

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

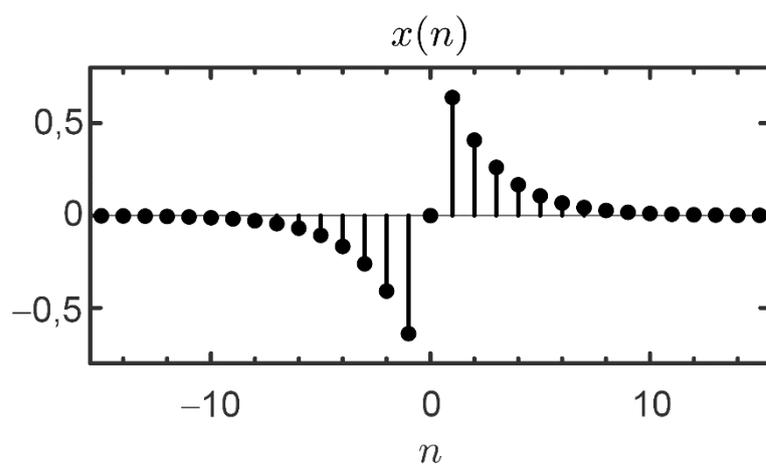
Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных средств

**М. И. Вашкевич, М. И. Порхун, И. С. Азаров**

## **ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальности  
1-40 02 02 «Электронные вычислительные средства»*



Минск БГУИР 2024

УДК 621.391(076.5)  
ББК 32.811я73  
В23

Рецензенты:

кафедра математической кибернетики  
Белорусского государственного университета  
(протокол № 7 от 10.03.2023);

декан инженерно-педагогического факультета  
Белорусского национального технического университета  
кандидат технических наук, доцент А. А. Дробыш

**Вашкевич, М. И.**

**В23** Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум: пособие / М. И. Вашкевич, М. И. Порхун, И. С. Азаров. – Минск : БГУИР, 2024. – 135 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-761-2.

Содержит описание четырех лабораторных работ по дисциплине «Теория и применение цифровой обработки сигналов (ЦОС)». Первая работа знакомит студентов с основами среды MATLAB и базовыми дискретными сигналами: единичным скачком, единичным импульсом, дискретной синусоидой, комплексной экспонентой, ЧМ- и АМ-сигналами. Вторая лабораторная работа посвящена дискретным системам. Объяснены основные свойства дискретных систем: однородность, аддитивность, линейность, стационарность, устойчивость. Особое внимание уделено линейным стационарным системам, их описанию посредством свертки и разностного уравнения. В третьей лабораторной работе рассмотрено представление периодических сигналов рядом Фурье. Внимание уделено понятию ортогональности функций синус и косинус, а также различным формам записи ряда Фурье. В четвертой лабораторной работе студенты знакомятся с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Подробно объяснены основные свойства ДПФ. Также делается акцент на использовании ДПФ в качестве инструмента для анализа и синтеза звуковых сигналов.

**УДК 621.391(076.5)**  
**ББК 32.811я73**

**ISBN 978-985-543-647-9**

© Вашкевич М. И., Порхун М. И.,  
Азаров И. С., 2024

© УО «Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники», 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Лабораторная работа № 1. Дискретные сигналы .....	5
1.1. Теоретические сведения.....	5
1.2. Порядок выполнения работы.....	40
1.3. Дополнительные задания .....	44
Лабораторная работа № 2. Дискретные системы .....	48
2.1. Теоретические сведения.....	48
2.2. Порядок выполнения работы.....	60
2.3. Дополнительные задания .....	64
Лабораторная работа № 3. Ряды Фурье .....	68
3.1. Теоретические сведения.....	68
3.2. Порядок выполнения работы.....	80
3.3. Дополнительные задания .....	84
Лабораторная работа № 4. Дискретное преобразование Фурье .....	85
4.1. Теоретические сведения.....	85
4.2. Порядок выполнения работы.....	125
4.3. Дополнительные задания .....	130
Список использованных источников.....	133

## **ВВЕДЕНИЕ**

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) сформировалась в качестве отдельной научной дисциплины достаточно давно, еще в 1970-х годах, однако до сегодняшнего дня продолжает стремительно развиваться. Методы ЦОС находят применение во многих областях: спутниковой связи и навигации, биомедицине, обработке звука, изображений и видео. В связи со столь широким распространением необходимо познакомить будущих специалистов в области вычислительной техники с базовыми концепциями и идеями, которые лежат в основе цифровой обработки сигналов. С этой целью создано данное пособие. Оно содержит ряд лабораторных работ, которые помогут студенту вникнуть в идеи дискретизации непрерывных сигналов, принципы построения дискретных систем и частотно-временных преобразований. Тщательное изучение теоретического материала, а также закрепление его выполнением практических заданий позволят студенту приобрести надежный фундамент для создания собственных систем обработки сигналов и эффективно использовать существующие.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

Цель работы – изучение пакета MATLAB, программирование базовых сигналов цифровой обработки (ЦОС) в пакете MATLAB.

## 1.1. Теоретические сведения

### *Пакет MATLAB*

Для выполнения лабораторных работ используется система научных расчетов MATLAB (сокращение от MATrix LABoratory – матричная лаборатория). Основным объектом MATLAB является матрица. Все вычисления система осуществляет в арифметике с плавающей точкой.

Система MATLAB работает в режиме интерпретатора. Команды вводятся в командной строке (рис. 1.1), а MATLAB выполняет их немедленную обработку и выдает вычисленный результат. MATLAB также может выполнять заранее подготовленную последовательность команд, записанную в виде текстового файла с расширением `.m` (М-файл).

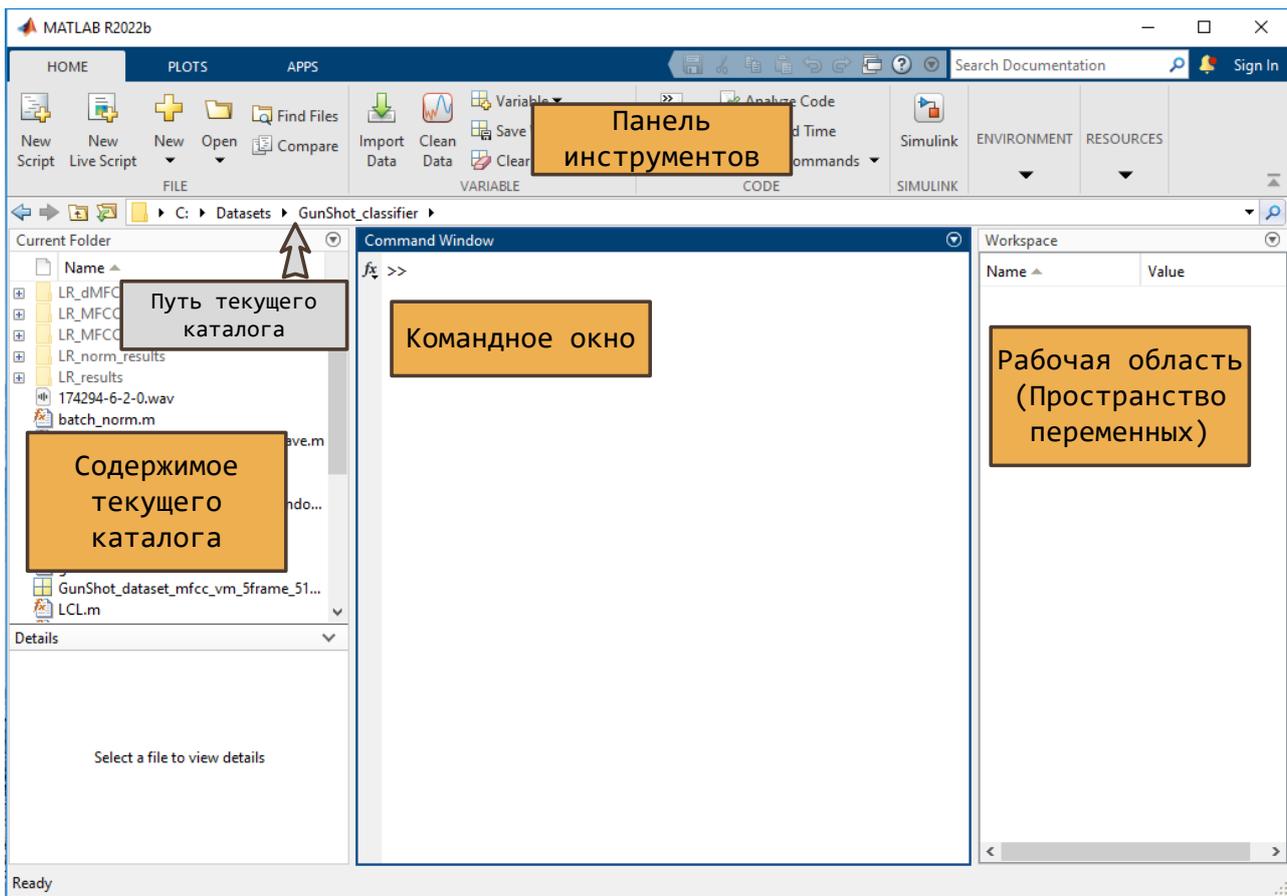


Рис. 1.1. Вид системы MATLAB

M-файлы разделяются на два вида: файлы-сценарии и процедуры-функции. Все M-файлы должны располагаться в рабочем каталоге или каталоге, зарегистрированном в списке путей системы MATLAB. Для изменения рабочего каталога необходимо выбрать и указать его путь в поле текущего каталога.

### ***Файлы-сценарии***

Файл-сценарий – это текстовый файл, содержащий последовательности команд и операторов. В языке MATLAB нет специальных операторов для обозначения начала и конца файла-сценария, а также точки входа.

Имя файла сценария может содержать только символы латинского алфавита от A до Z и от a до z, цифры от 0 до 9 и символ подчеркивания.

Результат выполнения каждого оператора отображается в окне командной строки. Для того чтобы система не выводила результат, необходимо в конце оператора ставить точку с запятой.

### ***Файлы -функции***

Файл-функция также является текстовым файлом, содержащим последовательности команд, и имеет несколько отличий от файла-сценария.

Первой строкой файла-функции должен быть заголовок функции:

```
function [<список выходных параметров>] = <имя функции>(<список входных параметров>)
```

Имя функции должно совпадать с именем файла. Для примера рассмотрим функцию, вычисляющую минимальное и максимальное значения массива, которая должна быть сохранена в файл с названием `minmax.m`:

```
function [minimum, maximum] = minmax(array)
minimum = min(array)
maximum = max(array)
```

Как видно из этого примера, функция может иметь несколько возвращаемых значений. Представленную в примере функцию можно использовать следующим образом:

```
[a,b] = minmax(x)    % В a будет минимум, в b - максимум
a = minmax(x)        % В a будет минимум, максимум теряется
```

По соглашению, принятому в MATLAB, начиная со второй строки функции может располагаться несколько строк комментария. Этот комментарий считается справкой по использованию функции и может быть вызван с помощью команды help, например:

```
help filter % справка по функции filter
```

### *Создание переменных в системе MATLAB*

В MATLAB не требуется объявлять переменные. Для создания переменной ей необходимо присвоить некоторое значение. Рассмотрим несколько вариантов создания переменных в системе MATLAB.

В простейшем случае мы можем создать пустой массив:

```
a = []
```

Этот вариант может потребоваться, например, в том случае, когда мы заранее не знаем сколько элементов будет содержать наш массив. В процессе работы можно добавлять данные в массив путем конкатенации, как показано в следующем примере:

```
>> a = [];  
>> a = [a 1];  
>> a = [a 2]  
a =  
    1    2
```

В MATLAB матрица 1×1 называется скаляром. Покажем пример объявления скаляра:

```
b = 8  
c = 0.25 + 18i % Комплексное число
```

Для записи комплексного числа используют символ мнимой единицы. В MATLAB для обозначения мнимой единицы используют символ *i* либо *j*.

Ниже показаны два равнозначных способа задания комплексного числа:

```
c1 = 0.5 + 2i    % Первое комплексное число
c2 = 2 + 0.5j   % Второе комплексное число
```

Если нам необходимо объявить вектор, то достаточно записать его элементы, разделенные пробелами, в квадратных скобках:

```
x = [1 2]
y = [2.2 -5]
z = [x 4 y]    % Результат c = [1 2 4 2.2 -5]
```

### ***Монотонно возрастающие или убывающие последовательности***

В MATLAB предусмотрен следующий формат объявления монотонных последовательностей (или векторов):

первый\_элемент : [шаг :] конечный\_элемент.

Если шаг равен 1, то его разрешается опустить:

```
x = 1:5          % Результат x = [1 2 3 4 5]
y = 2:-2:-6     % Результат y = [2 0 -2 -4 -6]
z = -1:3:10     % Результат z = [-1 2 5 8]
```

### ***Создание массивов***

Для объявления массива нужно записать его элементы в квадратных скобках, притом элементы строки разделяются пробелами, а строки между собой – точкой с запятой.

Например, массив

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

в MATLAB будет записываться как

```
A = [2 3 5; 7 11 13];
```

Для объявления специальных массивов в MATLAB предусмотрены следующие функции:

`zeros(m, n)` – возвращает массив размером  $m \times n$ , заполненный нулями;  
`ones(m, n)` – возвращает массив размером  $m \times n$ , заполненный единицами;  
`rand(m, n)` – возвращает массив размером  $m \times n$ , заполненный псевдослучайными величинами, распределенными по равномерному закону;  
`randn(m, n)` – возвращает массив размером  $m \times n$ , заполненный псевдослучайными величинами, распределенными по нормальному закону.

В данных функциях может опускаться первый операнд. В этом случае возвращается квадратная матрица  $n \times n$ . Пример:

```
a = zeros(1, 100)% Вектор-строка из 100 нулей
b = ones(20)      % Матрица 20x20 единиц
c = rand(2, 50)  % Матрица 2x50 псевдослучайных чисел
```

### *Доступ к массивам и его элементам*

Доступ к массивам осуществляется по их именам. Все операции с массивами осуществляются по значению, т. е., например, при выполнении операции присваивания будет копироваться все содержимое массива. Пример:

```
a = [2 4 5; 4 6 1]
b = a
```

В результате выполнения данной программы переменная `b` будет иметь размер  $2 \times 3$  и содержать значение `[2 4 5; 4 6 1]`, притом `a` и `b` будут размещаться в разных участках памяти.

Для доступа к элементу массива необходимо после имени задать в круглых скобках индекс элемента, состоящий из двух чисел или векторов, разделенных запятой. Нумерация начинается с единицы. Первое число или вектор определяет номер строки (номера строк), второе – соответственно столбца. Если номер строки пропущен (обычно при обращении к элементам вектора), то он считается равным единице.

Пример:

```
a = [11 12 13 14 15; % Исходный массив
     21 22 23 24 25;
     31 32 33 34 35;
     41 42 43 44 45]
b = a(2, 3) % Результат: b = 23
a(3) = 6 % Результат: a(1,3) = 0
c = a(3, 2:4) % Результат: c = [32 33 34]
d = a([1 3], 1:3) % Результат: d = [11 12 13;
                                     % 31 32 33]
a([1 4], [1 5]) = zeros(2,2); % Результат:
% a = [0 12 13 14 0;
%      21 22 23 24 25;
%      31 32 33 34 35;
%      0 42 43 44 0]
```

### *Арифметические операции*

Операции над матрицами в MATLAB определены в соответствии с правилами линейной алгебры. К таким операциям относят сложение, вычитание и умножение, также отдельно выделяют умножение матрицы на скаляр. Приведем пример сложения матриц.

```
>> A = [1 2; 3 4];
>> B = [2 4; 1 3];
>> C = A+B

C =

     3     6
     4     7
```

Согласно законам линейной алгебры, складывать и вычитать можно матрицы одного и того же размера. Ниже приведен пример умножения матрицы A из предыдущего примера на константу.

```
>> D = 1.5*A

D =

     1.50     3.00
     4.50     6.00
```

Если у нас есть матрица A размером  $m1 \times n1$  и матрица B размером  $m2 \times n2$ , то их можно перемножить лишь в случае, когда  $n1 = m2$ . В результате умножения будет получен матрица размера  $m1 \times n2$ . Приведем пример.

```
>> A = [1 1; 1 2; 1 3];
>> B = [1 1 1; 3 3 3];
>> E = A*B

E =

     4     4     4
     7     7     7
    10    10    10
```

В данном примере матрица A имела размер  $3 \times 2$ , а матрица B размер  $2 \times 3$ . В результате перемножения получилась матрица E размером  $3 \times 3$ .

