки функций на многообразиях с краем // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1981.— Т. 7.— С. 174—189.

Щербак И. Г. Двойственность краевых особенностей // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 2.— С. 207—208.

Щербак И. Г. Фокальное множество поверхности с краем и каустики групп, порожденных отражениями  $B_k$ ,  $C_k$  и  $F_4$  // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, вып. 1.— С. 90—91.

Щербак И. Г. Краевые особенности с простым разложением // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1990.— Т. 15.

Nguyen hũu Duc, Nguyễn tiến Dai. Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A.— 1980.— V. 291.— P. 113—116.

Ильюта Г. Г. Монодромия и исчезающие циклы для краевых особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, вып. 3.— С. 11—21.

Группы  $H_3$  и  $H_4$ :

Ляшко О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, вып. 3.— С. 28—36.

Щербак О. П. Особенности семейств эволюент в окрестности точки перегиба кривой и группа  $H_3$ , порожденная отражениями // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, вып. 4.— С. 70—72.

Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 5.— С. 256.

Arnold V. I. Singularities of ray systems // Proc. of the International Congress of Mathematicians, August 16—24, 1983. Warszawa.— North-Holland 1984.— V. 1.— P. 27—49.

Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, являются группами монодромии подходящих особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, вып. 3.— С. 1—13.

Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ. 1988.— Т. 33.— С. 55—112.— (Итоги науки и техники.)

Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений // Успехи мат. наук.— 1988.— Т. 43, вып. 3.— С. 125—160.

К добавлению

Более подробный анализ предшествовавших теории катастроф приложений ее идей имеется в статье:

Арнольд В. И. Теория катастроф. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНТИ, 1986.— Т. 5.— С. 219—277.— (Итоги науки и техники.)

где приведена и соответствующая библиография.

См. также:

Vennequin D. Caustique mystique // Seminaire N. Bourbaki.— 1984.— № 634.— P. 1—37.

К заключению

Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций.— М.: Сов. радио, 1977.— С. 47—53.

This short book provides a concise, nonmathematical review of the less controversial results in singularities, bifurcations and perestroikas theory. The author begins by describing the elements of the singularity theory of smooth mappings and of the bifurcation and stability loss theory of dynamical systems, and continues with chapters on the applications of the theory to topics such as wavefront propagation, the distribution of matter within the universe, the geometry of apparent contours of smooth surfaces, the theory of implicit differential equations, symplectic and contact structures topology of Riemann surfaces, optimisation and control, perestroikas difficulties.

This new edition is more complete than the 1986 (Springer) English edition. The main new parts are an historical survey of the works of the predecessors of catastrophe theory and a list of about a hundred problems, containing both the exercises, intended to help the reader to master the theory, and to provide him with the formulations of some more sophisticated results in singularity theory. Among the 15 new figures one finds the patterns of the generic singularities of implicit differential equations and of the perestroikas of the apparent contours of the generic surfaces, viewed from nongeneric points of view, the list of the shock waves metamorphoses and the singularity of the caustics of a generic surface with boundary. The recent results, discussed in this new edition, includes the Neistadt delayed dynamical bifurcations theory, the Zoladek theory of Lotka — Volterra bifurcation, the Davydov description of the singularities of the slow motions in relaxation systems with two slow variables and the Hessin classification of local bifurcations in generic three — parameter families of gradient dynamical systems.