В MATLAB предусмотрена операция добавления скаляра к матрице. В этом случае значение скаляра будет добавлено ко всем элементам матрицы, как показано в следующем примере.

```
>> B = [1 1 1; 3 3 3];
>> E = B-1

E =

     0     0     0
     2     2     2
```

Часто встречаются ситуации, когда необходимо умножить элементы одной матрицы на элементы другой. В это случае необходимо использовать поэлементную операцию умножения, которая обозначается «.\*». Ниже приведен пример поэлементного умножения.

```
>> A = [2 4; 6 8];
>> B = [4 2; 4/3 1];
>> C = A.*B

C =

     8     8
     8     8
```

Аналогично выполняется операция поэлементного деления «./».

Операцию транспонирования в MATLAB осуществляет оператор «`» (апостроф).

```
>> B = [1 1 1; 3 3 3];
>> C = B`

C =

     1     3
     1     3
     1     3
```

Используя транспонирование в MATLAB следует быть аккуратным, поскольку с точки зрения математики, если матрица содержит комплексные числа, то при транспонировании каждое число заменяется на комплексно-сопряженное. Покажем, как это работает.

```
>> B = [1 1 1+2*1j; 3 3 3-1j];
>> C = B`

C =

 1.0 + 0.0i  3.0 + 0.0i
 1.0 + 0.0i  3.0 + 0.0i
 1.0 - 2.0i  3.0 + 1.0i
```

Если же мы заинтересованы только в том, чтобы переставить элементы матрицы и не выполнять операцию комплексного сопряжения, то необходимо использовать оператор «.`» (точка и апостроф). Действие этого оператора представлено в примере ниже.

```
>> B = [1 1 1+2*1j; 3 3 3-1j];
>> C = B.`

C =

 1.0 + 0.0i  3.0 + 0.0i
 1.0 + 0.0i  3.0 + 0.0i
 1.0 + 2.0i  3.0 - 1.0i
```

### *Логические операторы. Операции отношения*

В языке MATLAB используются следующие логические операторы (табл. 1.1):

Таблица 1.1

Операции отношения в MATLAB

<b>Операция</b>	<b>Отношение</b>
>	Больше
<	Меньше
>=	Больше или равно
<=	Меньше или равно
==	Равно
~=	Не равно

Все логические операторы осуществляют операцию поэлементного сравнения двух массивов. Если один из операндов является скаляром, то он поэлементно сравнивается со всеми элементами другого операнда. Логические операторы возвращают в качестве результата массив того же размера, элементы которого равны единице, если результат сравнения соответствующих элементов равен ИСТИНА, и нулю – в противоположном случае.

Операторы <, >, <=, >= используются для сравнения только действительных частей комплексных элементов, а операции == и ~= осуществляют сравнение как действительных, так и мнимых частей. Пример:

```
X = [2 4 2.5;  
     12i 6 3]  
Y = [3 4 12;  
     2 3 6]  
Z = X >= Y  
% Результат  
Z = [0 1 0;  
     0 0 1]
```

### *Логические операции*

В языке MATLAB есть три логические операции (табл. 1.2).

## Логические операции в MATLAB

Операция	И	ИЛИ	НЕ
Обозначение	&		~

При выполнении логических операций массив рассматривается как совокупность булевых переменных, так что значение 0 соответствует булеву значению false, а любое другое значение – булеву значению true. Функция ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ реализована в виде функции `xor(A, B)`.

Логические операции имеют низший приоритет по отношению к операциям отношения и арифметическим операциям.

**Оператор цикла с определенным числом операций**

Оператор цикла с определенным числом операций имеет следующий вид:

```
for v = <выражение-массив>
<операторы>
end
```

В отличие от универсальных языков программирования переменная цикла в языке MATLAB является массивом. Поэтому исполнение цикла состоит в том, что переменной цикла присваиваются значения столбцов массива и затем выполняются операторы, которые должны зависеть от переменной *v*. Тем не менее на практике чаще всего применяют линейные конструкции вида *m : n* или *a : <шаг> : b*.

Для прерывания выполнения цикла используется оператор `break`. Пример:

```
for i = 1:10
    x(i) = i .^ 2
end
% Результат x = [1 4 9 16 ... 100]

y = []
for k = [0 3 1 2]
    y = [y 2.^k]
end
% Результат y = [1 8 2 4]
```

### *Добавление элементов к массивам*

Переменная-вектор или переменная-матрица может быть изменена путем добавления новых элементов.

Добавление новых элементов к переменной-вектору осуществляется путем присваивания значений новым элементам вектора. Ниже показан пример добавления новых элементов к вектору *a*:

```
a = [1 2 3 4 5]
a = 1 2 3 4 5
a(6:10) = 6:10
a = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

Для переменных-матриц добавление новых элементов производится путем присвоения новых значений строкам и столбцам исходной матрицы. Рассмотрим пример добавления новых элементов к матрице *A*:

```
A = [1 2; 3 4]
A =
    1     2
    3     4
A(3,:) = [5 6]
A =
    1     2
    3     4
    5     6
A(:,3) = [7; 8; 9]
A =
    1     2     7
    3     4     8
    5     6     9
```

### *Удаление элементов массива*

Удаление элементов из переменной-вектора или переменной матрицы осуществляется путем присвоения пустого множества этим элементам. В MATLAB пустое множество обозначается квадратными скобками `[]`.

Рассмотрим пример удаления элементов из вектора a:

```
a = 1:8
a = 1 2 3 4 5 6 7 8
a(1:5) = []
a = 6 7 8
```

Ниже показан пример удаления последнего столбца из матрицы A:

```
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
A(:,3) = []
A =
     1     2
     4     5
     7     8
```

### *Функции управления массивами*

В MATLAB существует множество полезных функций для управления и обработки массивов.

Функция `length(a)` возвращает число элементов вектора a.

```
a = -10:0.1:100;
length(a)
ans =
    1101
```

Функция `size(A)` возвращает параметры  $[m, n]$ , где m и n – размеры  $m \times n$  матрицы A:

```
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
size(A)
ans =
     3     3
```

Функция `reshape(A,m,n)` позволяет создать матрицу размером  $m \times n$  из элементов матрицы  $A$ . Элементы берутся по столбцам – столбец за столбцом и расставляются по столбцам. При этом матрица  $A$  должна иметь  $m \times n$  элементов.

```
A =[1 2 3 4; 5 6 7 8]
A =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
reshape(A,4,2)
ans =
     1     3
     5     7
     2     4
     6     8
```

### ***Оператор цикла с неопределенным числом операций***

Оператор цикла с неопределенным числом операций имеет вид:

```
while <логическое выражение>
<операторы>
end
```

Цикл `while ... end` выполняется до тех пор, пока массив логического выражения не станет нулевым.

Логическое выражение имеет форму

выражение <оператор отношения> выражение,

где допустимы следующие операторы отношений: `==`, `~=`, `<=`, `>=`, `<`, `>`. Пример:

```
i = 1
s = 0
while x(i) ~= 0 & i < 4
    s = s + x(i)
    i = i + 1
end
```

## *Условное выражение*

Как и во всех языках программирования, в языке MATLAB есть конструкции для организации условного выполнения операторов. Одна из конструкций условного выполнения операторов имеет следующий формат:

```
if <логическое выражение>
  <операторы>
elseif <логическое выражение>
  <операторы>
else
  <операторы>
end
```

В условном выражении может присутствовать несколько блоков elseif или данный блок может отсутствовать. Также может отсутствовать блок else.

Логическое выражение имеет форму

выражение <оператор отношения> выражение,

где допустимы следующие операторы отношений: ==, ~=, <=, >=, <, >. Пример:

```
if a > 0
  b = 2
elseif a < 0
  b = 0
else
  b = 1
end
```

В MATLAB имеется еще одна конструкция для организации условного выполнения операторов:

```
switch <анализируемое выражение>
  case <выражение 1>
    <операторы>
  case <выражение 2>
    <операторы>
  otherwise
    <операторы>
end
```

Оператор `switch` последовательно сравнивает анализируемое выражение с выражениями, записанными после `case`, и если выражения равны, то выполняются соответствующие операторы. Если не было найдено ни одного равенства, то выполняются операторы, записанные после `otherwise`.

### ***Построение графиков в MATLAB***

В MATLAB имеется способов визуализации данных. Рассмотрим основные функции, которые понадобятся для выполнения лабораторных работ.

Простейшим вариантом для построения графика сигнала является функция `plot`. Ниже показан пример использования `plot` для построения графика параболы.

```
x=-2:0.01:2;  
y=x.^2;  
figure;  
plot(x,y)
```

В результате выполнения этого блока кода появится окно (`figure`) с изображением параболы (рис. 1.2).

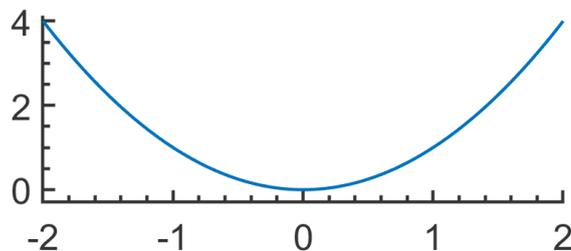


Рис. 1.2. Отображение параболы при помощи функции `plot`

Графику на рис. 1.2 не хватает подписей координатных осей. Этот недостаток можно устранить, используя команды `xlabel` и `ylabel`, как показано в следующем примере:

```
xlabel('x')  
ylabel('y')
```

В результате получится график, показанный на рис. 1.3.

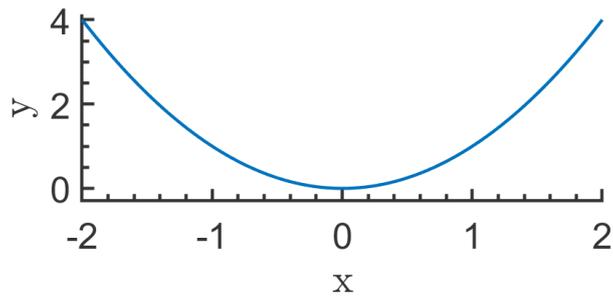


Рис. 1.3. Подпись координатных осей в текстовом режиме

Подписи осей отобразились, как обычный текст. Если мы хотим указать MATLAB, что подписи являются математическими символами, то необходимо воспользоваться режимом интерпретации LaTeX. Для этого вызов команд подписи осей нужно модифицировать как показано ниже:

```
xlabel('$ x $','Interpreter','latex')
ylabel('$ y $','Interpreter','latex')
```

В результате получится график параболы с подписанными осями, как показано на рис. 1.4.

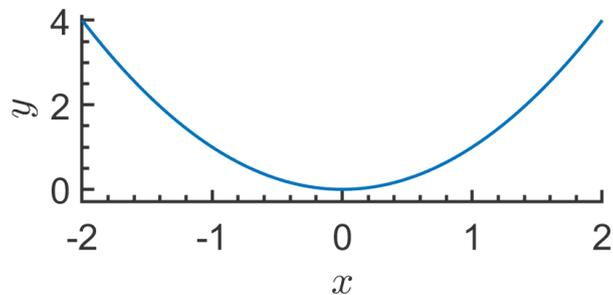


Рис. 1.4. Подпись координатных осей в режиме интерперетатора LaTeX

Для добавления заголовка к графику используется команда `title`. Текст заголовка располагается вверху окна графика. Добавим заголовок к графику, показанному на рис. 1.4:

```
title('График параболы')
```

В результате получится график параболы с указанным заголовком (рис. 1.5).

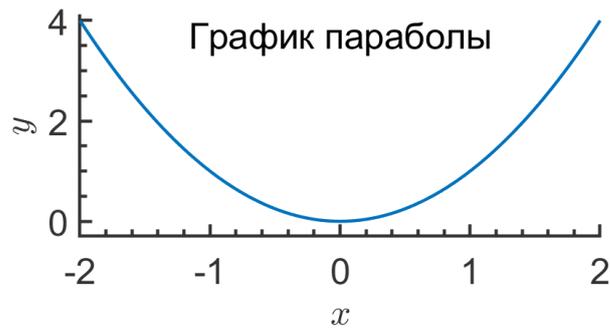


Рис. 1.5. Добавление заголовка к графику

Иногда бывает полезным добавить линии сетки на график. Для этого в MATLAB используется команда `grid on`. Для удаления сетки используется команда `grid off`.

Добавим сетку к графику параболы из рис. 1.5:

```
grid on;
```

В результате на графике отобразится сетка как показано на рис.1.6.

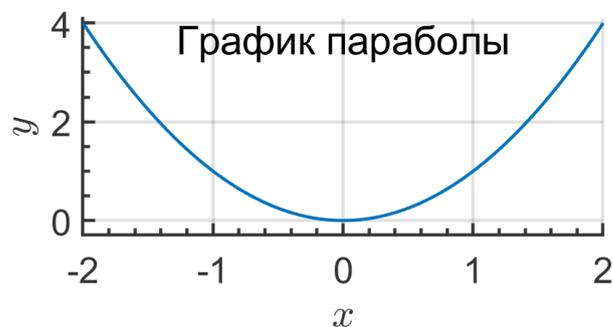


Рис. 1.6. Добавление сетки к графику

В MATLAB возможно добавление легенды к графику. Это может быть полезно при отображении нескольких графиков в одном окне. Для добавления легенды к графику используется команда `legend`.

Добавим легенду к графику параболы из рисунка 1.6, при этом будет использован режим интерпретации LaTeX:

```
legend('$ x^2 $','Interpreter','latex');
```

В результате на графике появится легенда как показано на рис. 1.7.

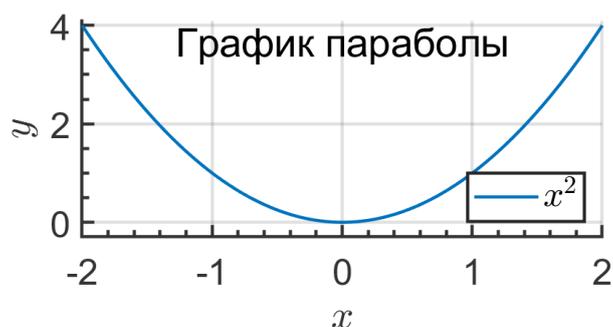


Рис. 1.7. Добавление легенды к графику

Функция `plot` может принимать дополнительные параметры: `plot(x,y,s)`. Строка `s` может содержать до трех символов (табл. 1.3), которые определяют цвет, стиль линии, а также вид точек графика.

Таблица 1.3

Управление функцией `plot`

Тип линии	
Непрерывная	-
Штриховая	--
Двойной пунктир	:
Штрихпунктирная	-.
Тип точки	
Точка	.
Плюс	+
Звездочка	*
Кружок	o
Цвет	
Голубой	c
Красный	r
Зеленый	g
Синий	b
Черный	k

**Функция `stem`**

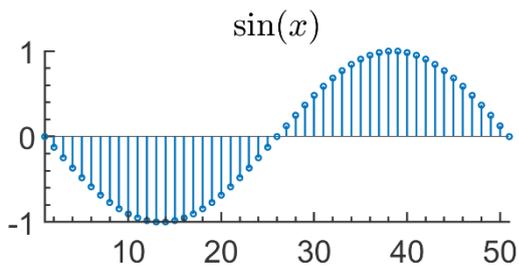
Функция `stem` предназначена для вывода графика элементов одномерного массива в виде вертикальных линий, которые заканчиваются в точках графика, помечаемых кружочком.

Функция `stem` имеет следующий синтаксис:

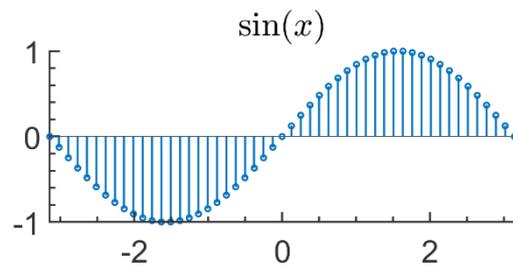
```
stem(y)
stem(x,y)
stem(x,y,s)
```

Первый вариант функции строит зависимость значений элементов массива от номера элемента, вторая зависимость –  $y(x)$ , а третья – аналогична второй, но позволяет задавать цвет и стиль линий с помощью строки `s`. Правила задания стиля линий аналогичны функции `plot`. Пример (рис. 1.8):

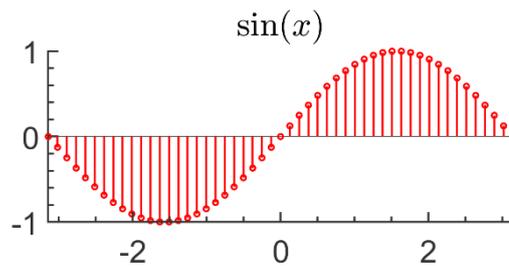
```
x = -pi:pi/25:pi
y = sin(x)
stem(y)           % Результат показан на рис. 1.8,а
stem(x, y)       % Результат показан на рис. 1.8,б
stem(x, y, 'r')  % Результат показан на рис. 1.8,в
```



*a*



*б*



*в*

Рис. 1.8. Демонстрация работы функции `stem`:

*a* – демонстрация работы команды `stem(y)`; *б* - демонстрация работы команды `stem(x, y)`; *в* – демонстрация работы команды `stem(x, y, 'r')`;

## Функция *figure*

Функция `figure` создает новое окно для вывода графика, т. е. дальнейший вывод графической информации будет осуществляться в данном окне, пока не встретится вызов следующей функции `figure`.

При вызове функции `figure` можно при помощи свойства `'Position'` регулировать форму области отображения графика. Ниже показан синтаксис, который используется для задания свойства `'Position'` у фигуры:

```
figure('Position',[X Y W H])
```

На рис. 1.9 объясняется смысл параметров `X`, `Y`, `W` и `H`. Видно, что `X` и `Y` задают положение в пикселях нижнего левого угла фигуры, относительно экранных координат, а `W` и `H` определяют ширину и высоту фигуры соответственно.

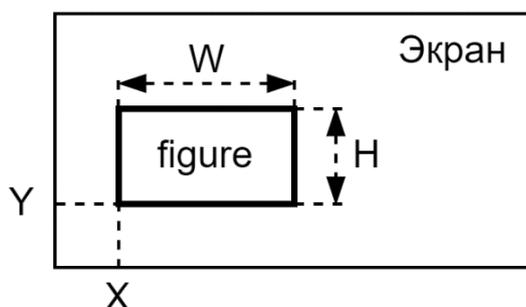


Рис. 1.9. Параметры свойства `'Position'` функции `figure`

## Функция *subplot*

Функция `subplot` предназначена для разбиения активного окна (`figure`) на области размером `m × n` и выбора активной области `p` для вывода графических данных. Функция `subplot` имеет следующий формат:

```
subplot(mnp);  
subplot(m,n,p);
```

где параметр `m` указывает, на сколько частей разбивается окно по вертикали, `n` — по горизонтали, `p` определяет номер области, в которую будут выводиться графические данные.

Если числа `n`, `m` и `p` находятся в диапазоне от 1 до 9, то они обычно пишутся слитно (первый вариант записи функции), в противном случае они разделяются

запятыми (второй вариант). Верхняя левая область имеет номер 1, правая нижняя –  $m \times n$ .

Например, команда `figure; subplot(321)` создаст в окне `figure` шесть областей для вывода графиков (как показано на рис. 1.10): три строки

(параметр  $m$ ), два столбца (параметр  $n$ ) и делает активной область с номером 1 (параметр  $p$ ). Для того, чтобы сделать активной область с номером два, необходимо выполнить команду `subplot(321)`.

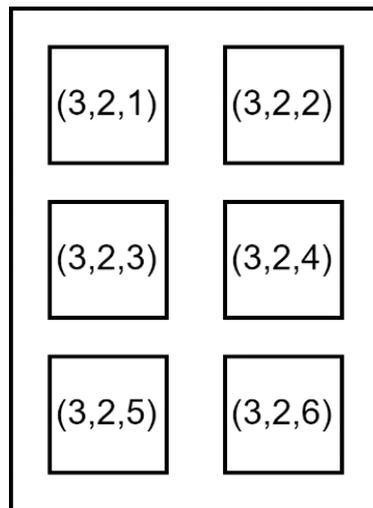


Рис. 1.10. Разбиение области вывода на шесть подобластей с использованием функции `subplot(3,2,1)`

Пример использования функции `subplot`:

```
n = 0:99
x = sin(0.3*n)
y = cos(0.4*n)
subplot(211)
plot(x)
subplot(212)
plot(y)
```

Данная программа разбивает окно вывода на две части по вертикали и выводит график  $x$  в верхней части, а график  $y$  – в нижней. Результат работы программы показан на рис. 1.11.

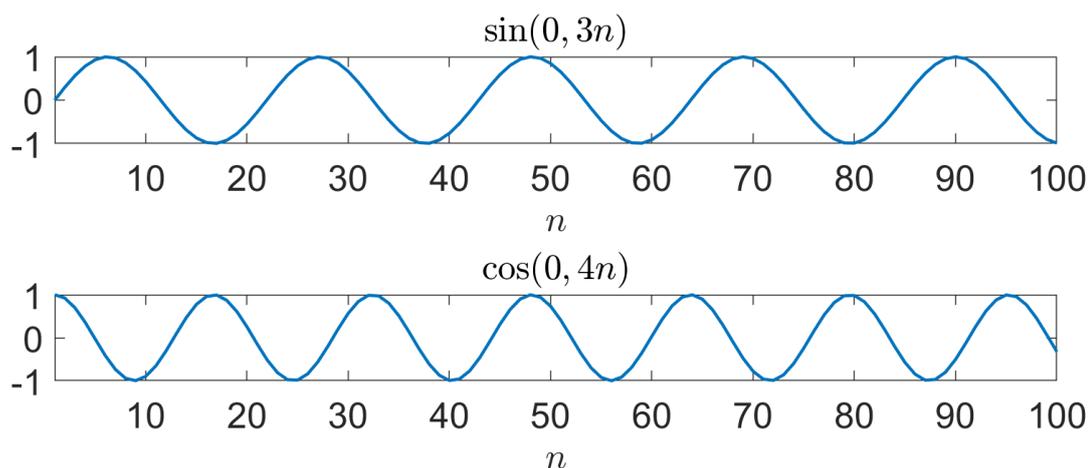


Рис. 1.11. Результат работы программы, демонстрирующей работу функции subplot

### ***Отображение нескольких графиков в одном окне***

Существует несколько методов для отображения двух и более графиков в одном окне. Например, данную задачу можно решить при помощи использования функции plot или команд удержания – hold on и hold off.

Для отображения двух и более графиков в одном окне при помощи функции plot необходимо ввести пары векторов непосредственно в команду plot.

Например, команда plot (x1,y1,x2,y2,x3,y3) генерирует три графика: y1 – функция от x1, y2 – функция от x2, y3 – функция от x3. При этом длина векторов из одной пары должна быть одинаковой.

При выводе в одном окне нескольких графиков MATLAB автоматически отображает их в разных цветах, чтобы графики можно было легче идентифицировать. Также существует возможность добавить спецификаторы линии после каждой пары. Например, команда

```
plot(x,y,'-k',a,b,':r',c,d,'-.b')
```

изображает график зависимости y от x сплошной черной линией, b от a – пунктирной красной линией, a d от c – штрихпунктирной синей линией.

Пример отображения графиков трех функций в одном окне при помощи функции plot:

```
x = -1.5:0.01:1.5;
y1 = x.^2;
y2 = abs(x);
y3 = sqrt(abs(x));
plot(x,y1, '-k',x,y2, ':r',x,y3, '-.b');
```

На рис. 1.12 показан результат выполнения приведенного кода.

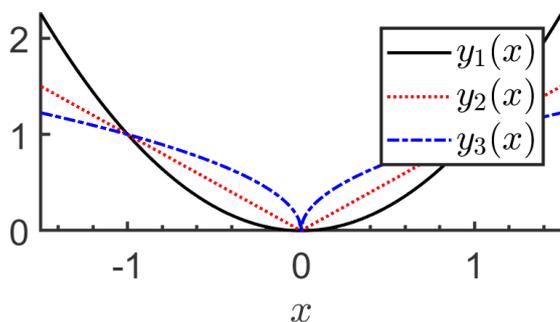


Рис. 1.12. Отображение нескольких графиков в одном окне вывода

Вторым методом отображения нескольких графиков в одном окне является использование команд удержания hold on и hold off. Команда hold on позволяет сохранить содержимое открытого окна figure. Команда hold off отключает функцию сохранения графической информации в текущем окне figure. Второй и последующие графики добавляются к предыдущим при помощи команд отображения графиков (stem, plot и т. д.). После применения команды hold off каждая новая команда отображения графика будет затирать предыдущий график.

Пример отображения графиков трех функций в одном окне при помощи команды hold on:

```
x = -1.5:0.01:1.5;
y1 = x.^2;
y2 = abs(x);
y3 = sqrt(abs(x));
figure;
hold on;
plot(x,y1, '-k');
plot(x,y2, ':r');
plot(x,y3, '-.b');
```

Результат выполнения данного кода показан на рис. 1.12.

### Базовые сигналы ЦОС: единичный скачок

Единичный скачок (рис. 1.13) описывается выражением:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

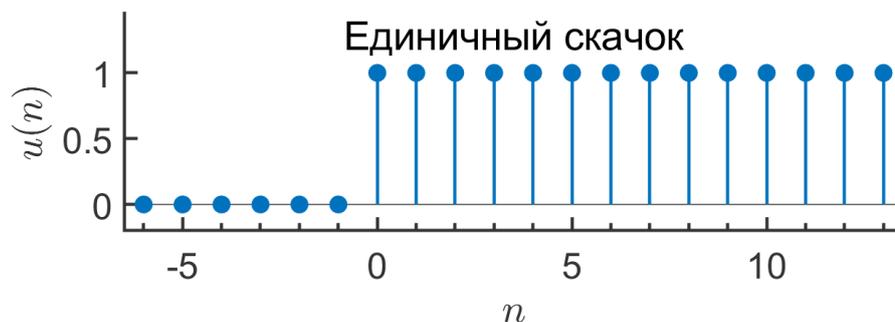


Рис. 1.13. Единичный скачок

Единичный скачок применяют для аналитического описания сигналов, которые начинаются в момент времени  $n = 0$ . Другими словами, если необходимо, чтобы сигнал имел нулевые значения для всех  $n < 0$ , то достаточно умножить его на единичный скачок  $u(n)$ . На рис. 1.14 показан пример такого использования единичного скачка.

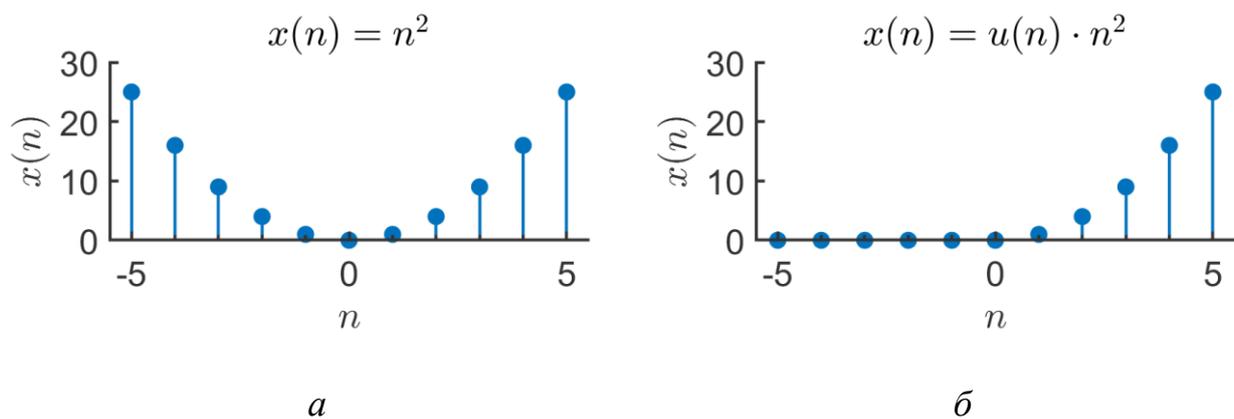


Рис. 1.14. Применение единичного скачка:

а – график дискретного сигнала  $x(n) = n^2$ ; б – результат применения единичного скачка  $u(n)$  для ограничения длительности  $x(n)$

Если из единичного скачка вычесть его сдвинутой версию, то можно сформировать импульс, который позволит выделить определенный временной интервал.

Так, например, сигнал

$$x(n) = u(n) - u(n - 21)$$

равняется единице в интервале  $0 \leq n \leq 20$  и нулю во всех остальных случаях (рис. 1.15).

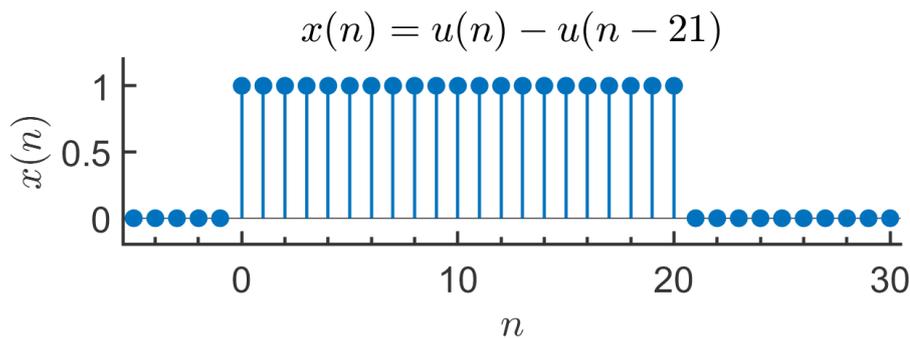


Рис. 1.15. Формирование импульса с использованием единичного скачка

### ***Единичный импульс (дельта-функция)***

Единичный импульс является базовым сигналом в цифровой обработке сигналов (рис. 1.16). Математически единичный импульс определяется как:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

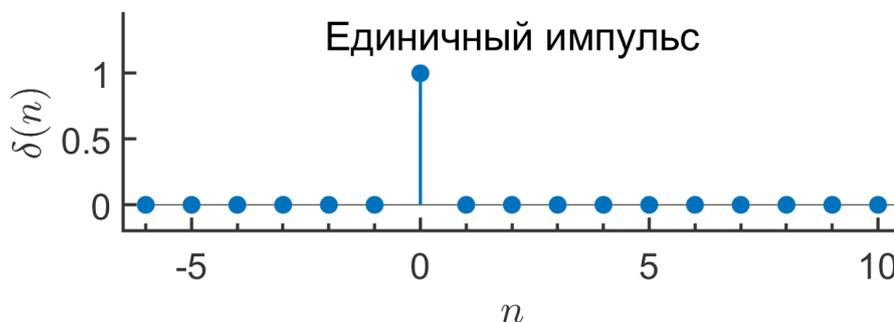


Рис. 1.16. Единичный импульс

Единичный импульс обладает несколькими важными свойствами:

1. Умножение на единичный импульс: если сигнал  $x(n)$  умножить на сдвинутый на  $m$  отсчетов единичный импульс, то в результате получится такой же единичный импульс, но имеющий амплитуду, совпадающую со значением сигнала  $x(n)$  в момент времени  $n = m$ , т.е.

$$x(n)\delta(n - m) = x(m)\delta(n - m). \quad (1.1)$$

2. Свойство просеивания: исходя из формулы (1.1) можно прийти к заключению, что любой дискретный сигнал можно записать как линейную комбинацию сдвинутых единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k), \quad (1.2)$$

где каждый член суммы  $x(k)\delta(n - k)$  является сдвинутым на  $k$  отсчетов единичным импульсом с амплитудой  $x(k)$ .

3. Взаимосвязь между  $\delta(n)$  и  $u(n)$ : единичный скачек выражается через единичный импульс следующим образом:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k), \quad (1.3)$$

В свою очередь единичный импульс можно выразить, как разницу между двумя единичными скачками:

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1). \quad (1.4)$$

### ***Синусоидальный сигнал***

Синусоидальные сигналы имеют важное значение в теории и применении ЦОС, поэтому мы уделим им особое внимание. Также на примере синусоидального сигнала удобно вводятся понятия, связанные с процессом дискретизации непрерывных или, как еще говорят, аналоговых сигналов.

Возьмем непрерывный синусоидальный сигнал с единичной амплитудой и нулевой фазой, который имеет частоту  $F$ :

$$x(t) = \sin(2\pi Ft). \quad (1.5)$$

Представим, что мы хотим получить дискретную версию этого сигнала. Дискретизация означает, что из всех значений  $x(t)$  мы оставляем лишь конечное множество.

Вместо непрерывного аргумента  $t$  появляется сетка дискретных значений:

$$t \rightarrow n\Delta T, \quad (1.6)$$

где  $n$  – номер отсчета, а  $\Delta T$  – шаг между двумя соседними отсчетами. Параметр  $\Delta T$  также называют интервалом дискретизации. На практике обычно указывают не сам интервал дискретизации, а величину обратную ему, – *частоту дискретизации*:

$$f_s = 1/\Delta T. \quad (1.7)$$

В англоязычной литературе параметр  $f_s$  называют *sampling rate* т. е. «скорость получения выборок». Этот термин лучше отражает сущность понятия, поскольку  $f_s$  показывает, сколько отсчетов образуется в результате дискретизации одной секунды непрерывного сигнала. Частота дискретизации звуковых сигналов как правило выбирается из ряда 8 кГц, 16 кГц, 32 кГц, 48 кГц.

Подставляя выражения (1.6) и (1.7) в (1.5) получаем:

$$x(n\Delta T) = \sin\left(2\pi \frac{F}{f_s} n\right). \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) неудобно тем, что аргументом является вещественное число  $n\Delta T$ , поэтому, в качестве аргумента используют индекс  $n$ , а значение  $\Delta T$  опускают. Таким образом, дискретный сигнал – это индексированная последовательность чисел  $x(n)$ . Такой подход удобен для практической реализации систем цифровой обработки сигналов, поскольку сигнал можно представлять в виде простого массива чисел. Единственное, что надо помнить, для корректного отоб-

ражения и восстановления сигнала  $x(t)$  по его дискретным отсчетам  $x(n)$  значение интервала дискретизации  $\Delta T$  (или частоты дискретизации  $f_s$ ) критически важно поскольку сама по себе последовательность  $x(n)$  не говорит о том, какое именно физическое время разделяет два ее соседних отсчета. В итоге дискретная синусоида записывается, как

$$x(n) = \sin\left(2\pi \frac{F}{f_s} n\right).$$

Согласно критерию Найквиста, частота дискретизации синусоиды должна быть как минимум в два раза больше частоты синусоиды, т. е.

$$f_s \geq 2F. \quad (1.9)$$

Поэтому дискретную синусоиду обычно записывают в виде

$$x(n) = \sin(2\pi f n), \quad (1.10)$$

где  $f = F/f_s$  – *нормированная частота сигнала*. Учитывая критерий Найквиста, нормированная частота должна находиться в диапазоне от 0 до 0,5.

Иногда дискретную синусоиду записывают с используя нормированную круговую частоту  $\omega = 2\pi f$ , поскольку в этом случае выражение носит более простой характер

$$x(n) = \sin(\omega n). \quad (1.11)$$

В общем случае у дискретной синусоиды помимо параметра частоты  $f$  есть параметр амплитуды  $A$  и фазы  $\varphi$ :

$$x(n) = A \sin(2\pi f n + \varphi). \quad (1.12)$$

Приведем несколько примеров дискретизации сигнала. Предположим, что мы дискретизируем синусоиду из формулы (1.5) с частотой  $f_0 = 0,5$  Гц.

Если установить частоту дискретизации равной  $f_s = 8$  Гц, получим дискретный сигнал

$$x(n) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) = \sin\left(2\pi \frac{0,5}{8} n\right) = \sin(2\pi \cdot 0,0625 \cdot n),$$

который показан на рис. 1.17.

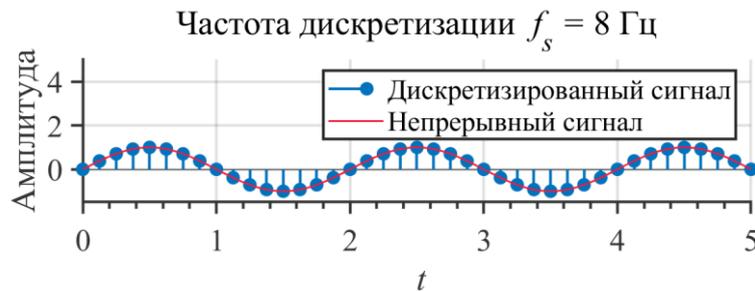


Рис. 1.17. Дискретная синусоида (0,5 Гц) с частотой дискретизации  $f_s = 8$  Гц

Если для той же синусоиды с частотой 0,5 Гц применить частоту дискретизации  $f_s = 2$  Гц, то получим уже другое дискретное описание сигнала

$$x(n) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) = \sin\left(2\pi \frac{0,5}{2} n\right) = \sin(2\pi \cdot 0,25 \cdot n),$$

которое представлено на рис. 1.18.

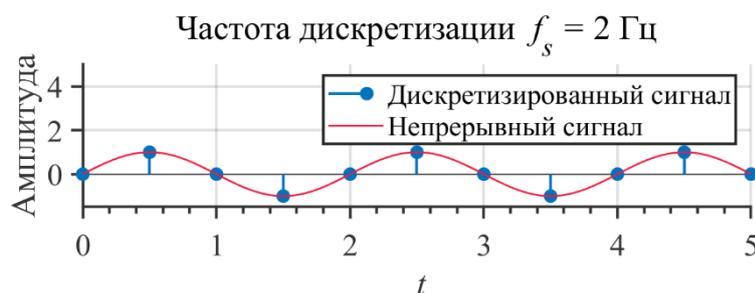


Рис. 1.18. Дискретная синусоида (0,5 Гц) с частотой дискретизации  $f_s = 2$  Гц

Если же выполнить дискретизацию рассматриваемой синусоиды с частотой  $f_s = 0,6$  Гц, то получим сигнал, показанный на рис. 1.199. Из полученного графика видно, что дискретный сигнал имеет частоту, которая отличается от частоты исходного непрерывного сигнала. Это произошло, поскольку критерий Найквиста (1.9) в данном случае не был выполнен.

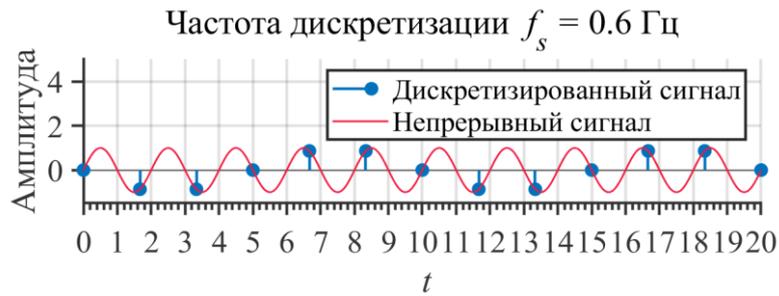


Рис. 1.19. Дискретная синусоида (0,5 Гц) с частотой дискретизации  $f_s = 0,6$  Гц

### *Комплексная экспонента*

В природе многие явления описываются экспоненциальными зависимостями, поэтому и в ЦОС экспоненты имеют важное значение. Дискретная комплексная экспонента определяется выражением

$$x(n) = z^n, \quad (1.13)$$

где  $z \in \mathbb{C}$ . Представим число  $z$  в полярной системе координат

$$z = re^{j\omega},$$

где  $|z| = r$ ,  $\arg z = \omega$ ,  $j^2 = -1$ .

В этом случае комплексную экспоненту (1.13) можно записать как:

$$x(n) = z^n = (re^{j\omega})^n = r^n e^{j\omega n} = r^n (\cos \omega n + j \sin \omega n).$$

Для получения последнего выражения использовалась формула Эйлера:

$$e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n. \quad (1.14)$$

Частными случаями дискретной комплексной экспоненты  $z^n$  являются следующие четыре функции:

1. Константная функция при  $z = 1e^{j0}$ :

$$x(n) = k1^n = k;$$

2. Вещественная экспонента при  $z = re^{j0}$ :

$$x(n) = r^n \quad (1.15)$$

3. Синусоида при  $z = 1e^{j\omega}$ :

$$\begin{aligned} x(n) &= \operatorname{Re}\{z^n\} = \operatorname{Re}\{1^n e^{j\omega n}\} = \cos \omega n, \\ x(n) &= \operatorname{Im}\{z^n\} = \operatorname{Im}\{1^n e^{j\omega n}\} = \sin \omega n; \end{aligned} \quad (1.16)$$

4. Затухающая/возрастающая синусоида при  $z = re^{j\omega}$ :

$$\begin{aligned} x(n) &= \operatorname{Re}\{z^n\} = \operatorname{Re}\{r^n e^{j\omega n}\} = r^n \cos \omega n, \\ x(n) &= \operatorname{Im}\{z^n\} = \operatorname{Im}\{r^n e^{j\omega n}\} = r^n \sin \omega n. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для иллюстрации выражений (1.15)–(1.17) на рис. 1.20 и рис. 1.21 показаны различные варианты графиков комплексных экспонент. Можно видеть, что характер графика определяется значением модуля основания экспоненты  $|z|$ . При  $|z| < 1$  (рис. 1.20, а–б) последовательность имеет затухающий характер. При  $|z| = 1$  сигнал не затухает и не возрастает, а остается стабильным во времени. При  $|z| > 1$  сигнал возрастает. Также можно видеть, что если  $z$  является комплексным значением, т. е. имеет и действительную и мнимую части, то результирующая последовательность  $z^n$  имеет колебательный характер.

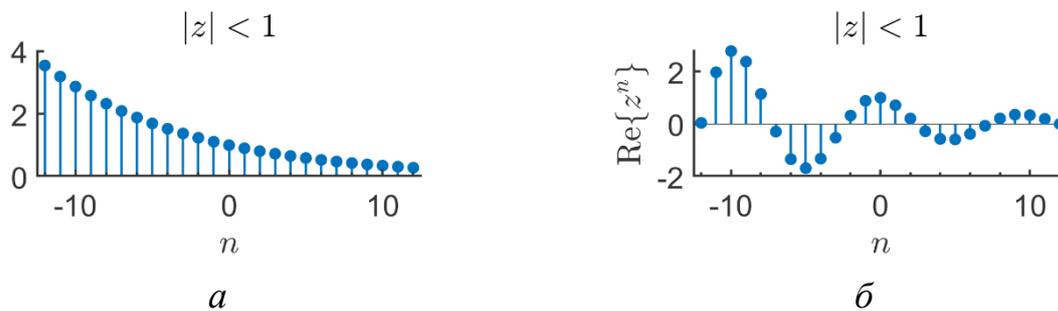


Рис. 1.20. График комплексных экспонент  $z^n$ :  
 $a - z = 0,9$ ;  $б - z = 0,9e^{j\pi 0,2}$ ;

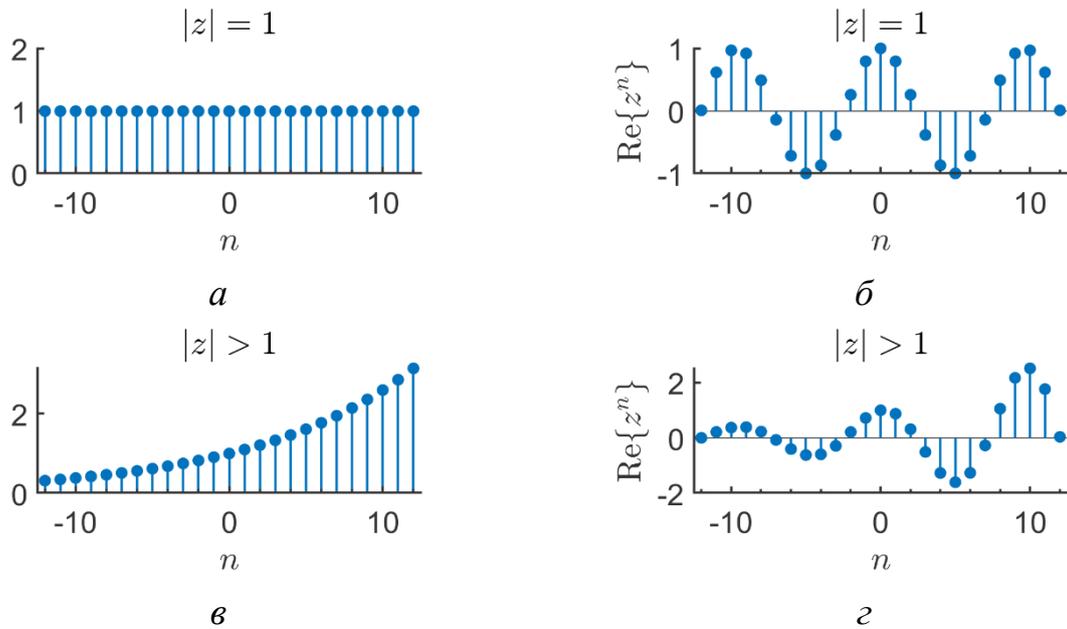


Рис. 1.21. График комплексных экспонент  $z^n$ :

$$\begin{aligned}
 a - z &= 1; \quad б - z = e^{j\pi/2}; \\
 в - z &= 1,1; \quad г - z = 1,1e^{j\pi/2}
 \end{aligned}$$

На рис. 1.22 показан трехмерный график комплексной экспоненты (1.13) для случая  $z = e^{j3\pi/50}$ . По оси  $x$  откладывается номер отсчета  $n$ , по оси  $y$  – действительная часть сигнала  $\text{Re}\{x(n)\}$ , а по оси  $z$  – мнимая часть сигнала  $\text{Im}\{x(n)\}$ .

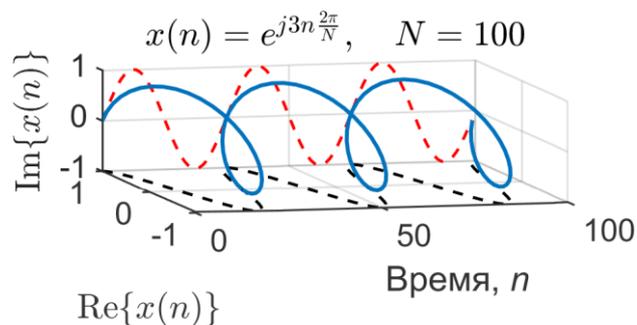


Рис. 1.22. График комплексной экспоненты с частотой  $\omega = 3\pi/50$

В соответствии с формулой (1.16) проекция комплексной экспоненты на плоскость  $xu$  представляет из себя функцию косинус. Проекцией на плоскость  $xz$  является синус, а проекцией комплексной экспоненты на плоскость  $yz$  будет единичная окружность.

Фундаментальную значимость для ЦОС также представляет то, что функции синус и косинус могут быть представлены как линейные комбинации ком-

плексных экспонент. Покажем это, взяв за основу формулу Эйлера (1.14). Вначале посмотрим, что произойдет, если мы изменим знак аргумента экспоненты (1.14):

$$e^{-j\omega n} = \cos(-\omega n) + j \sin(-\omega n). \quad (1.18)$$

Учитывая то, что косинус – четная функция, а синус – нечетная, мы можем переписать формулу (1.18) в следующем виде:

$$e^{-j\omega n} = \cos(\omega n) - j \sin(\omega n). \quad (1.19)$$

Теперь если мы сложим формулы (1.14) и (1.19), то получим, что

$$\cos(\omega n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}). \quad (1.20)$$

Аналогично, если найти разность формул (1.14) и (1.19), то легко установить, что

$$\sin(\omega n) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}). \quad (1.21)$$

Еще раз отметим, что переменная  $n$  в приведенных формулах принимает только целые значения. Это подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных комплексных экспонент. Разницу можно увидеть, если рассмотреть комплексную экспоненту (1.13), у которой  $|z| = 1$ , а частота равна  $\omega + 2\pi$ :

$$x(n) = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = e^{j\omega n}.$$

Так, что при рассмотрении дискретных экспонент мы должны ограничиться частотами в интервале от 0 до  $2\pi$ .

## ***Периодические дискретные сигналы***

Важным классом дискретных сигналов являются периодические последовательности. Дискретный сигнал считается периодическим, только если существует целое число  $N \neq 0$  такое, что

$$x(n) = x(n + N), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.22)$$

где  $N$  – период (обязательно целый).

Если сигнал имеет период  $N$ , то его периодом также будет и значение  $2N$ ,  $3N$  и любое значение  $kN$ , где  $k$  – целое число. **Основным периодом** называется наименьшее значение  $N_0$ , удовлетворяющее условию (1.22).

Используя определение (1.22) мы можем определить период  $N$  дискретной синусоиды (1.11):

$$\sin(\omega n) = \sin(\omega(n + N)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

Равенство (1.23) выполняется только если существует  $k \in \mathbb{N}$  такое, что  $\omega N = 2\pi k$ . Основным периодом дискретной синусоиды тогда определяется выражением:

$$N_0 = \min_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ (\frac{2\pi k}{\omega}) \in \mathbb{N}}} \left\{ \frac{2\pi}{\omega} k \right\}. \quad (1.24)$$

## ***Генерирование периодических сигналов***

Предположим, что необходимо сгенерировать периодический сигнал общего вида. Пусть также задан закон изменения сигнала в пределах одного периода  $S_b(\alpha)$ , где  $\alpha$  – фазовое значение, находящееся в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Для примера рассмотрим «смещенный» синус:

$$S_b(\alpha) = \begin{cases} 0,5 \left( 1 - \cos \left( \frac{1+r}{2} \alpha \right) \right), & 0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{1+r}, \\ 0,5 \left( 1 - \cos \left( \frac{1+r}{2r} \alpha + \frac{r-1}{r} \pi \right) \right), & \frac{2\pi}{1+r} \leq \alpha < 2\pi, \end{cases} \quad (1.25)$$

Степень «смещенности» синуса определяется параметром  $r$ . При  $r = 1$  получается чистый синус. Обратите внимание, что если в качестве аргумента в  $S_b(\alpha)$  попадет  $\alpha > 2\pi$ , то необходимо вычесть из него  $2\pi$  и только затем произвести вычисление по формуле (1.25). В случае, если после первого вычитания окажется, что  $\alpha$  все ещё больше  $2\pi$  вычитание следует повторить. И так до тех пор, пока  $\alpha$  не попадет в диапазон  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

Допустим, что у нас стоит задача сгенерировать сигнал с частотой дискретизации  $f_s$ , частотой основного тона  $f_0$  и длительностью  $T$ .

Получим вначале выражения для непрерывной версии сигнала

$$S(t) = S_b(2\pi f_0 t), \quad t \in [0; T]. \quad (1.26)$$

Дискретизация сигнала определяется заменой (1.6), следовательно, дискретная версия смещенного синусоидального сигнала рассчитывается как

$$S(n) = S_b\left(\frac{2\pi f_0}{f_s} n\right), \quad n = 0, 1, \dots, \frac{T}{f_s} - 1. \quad (1.27)$$

### ***Генерирование частотно-модулированного (ЧМ) сигнала***

Частота сигнала не обязательно должна оставаться постоянной на протяжении всего временного интервала. Сигналы, которые имеют периодическую природу, но у которых во времени происходит изменение их частоты, называются – ***частотно-модулированными (ЧМ)***.

Параметрами (ЧМ) сигнала являются:  $f_m$  – частота модуляции (Гц);  $k_f$  – индекс модуляции;  $T$  – длительность сигнала в секундах. Начнем с того, что опишем непрерывную версию сигнала:

$$S(t) = S_b(\alpha(t)), \quad t \in [0; T], \quad (1.28)$$

где

$$\alpha(t) = 2\pi \int_0^t \phi(\tau) d\tau, \quad (1.29)$$

$$\phi(t) = f_0(1 + k_f \cos(2\pi f_m t)). \quad (1.30)$$

Выполним дискретизацию (1.6) модели сигнала (1.28) путем замены, при этом интеграл заменим на сумму:

$$S(n) = S_b(\alpha(n)), \quad (1.31)$$

$$\alpha(n) = 2\pi \sum_{m=0}^n \frac{f_0}{f_s} \left( 1 + k_f \cos\left(\frac{2\pi f_m}{f_s} m\right) \right). \quad (1.32)$$

Заметьте, что если  $k_f = 0$ , то  $\alpha(n) = \frac{2\pi f_0}{f_s} n$ , т. е. формула (1.32) повторяет формулу (1.27).

### **Генерирование амплитудно-модулированного (АМ) сигнала**

Помимо частоты во времени может изменяться и амплитуда сигнала. Такие сигналы называются – **амплитудно-моделированными (АМ)**. Параметрами АМ-сигнала являются:  $f_{am}$  – частота модуляции (Гц);  $k_a$  – индекс модуляции.

Для генерирования АМ-сигнала используется выражение:

$$s_{AM}(n) = S_b(n) \cdot \left( 1 + k_a \cos\left(\frac{2\pi f_{am}}{f_s} n\right) \right). \quad (1.33)$$

В выражении (1.33) в качестве  $S_b(n)$  может использоваться как обычный периодический сигнал (1.27), так и ЧМ-сигнал (1.31).

## **1.2. Порядок выполнения работы**

### **Задание 1 (письменное)**

#### *Вариант 1*

Определите являются ли периодическими сигналы:

а)  $x_1(n) = \cos(n^2)$ ;

б)  $x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ .

В случае положительного ответа определите период сигнала.

#### *Вариант 2*

Упростите выражение  $(u(n) + (-1)^n u(n)) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ . Постройте график, соответствующий данному выражению.

*Вариант 3*

Пусть  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n)$ . Изобразите график сигнала  $x(\langle n \rangle_5)$ .

*Вариант 4*

Пусть  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n)$ . Изобразите график сигнала  $x(\langle n - 2 \rangle_4)$ .

*Вариант 5*

Определите являются ли периодическими сигналы:

а)  $x_1(n) = \cos(\sqrt{2}\pi n + 1,2)$ ;

б)  $x_2(n) = e^{j\frac{22}{7}n}$ .

В случае положительного ответа определите период сигнала.

*Варианты 6 - 8*

Для сигналов, показанных на рис.1.23–1.25, найдите два различных аналитических выражения, которые были верными для всех  $n$ . Для описания сигнала можно использовать только единичный скачок  $u(n)$  и единичный импульс  $\delta(n)$ .

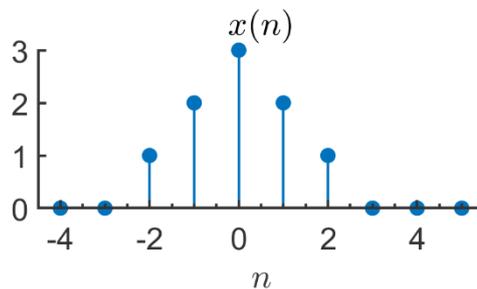


Рис. 1.23. Дискретный сигнал из задания 1 (вариант 6)

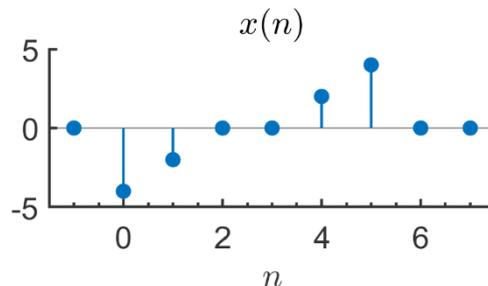


Рис. 1.24. Дискретный сигнал из задания 1 (вариант 7)

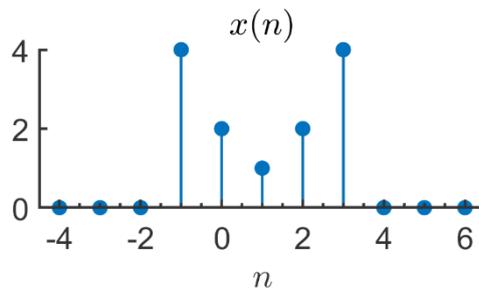


Рис. 1.25. Дискретный сигнал из задания 1 (вариант 8)

### Задание 2

Построить график дискретного синусоидального сигнала с периодом  $N = 8 \times n_0$ , где  $n_0$  – номер варианта.

### Задание 3

Построить график дискретной непериодической синусоидальной последовательности (частоту  $\omega_0$  выберите самостоятельно).

### Задание 4

Сформируйте и постройте графики единичного импульса и единичного скачка:

$$y(n) = \delta(n - n_0),$$

$$y(n) = u(n - n_0),$$

где  $n_0$  – номер варианта.

Для выполнения задания напишите в MATLAB функции `delta(n)` и `unit_step(n)` для расчета единичного импульса и единичного скачка соответственно.

### Задание 5

Напишите функцию для формирования синусоиды, получаемой в результате дискретизации с частотой  $f_s$  непрерывной синусоиды:

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

где  $A$  – амплитуда;  $f_0$  – частота синусоиды;  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Функция должна иметь шесть входных аргументов:  $A, f, \varphi_0, F_s, t_0$  – начальное время,  $t_1$  – конечное. Выходными параметрами функции должны быть временные отметки (моменты времени, в которые выполняется дискретизация синусоиды) и значения синусоиды в эти моменты.

Сформируйте синусоиду дискретного времени дискретизацией синусоиды непрерывного времени со следующими параметрами (табл. 1.4):

Таблица 1.4

Числовые значения параметров для формирования синусоид дискретного времени

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_0$ , кГц	0,9	1	3,0	1,2	4,0	1,5	0,44	0,675
$\varphi_0$	$\pi / 10$	$\pi / 6$	$\pi / 11$	$\pi / 8$	$\pi / 2$	$-\pi$	$\pi / 4$	$3\pi / 4$
$f_s$ , кГц	8	16	11,25	16	22,5	32	44,1	48
$t_0$ , с	0	-1	-2	0	-1	-2	2	-0,5
$t_1$ , с	4	3	1	5	3	2	4	5

### Задание 6

Напишите функцию MATLAB для формирования комплексной экспоненты (1.13), которая имеет сигнатуру  $x = \text{sr1x\_exp}(z, n)$ , где  $z$  – скалярное значение, а  $n$  – вектор целочисленных значений (номера отсчетов). Используйте эту функцию для формирования сигнала вида

$$x(n) = r^n e^{j\omega n}$$

Параметры  $r$  и  $\omega$  выбираются в соответствии с вариантом (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Параметры комплексных экспонент

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
$r$	0,89	0,9	0,94	0,95	0,97	0,99	0,87	0,85
$\omega$	$\pi / 10$	$2\pi / 7$	$3\pi / 11$	$5\pi / 13$	$11\pi / 3$	$17\pi / 4$	$13\pi / 4$	$7\pi / 17$

Постройте график действительной и мнимой части для  $n = 0 \dots 100$ . Как сказывается изменение  $\theta$ ? Постройте график, откладывая по оси ординат действительную часть, а по оси абсцисс – мнимую (должна получиться спираль). Поэкспериментируйте с углом  $\theta$  для получения спиралей различного вида. Используя функцию `plot3` постройте трехмерный графики комплексной экспоненты.

### Задание 7

Сформируйте и постройте графики следующих последовательностей используя выражения (1.16)–(1.17):

$$x_1(n) = \sin(\omega_1 n), \quad n = 0 \dots 25,$$

$$x_2(n) = \cos(\omega_1 n), \quad n = -15 \dots 25,$$

$$x_3(n) = a^n \sin(\omega_2 n), \quad n = -20 \dots 0,$$

$$x_4(n) = b^n \cos(\omega_2 n), \quad n = 0 \dots 50.$$

Значения параметров  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $a$ ,  $b$  выберите из табл. 1.6.

Таблица 1.6

Значения параметров  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $a$ ,  $b$

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega_1$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/\sqrt{7}$	$\pi/8$	$\pi/13$	$\pi/15$	$2\pi/7$
$\omega_2$	$\pi/4$	$\pi/9$	$\pi/16$	$\pi/6$	$\pi/\sqrt{11}$	$\pi/3$	$\pi/5$	$\pi/\sqrt{13}$
$a$	1,1	1,15	1,4	1,3	1,2	1,05	1,05	1,5
$b$	0,89	0,9	0,94	0,95	0,97	0,99	0,98	0,96

#### 1.3. Дополнительные задания

1. Сгенерируйте три периода «смещенного» синусоидального сигнала (1.25) для значений параметра  $r = 0,2$  и  $r = 0,8$  и отобразите их на одном графике.

2. Сгенерируйте АМ-сигнал (1.33) с параметрами  $f_s = 16$  кГц,  $f_{am} = 2$  Гц,  $k_a = 0,5$ , длительностью 2 секунды. В качестве  $S_b(n)$  возьмите «смещенную» синусоиду (1.25) с параметром  $r = 0,4$ . Сохраните полученный сигнал при помощи команды

```
audiowrite('am_skew_sin.wav', x, fs);
```

Как изменится звучание сигнала, если установить значение параметре  $k_a = 0$ ?

3. Сгенерируйте в MATLAB wav-файл ( $f_s = 16$  кГц), который содержит последовательность из 9 синусоидальных сигналов с частотами 659, 622, 659, 622, 494, 587, 523 и 440 Гц. Длительность каждого сигнала 0,5 секунды. Сохраните полученный сигнал при помощи команды `audiowrite()`. Продемонстрируйте сгенерированный сигнал преподавателю.

4. Напишите MATLAB-функцию для формирования односторонней затухающей экспоненты

$$x(n) = a^n u(n).$$

где  $|a| < 1$ ,  $u(n)$  – единичный скачок.

Постройте график этой функции для  $n = -10, \dots, 20$ .

5. Определите являются ли периодическими сигналы:

$$x_1(n) = \cos\left(\frac{12\pi}{5}n\right),$$

$$x_2(n) = 10 \sin\left(\left(\frac{7\pi}{12}\right)n + \sqrt{2}\right),$$

$$x_3(n) = 2 \cos(0,02n + 3).$$

В случае положительного ответа определите основной период сигнала.

6. Постройте графики сигналов из дополнительного задания 5 и отобразите их на одной фигуре. Задайте для каждого графика свой цвет и тип линии.

7. Изобразите графики следующих дискретных сигналов:

$$x_1(n) = 2\delta(n + 3) + 4\delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \delta(n - 3),$$

$$x_2(n) = u(n - 2) - u(n - 6),$$

$$x_3(n) = n(u(n) - u(n - 7)).$$

8. Пусть задан сигнал

$$x(n) = n(u(n) - u(n - 5)), \quad n = 0, 1, \dots, 7.$$

Найдите и изобразите сигнал  $y(n) = x(\langle -n - 2 \rangle_8)$ .

9. Для сигнала  $x(n)$  показанного на рис. 1.26 изобразите графики следующих сигналов:

- а)  $x(-n)$ ;
- б)  $x(n + 6)$ ;
- в)  $x(3 - n)$ .

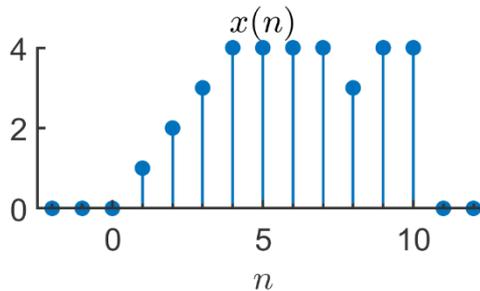


Рис. 1.26– Дискретный сигнал

10. Пусть задан сигнал вида:

$$x(n) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 3, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k < 9, \\ 0, & k \geq 9. \end{cases}$$

Запишите сигнал  $x(n)$  аналитически, используя сигналы  $\delta(n)$  и  $u(n)$ .

11. Выполняется дискретизация сигнала с частотой дискретизации  $F_s = 4000$  Гц.

$$x(t) = 10\cos(2000\pi t) + \sqrt{2}\sin(300\pi t) + 2\cos\left(5000\pi t + \frac{\pi}{4}\right),$$

Найдите результирующий дискретный сигнал  $x(n)$ .

12. Пусть непрерывный периодический сигнал с периодом 1 мс имеет вид:

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j\left(\frac{2\pi kt}{10^{-3}}\right)}.$$

В результате дискретизации сигнала  $x_c(t)$  с шагом  $T = \frac{1}{6} 10^{-3}$  получается последовательность  $x(n) = x_c(nT)$ . Является ли последовательность  $x(n)$  периодической и, если да, то каков её период?

13. Изобразите следующие сигналы:

а)  $u(n - 2) - u(n - 6)$ ;

б)  $n(u(n) - u(n - 7))$ ;

в)  $(n - 2)(u(n - 2) - u(n - 6))$ .

14. После дискретизации непрерывного сигнала  $\cos(100\pi t)$  был получен дискретный сигнал  $\cos(\pi n)$ . Найдите частоту дискретизации  $F_s$ . Является ли это значение единственно возможным? Поясните свой ответ.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Цель работы – изучение способов описания дискретных систем при помощи пакета MATLAB.

### 2.1. Теоретические сведения

#### *Дискретная система*

С математической точки зрения система с дискретным временем определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность  $x(n)$  в выходную последовательность  $y(n)$  отклик (или реакцию) системы, что можно обозначить как

$$y(n) = T\{x(n)\}. \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на её вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет с индексом  $n$  может зависеть от всех отсчетов входного сигнала  $x(n)$ . Рассмотрим далее какие базовые операции над сигналами выполняются в дискретных системах.

#### *Временной сдвиг*

Версия сигнала  $x(n)$ , которая сдвинута на целое число отсчетов  $k$  будет формироваться как

$$y(n) = x(n - k).$$

Если  $k$  положительное, то сигнал  $y(n)$  сдвинут вправо относительно  $x(n)$ , т. е.  $y(n)$  является задержанной версией  $x(n)$ . Если  $k$  отрицательное, то сигнал  $y(n)$  сдвигается влево относительно  $x(n)$ , т. е.  $y(n)$  является опережающей версией  $x(n)$ . На рис. 2.1 приведены примеры временного сдвига сигнала.

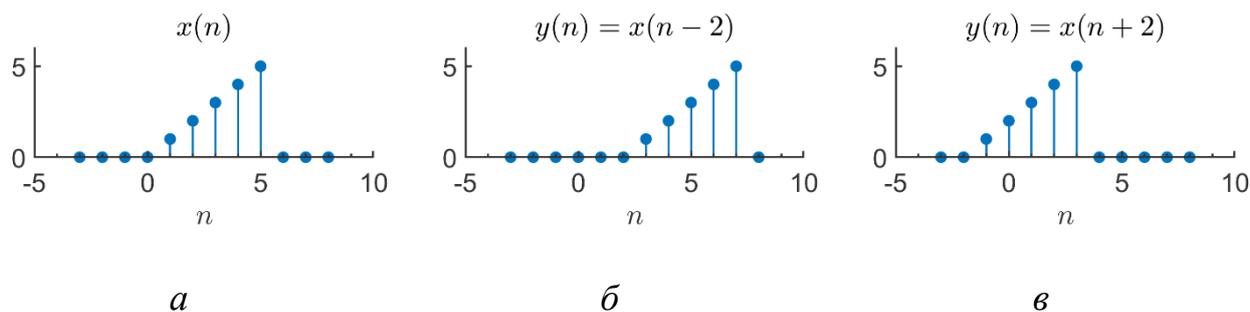


Рис. 2.1. Дискретный сигналы  $x(n)$  :  
*a* – исходный вид; *б* – задержанная версия на 3 отсчета;  
*в* – опережающая на 3 отсчета версия

Введем понятие единичного оператора задержки  $D$ . Действие данного оператора описывается выражением

$$D\{x(n)\} = x(n - 1).$$

Повторное применение оператора задержки обозначается как  $D(D) = D^2$  и приводит к следующему действию:

$$D^2\{x(n)\} = x(n - 2).$$

При обозначении операции временного сдвига на блок-схеме дискретной системы используют один из двух способов, показанных на рис. 2.2.



Рис. 2.2. Варианты обозначения операции временного сдвига

### ***Масштабирование***

Операция масштабирования заключается в умножении сигнала на константу  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

$$y(n) = \alpha x(n).$$

Если  $\alpha$  представляет собой действительное число, то масштабирование является обычным усилением (при  $|\alpha| > 1$ ) или ослаблением (при  $|\alpha| < 1$ ).

На рис. 2.3 приведено условное графическое обозначение операции масштабирования, используемое при описании блок-схем дискретных систем.

$$x(n) \xrightarrow{\alpha} y(n) = \alpha x(n)$$

Рис. 2.3 Обозначение на блок схеме операции масштабирования

### Суммирование и произведение

Сумма двух последовательностей  $x(n)$  и  $w(n)$  определяется путем *поэлементной* операции суммирования:

$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Аналогично определяется произведение двух последовательностей:

$$y(n) = x(n)w(n).$$

Обозначение операций суммирования и умножения, используемое при описании блок-схем дискретных систем приведено на рис. 2.4.

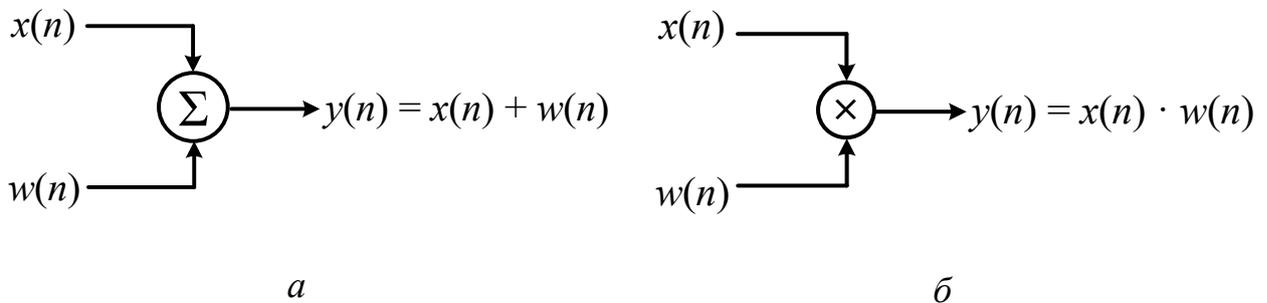


Рис. 2.4. Обозначение на блок схеме операций:  
*a* – сложения; *б* – масштабирования

В качестве примера рассмотрим два сигнала:  $x(n)$  – дискретная синусоида, и  $w(n)$  – прямоугольный импульс. Их графики показаны на рис. 2.5, *a* и *б*.

Если сигналы  $x(n)$  и  $w(n)$  пропустить через блок сложения, то результирующий сигнал будет таким, как показано на рис. 2.5, *в*. Если же эти два сигнала пропустить через блок умножения, то в результате получим сигнал, который по-

казан на рис. 2.5, *г*. Операцию сложения чаще всего используют для моделирования ситуаций, когда одновременно на приемник поступает сигнал из двух источников. Например, когда на микрофон попадает полезный сигнал и шум. Получаемая модель сигнала в этом случае называется **аддитивной**. Умножение сигналов чаще всего используют для того, чтобы ограничить длительность сигнала. Так, в приведенном примере на рис. 2.5, *г* мы ограничили длительность дискретного синуса интервалом  $n \in [10, 20]$ .

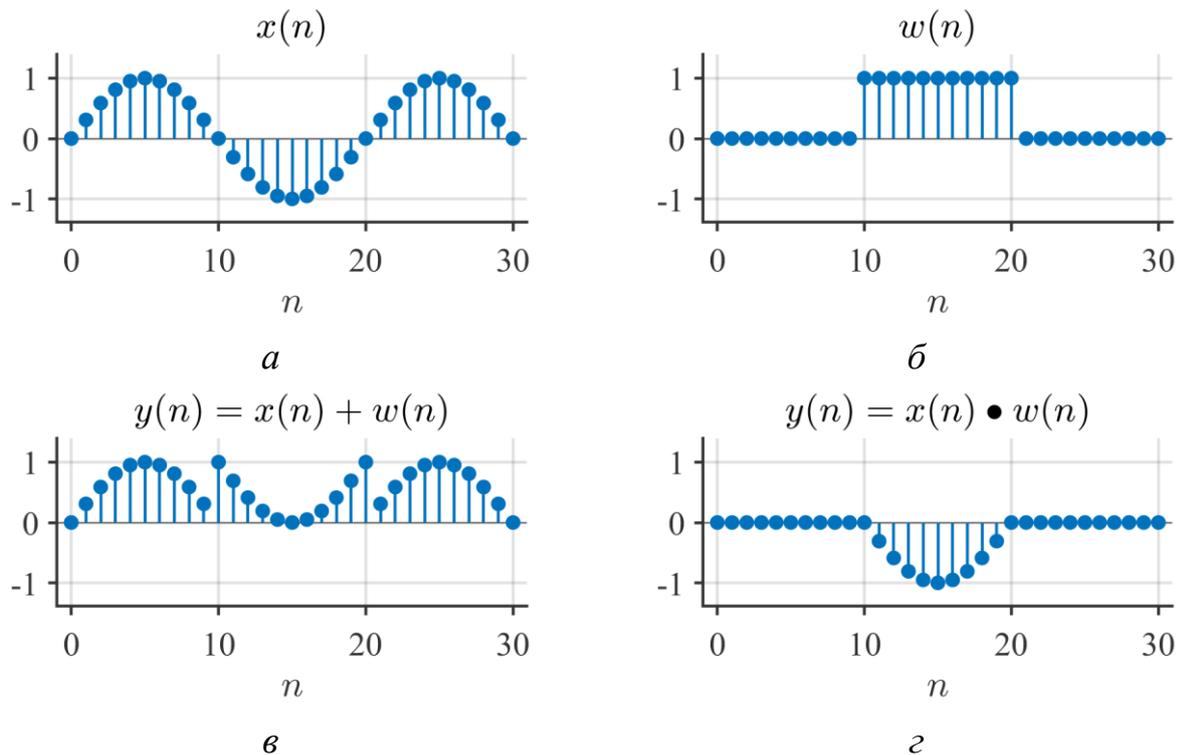


Рис. 2.5. Операции над сигналами:

*a* – сигнал  $x(n)$ ; *б* – сигнал  $w(n)$ ; *в* – результат сложения сигналов  $x(n)$  и  $w(n)$ ;  
*г* – результат произведения сигналов  $x(n)$  и  $w(n)$

### **Свойства дискретных систем: аддитивность**

Под аддитивностью понимается суперпозиция причин и результатов. Так, если причина « $x_1$ » вызывает результат « $y_1$ » и если причина « $x_2$ » вызывает результат « $y_2$ », то суперпозиция причин и результатов означает, что причина « $x_1 + x_2$ » вызовет результат « $y_1 + y_2$ ».

Система называется *аддитивной* если условие

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

выполняется для любых сигналов  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ .

### ***Однородность***

Под однородностью понимается наличие пропорциональности между входным и выходным сигналами. Система называется *однородной*, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

т. е. для любого комплексного числа  $c$  реакция системы на входной сигнал  $cx(n)$  в  $c$  раз больше реакции системы на входной сигнал  $x(n)$ .

### ***Линейность***

Линейной системой называется такая, которая обладает одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\}. \quad (2.2)$$

Иногда говорят, что линейная система отвечает принципу *суперпозиции*.

### ***Стационарность***

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входного сигнала приводит к появлению такого же сдвига выходного сигнала. Более формально, если  $y(n) = T\{x(n)\}$ , то для стационарной системы справедливо, что

$$T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0). \quad (2.3)$$

Стационарные системы еще называют *инвариантными относительно сдвига*.

### ***Линейный стационарные системы (ЛС-системы)***

ЛС-системы представляют собой особо распространенный класс систем. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов.

Обозначим, через  $h(n)$  – реакцию системы на единичный импульс  $\delta(n)$ .

В таком случае выход ЛС-системы рассчитывается как

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется *сверткой* и обозначается как

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad (2.5)$$

где символ  $*$  – операция свертки.

Последовательность  $h(n)$  – называется импульсной характеристикой системы. Таким образом, ЛС-система полностью определяется своей импульсной характеристикой  $h(n)$ . Если знать импульсную характеристику системы, то используя формулу (2.4), можно вычислить отклик  $y(n)$  на любой поданный сигнал  $x(n)$ .

### ***Пример нелинейной системы***

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$y(n) = T\{x(n)\} = x(n)x(n-1). \quad (2.6)$$

Чтобы определить, является ли система линейной, проверим выполнение принципа суперпозиции (2.2) для двух тестовых сигналов  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , показанных на рис. 2.6.

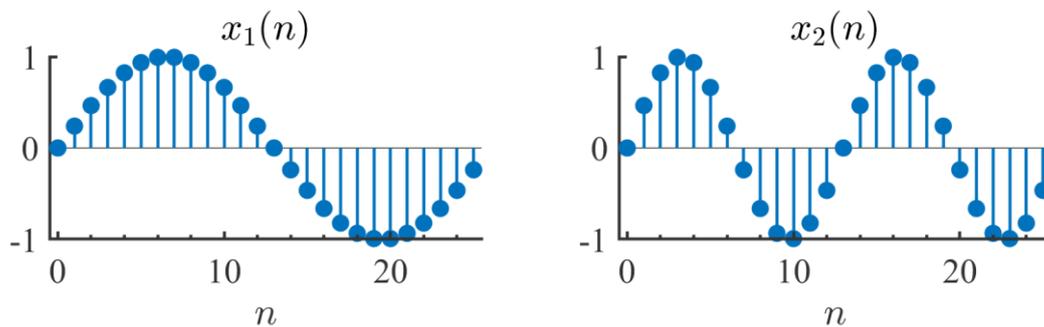


Рис. 2.6. Входные сигналы для теста на линейность

Сложим  $x_1(n)$  с  $x_2(n)$  и пропустим результат через дискретную систему (2.6). Вид выходного сигнала показан на рис. 2.7.

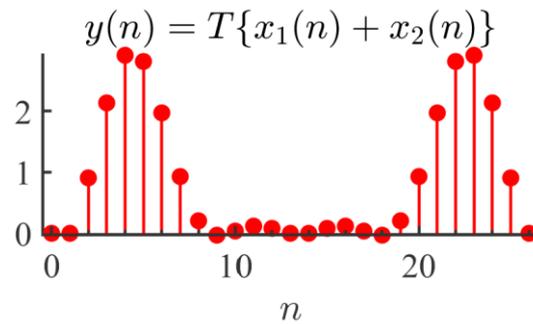


Рис. 2.7. Реакция дискретной системы (2.6) на сумму сигналов  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$

Теперь пропустим по отдельности сигналы  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  через дискретную систему (см. уравнение (2.6)) и затем сложим результаты  $y_1(n) = T\{x_1(n)\}$  и  $y_2(n) = T\{x_2(n)\}$ . На рис. 2.8 изображен результирующий сигнал.

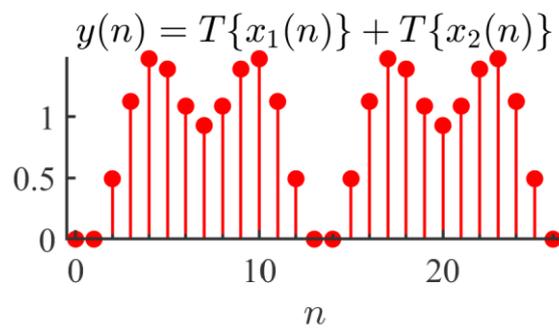


Рис. 2.8. Сумма откликов системы на сигналы  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$

Можно заметить, что графики на рис. 2.7 и 2.8 различны. Из этого можно заключить, что формула (2.6) описывает **нелинейную** систему.

### Устойчивость ЛС-системы

Для определения устойчивости нам понадобится понятие ограниченного сигнала. Последовательность  $x(n)$  называется **ограниченной**, если имеется такое конечное положительное число  $B_x$ , что

$$\forall n \quad |x(n)| \leq B_x < \infty. \quad (2.7)$$

Система называется устойчивой только если её реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена.

Таким образом в устойчивой системе для каждой ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа  $B_y$ , что

$$\forall n \quad |y(n)| \leq B_y < \infty. \quad (2.8)$$

Обратите внимание, что устойчивость – свойство именно системы, а не входных/выходных сигналов. Можно и для неустойчивой системы найти входные последовательности, для которых выход будет ограниченным. Для устойчивости важно, что выход ограничен для любой ограниченной входной последовательности.

Почти все рассмотренные прежде системы – устойчивы. А вот система

$$y(n) = \lg(x(n)) \quad (2.9)$$

является неустойчивой системой, поскольку  $y(n) = -\infty$  для  $x(n) = 0$ .

### ***Разностные уравнения***

Для практического использования ЛС-системы часто описываются при помощи разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k), \quad (2.10)$$

где  $b_k$  – коэффициенты прямой связи, которые применяются к поступающему в систему сигналу;  $x(n)$  и  $a_k$  – коэффициенты обратной связи, которые применяются к выходному сигналу  $y(n)$ .

В зависимости от значения коэффициентов  $b_k$  и  $a_k$  выражение (2.10) может описывать работу различных устройств (например, интегратора, дифференциатора, фильтра нижних частот и т.д.).

На рис. 2.9 показана схема реализации разностного уравнения (2.10). Заметим, что чаще всего коэффициент  $a_0$  имеет единичное значение и поэтому не показан на схеме.

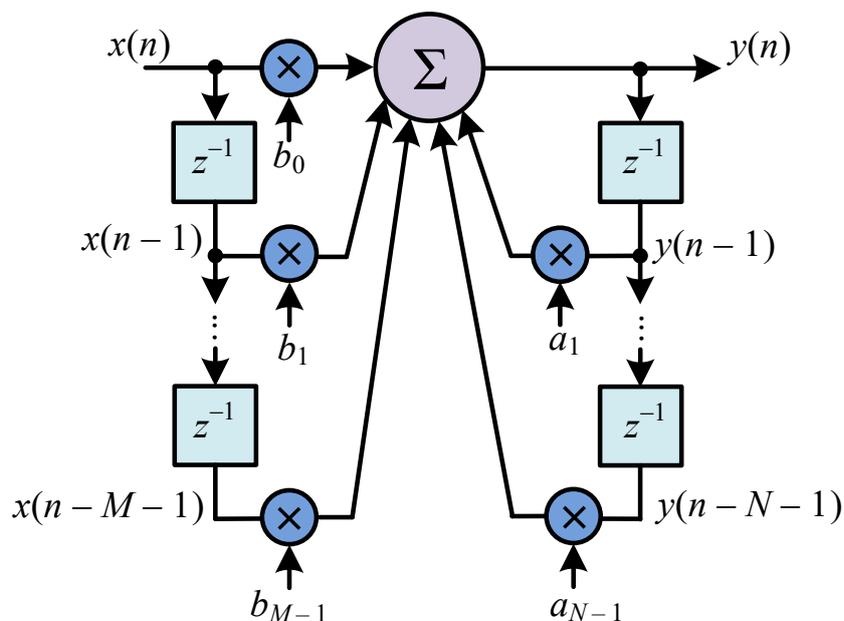


Рис. 2.9. Схема реализации разностного уравнения

Системы, описываемые уравнением (2.10), делят на два класса:

- а) рекурсивные;
- б) нерекурсивные.

В **рекурсивных** системах выход  $y(n)$  зависит как от входного сигнала  $x(n)$  и его предыстории  $x(n - k)$ , так и от предыдущих выходных значений  $y(n - k)$ . В **нерекурсивных** системах выходной сигнал зависит только от входного сигнала и его предыстории. Другими словами, у нерекурсивных систем все коэффициенты  $a_k$  (кроме  $a_0$ ) равны нулю.

### **Реализация цифровых фильтров в MATLAB**

В MATLAB ЛС-систему реализует функция  $y = \text{filter}(b, a, x)$ , где  $b$  – коэффициенты прямой связи,  $a$  – коэффициенты обратной связи,  $x$  – входной сигнал. Ниже приводится пример использования функции `filter` для реализации линейной системы:

$$y(n) = 0,3x(n) + 0,6x(n - 1) + 0,3x(n - 2) - 0,9y(n - 2). \quad (2.11)$$

Напомним, что импульсная характеристика – это сигнал, который генерирует ЛС-система при подаче на ее вход дельта-импульса  $\delta(n)$ .

Приведем пример получения импульсной характеристики для ЛС-системы, описываемой разностным уравнением (2.11).

```

delta = @(n)(n==0);
n = -5:25;
x = delta(n); % Дельта-импульс
b = [0.3 0.6 0.3];
a = [1 0 0.9];
y = filter(b,a,x);

```

На рис. 2.10 показаны графики входного и выходного сигналов линейной системы из приведенного примера. Выходной сигнал является импульсной характеристикой системы (2.11).

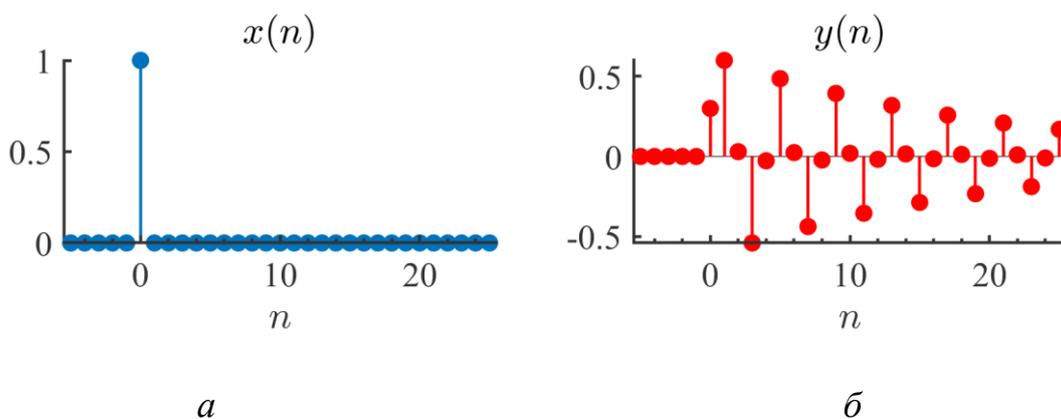


Рис. 2.10. Обработка сигнала линейной системой, описываемой разностным уравнением (2.11):  
*a* – входной сигнал; *б* – выходной сигнал

Очевидно, что при подаче дельта-импульса на вход нерекурсивной системы ее выходной сигнал будет иметь конечную длительность, отчего такие системы называются системами с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Для нерекурсивных систем вследствие наличия обратной связи характерна бесконечная импульсная характеристика (БИХ).

Фильтр, описываемый уравнением (2.11), можно представить в виде блок-схемы, которая показана на рис. 2.11.

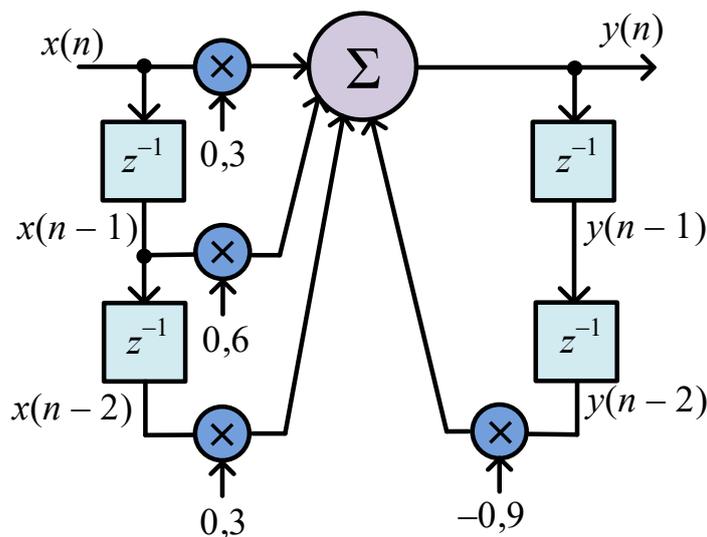


Рис. 2.11. Блок-схема фильтра (2.11)

Из приведенной схемы видно, что реализация фильтра требует четырех элементов памяти и четырех блоков умножения на константу. В соответствии со схемой, показанной на рис. 2.11 можно составить следующее MATLAB-описание.

```

delta = @(n)(n==0);
n = -5:25;
x = delta(n);           % Дельта-импульс
N = length(x);         % Длина сигнала
x_mem = zeros(1,2);    % Память входных отсчетов
y_mem = zeros(1,2);    % Память выходных отсчетов
y = zeros(1,N);        % Выходной сигнал

% Цикл обработки
for n = 1:length(x)
    y(n) = x(n)*0.3 + x_mem(1)*0.6 + x_mem(2)*0.3 - y_mem(2)*0.9;
    % Обновление памяти
    x_mem = [x(n) x_mem(1:end-1)];
    y_mem = [y(n) y_mem(1:end-1)];
end

```

В результате выполнения приведенного кода выходной сигнал будет иметь тот же вид, что и выходной сигнал, показанный на рис. 2.10, б. Поскольку приведенное описание полностью эквивалентно описанию ЛС-системы при помощи MATLAB-функции `filter`.

## Частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входной сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \quad (2.12)$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с импульсной характеристикой  $h(n)$ , то на выходе появится последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n)H(e^{j\omega}). \quad (2.13)$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (2.12) выходной сигнал совпадает со входным с точностью до комплексного множителя  $H(e^{j\omega})$ . Этот комплексный коэффициент называется частотной характеристикой системы и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m}. \quad (2.14)$$

Частотная характеристика является периодической функцией  $\omega$ , причем ее период равен  $2\pi$ . Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой  $(\omega + 2m\pi)$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) не отличается от входной последовательности с частотой  $\omega$ :

$$\tilde{x}(n) = e^{j(\omega+2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку  $H(e^{j\omega})$  – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной  $2\pi$ . Обычно для этой цели используют интервал  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ .

## 2.2. Порядок выполнения работы

### Задание 1

Напишите MATLAB-функцию, реализующую дискретную систему, согласно вашему варианту (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Дискретные системы для задания 1

Номер варианта	Уравнение системы
1	$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}(y(n-1) + y(n-2))$
2	$y(n) = \text{sign}(x(n)) \frac{\lg(1+\mu x(n) )}{\lg(1+\mu)}$ где $-1 \leq x(n) \leq 1$ , $\mu=255$
3	$y(n) = \frac{0,5x(n)+0,5x(n-1)}{x(n-2)+0,1x(n)}$
4	$y(n) = x(n) + x(n-10)$
5	$y(n) = \left(x(n) + \frac{1}{2}\right) \left(x(n-1) - \frac{1}{2}\right)$
6	$y(n) = x(n-2) - 0,6y(n-1)$
7	$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$
8	$y(n) = 0,6x(n-5) - 0,4y(n-2)$

Постройте реакцию дискретной системы на следующие сигналы:

- дельта-импульс  $x(n) = \delta(n - n_0)$ ;
- единичную ступеньку  $x(n) = u(n - n_0)$ ;
- низкочастотный синусоидальный сигнал  $x(n) = \cos(2\pi \cdot 0,01 \cdot n)$ ;
- высокочастотный синусоидальный сигнал  $x(n) = \cos(2\pi \cdot 0,48 \cdot n)$ ;

Функция  $\text{sign}(x)$  в варианте 2 определяется как:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

### Задание 2

Проверить является ли система из задания 1:

- аддитивной;
- однородной;
- линейной;
- стационарной.

В отчете представьте математические выкладки, подтверждающие наличие или отсутствие у системы указанных свойств.

### Задание 3

1. По блок-схеме дискретной системы записать её разностное уравнение.
2. Реализовать в MATLAB дискретную систему согласно её блок-схеме.
3. Построить импульсную характеристику дискретной системы.

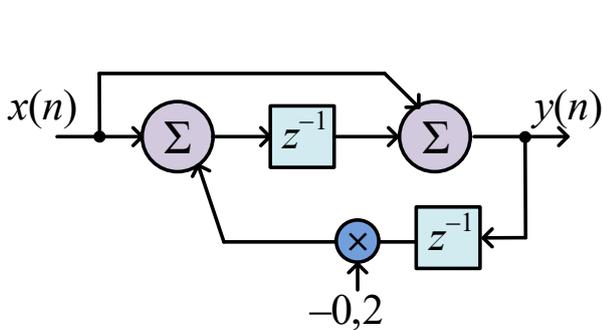


Рис. 2.12. Вариант 1

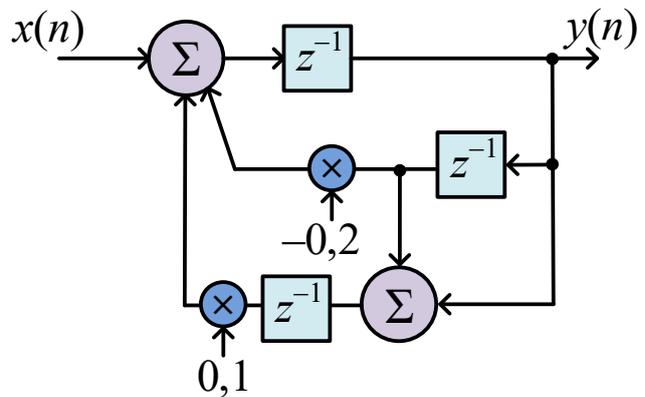


Рис. 2.13. Вариант 2

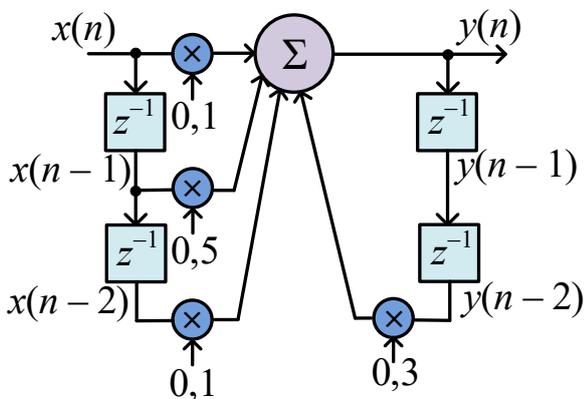


Рис. 2.14 – Вариант 3

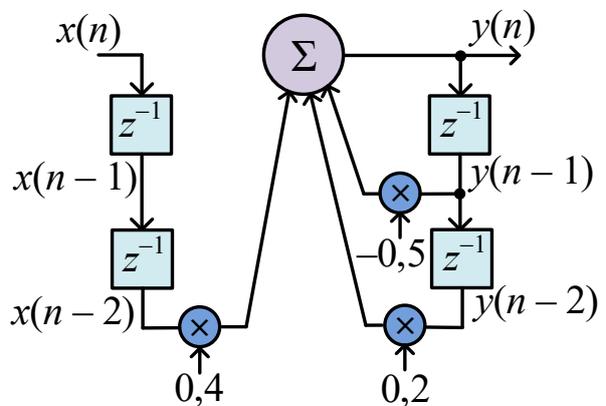


Рис. 2.15 – Вариант 4

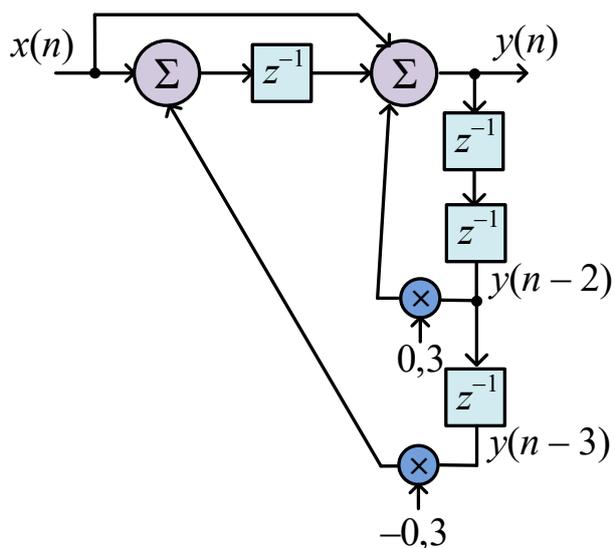


Рис. 2.16. Вариант 5

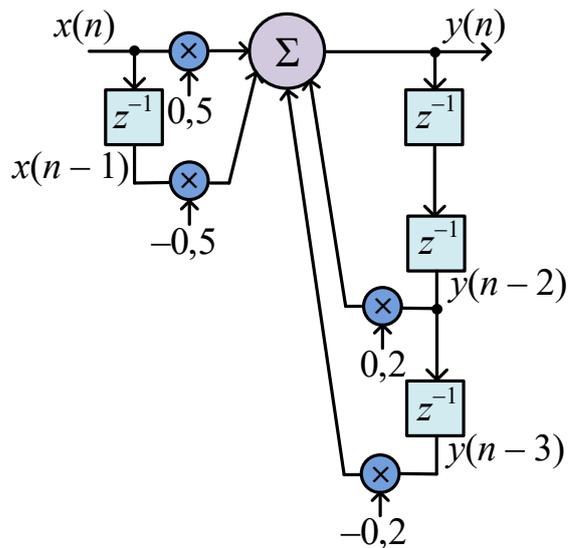


Рис. 2.17. Вариант 6

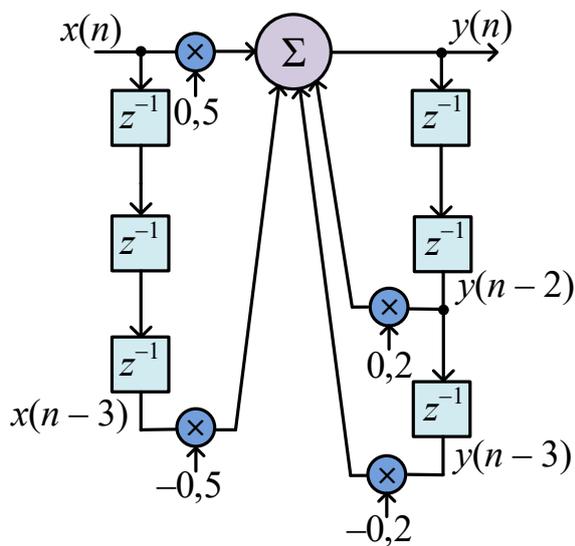


Рис. 2.18. Вариант 7

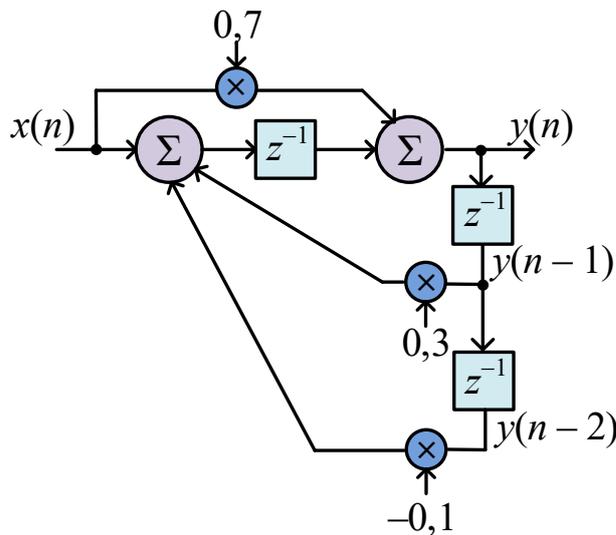


Рис. 2.19. Вариант 8

#### Задание 4

Используя встроенную MATLAB-функцию `filter(b,a,x)` и коэффициенты разностного уравнения системы из задания 3 найдите импульсную характеристику системы и постройте её график.

### Задание 5

Используя выражение (2.14) найдите частотную характеристику  $H(e^{j\omega})$  системы из задания 3. Частотную характеристику можно представить в виде

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{АЧХ}} e^{\underbrace{\arg H(e^{j\omega})}_{\text{ФЧХ}}}.$$

Постройте график амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) –  $|H(e^{j\omega})|$  и фазо-частотная характеристика (ФЧХ)  $\arg H(e^{j\omega})$ .

### Задание 6

Необходимо реализовать в MATLAB алгоритм генерации звука гитарной струны.

Рассмотрим разностное уравнение, которое описывает один из вариантов алгоритма Карплуса-Стронга для имитации звука гитарной струны.

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n - M), \quad (2.15)$$

где  $x(n)$  – входной сигнал;  $M$  – задержка;  $\alpha$  – коэффициент затухания.

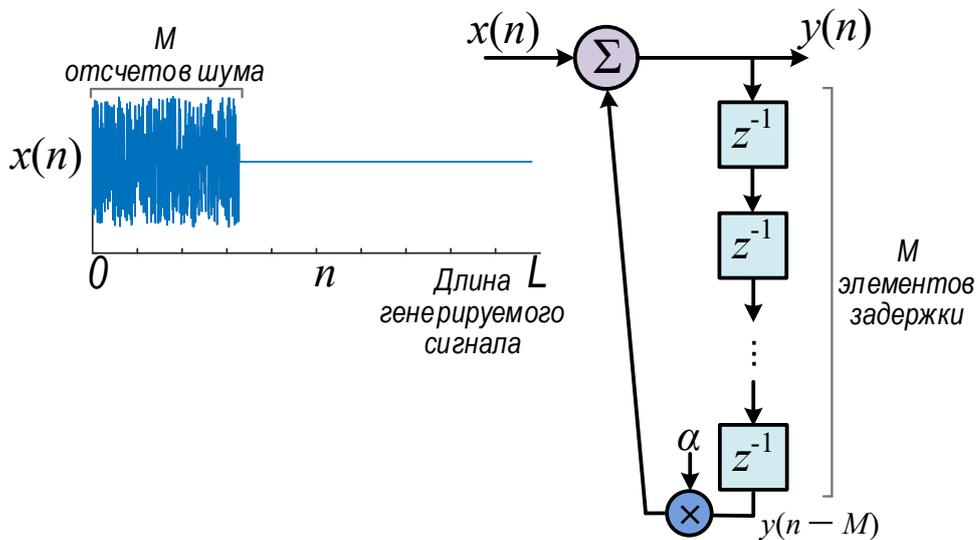


Рис. 2.20. Схема ЛС-системы для имитации звука гитарной струны

Величина  $M$  определяет частоту генерируемой ноты. Например, нота ля первой октавы имеет частоту  $f_0 = 440$  Гц. Если мы хотим сгенерировать эту ноту, то должны установить  $M$  равным одному периоду частоты  $f_0$ . С учетом частоты дискретизации  $f_s$  величина  $M$  будет определяться следующим образом:

$$M = \text{round}(f_s/f_0). \quad (2.16)$$

Для генерирования звука струны согласно схеме на рис. 2.20 на вход требуется подать сигнал  $x(n)$  длиной  $L$ , причем первые  $M$  отсчетов должны представлять шум, а остальные быть нулевыми.

Сгенерировать шум (случайную последовательность) в MATLAB можно следующим образом

```
x=(1/4)*(rand(1,M)-0.5);
```

Параметр  $\alpha$  в выражении (2.15) определяет коэффициент затухания, обычно он находится в диапазоне от 0,9 до 1,0. При значении близком к единице звук затухает медленно, при  $\alpha = 0,9$  звук затихает быстро.

После того, как выходная последовательность  $y(n)$  будет сгенерирована её можно сохранить в аудиофайл при помощи команды

```
audiowrite('ks_out.wav', y, fs);
```

и прослушать в аудиоредакторе.

### 2.3. Дополнительные задания

1. Для системы из задания 1 (вариант 2) найдите обратную. Также, используя MATLAB, выполните следующий эксперимент: пропустите дискретный синусоидальный сигнал через систему. Затем округлите (проквантуйте) значения сигнала до 2 знаков после запятой (полученный сигнал обозначим  $y_q(n)$ ). Следующим этапом пропустите через обратную систему сигнал  $y_q(n)$  и представьте на графике результат. Отдельно на графике покажите разницу между исходным и восстановленным сигналом.

2. Сгенерируйте с помощью функции из задания 7 девять сигналов с частотами 659, 622, 659, 622, 494, 587, 523 и 440 Гц, объедините их в один сигнал и сохраните в wav-файл.

3. По аналогии с примером, приведенным для системы (2.6) покажите, что ваша система обладает или не обладает свойством линейности.

4. Вычислите первые пять выходных значений фильтра

$$y(n) = x(n) + ay(n - 1) \quad (2.17)$$

для случая  $y(-1) = 0$  и  $x(n) = u(n)$ .

5. Вычислите первые пять выходных значений фильтра (2.17) для случая  $y(-1) = 0$  и  $x(n) = \delta(n)$ . Дать формулу для  $y(n)$ .

6. Определите свойства следующей системы (запоминание, устойчивость, детерминированность, аддитивность, однородность, линейность, стационарность): в каждом случае поясните свой ответ:

а)  $y(n) = \sqrt{x(n)}$ ;

б)  $y(n) = \text{median}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$ ;

в)  $y(n) = \lg(x(n) + x(n-1))$ ;

г)  $y(n) = e^{x(n)}$ ;

д)  $y(n) = ax(n) + b$ ;

е)  $y(n) = x(-n)$ ;

ж)  $y(n) = x(n) + 3u(n+1)$ ;

з)  $y(n) = \sqrt{x(n+1) + 1}$ ;

и)  $y(n) = n^2x(n-1)$ .

7. Определите импульсную характеристику следующих систем:

а)  $y(n) = x(n-1)$ ;

б)  $y(n) = n^2x(n-1)$ ;

в)  $y(n) = \sum_{k=-5}^5 x(n-k)$ .

8. Найдите выход ЛС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = 0,25\delta(n) + 0,75\delta(n-1) - 0,75\delta(n-2) - 0,25\delta(n-3)$$

при подаче на вход сигнала  $x(n) = u(n-1) - u(n-7)$ .

9. Рассмотрите систему, входной и выходной сигналы которой связаны разностным уравнением

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

Предположим, что  $y(-1) = 0$  вне зависимости от входного сигнала. Определите, является ли данная система устойчивой. В случае положительного ответа подтвердите его аргументами. Отрицательный ответ подкрепите контрпримерами.

10. Итеративно решите следующие разностное уравнение (т.е. найдите первые 3 члена последовательности  $y(n)$ ):

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

если  $y(-1) = -25$  и  $y(-2) = 0$ .

11. Найдите первые 4 члена импульсной характеристики линейной стационарной системы описываемой разностным уравнением:

$$y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 2x(n) - x(n-1).$$

12. Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением:

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n-1)$$

а) найти импульсную характеристику системы;

б) вычислить отклик системы на единичный скачок.

13. Найдите КЧХ  $H(e^{j\omega})$  ЛС-системы, у которой входной и выходной сигналы удовлетворяют разностному уравнению

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2).$$

14. Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

15. ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2).$$

а) найдите импульсную характеристику  $h(n)$  системы:

б) определите КЧХ  $H(e^{j\omega})$  системы. Используя формулы тригонометрии, упростите выражение для  $H(e^{j\omega})$ .

16. Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) = \frac{3}{2}y(n-1) + y(n-2) + x(n-1).$$

а) найдите импульсную характеристику системы;

б) является ли система устойчивой?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. РЯДЫ ФУРЬЕ

Цель работы – изучение метода анализа периодических функций с использованием ряда Фурье в пакете MATLAB.

### 3.1. Теоретические сведения

#### Общие понятия

Фурье-анализ является важным инструментом для решения широкого круга задач обработки сигналов. Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) предложил концепцию представления периодической функции  $x(t)$  (рис. 3.1) в виде тригонометрического ряда из косинусов и синусов:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)), \quad (3.1)$$

где  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0}$ ;  $T_0$  – период функции.

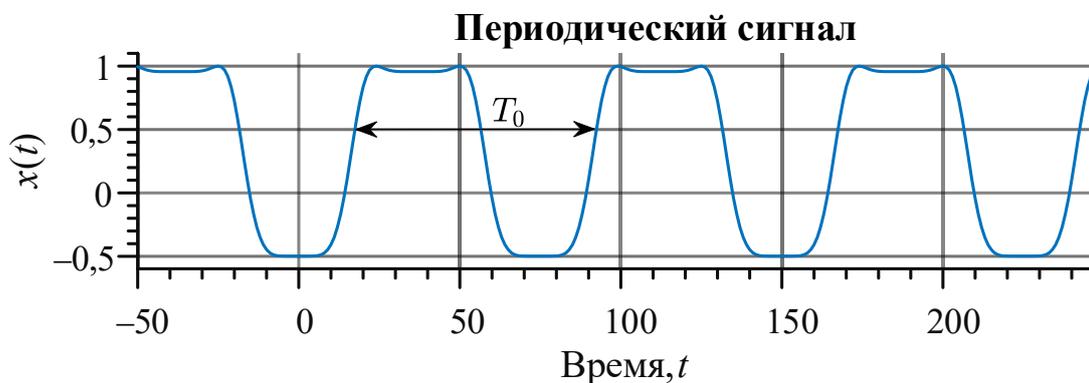


Рис. 3.1. Пример периодического сигнала

Самая низкочастотная составляющая сигнала, которая входит в формулу (3.1), называется *основной частотой*, или *частотой основного тона*

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ или } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (3.2)$$

поскольку все остальные частоты кратны ей, т. е.  $\omega_k = k\omega_1$ . Частотные компоненты сигнала называются *гармониками*.

Например, частотная компонента

$$(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t), \quad (3.3)$$

является 2-й гармоникой. Слагаемое  $\frac{a_0}{2}$  в выражении (3.1) является постоянной составляющей и представляет собой среднее значение сигнала за период. Причина, по которой стремятся представить сигнал в форме (3.3), заключается в том, что часто необходимо представить сложный сигнал в виде суммы более «простых» сигналов – в данном случае косинусов и синусов. Не следует думать, что периодические сигналы – редкость. Например, на рис. 3.2 показан участок речевого сигнала (звук [а]), форма которого близка к периодической. Такой же периодичностью обладают все гласные звуки.

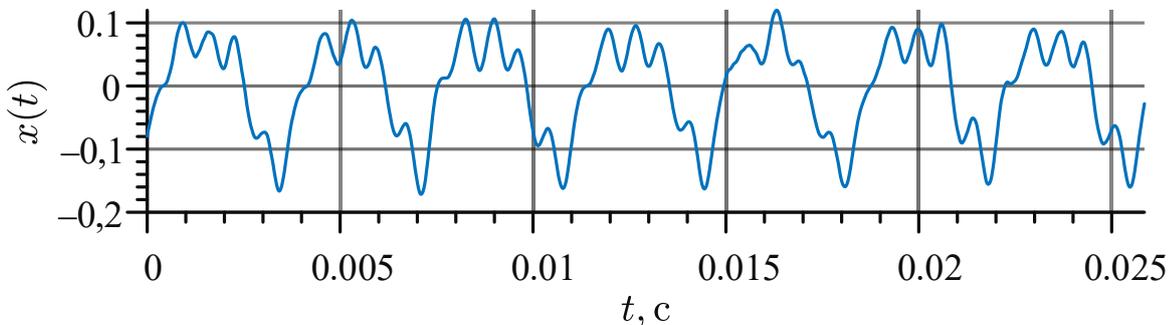


Рис. 3.2. Пример речевого сигнала

### **Ортогональность**

Иногда возникает вопрос, почему для разложения функции в ряд (3.1) выбраны именно функции  $\sin$  и  $\cos$ ? Так происходит потому, что эти функции обладают важным свойством ортогональности. Ортогональность известна нам из курса геометрии, где она относилась к векторам. Оказывается, между функциями и векторами существует аналогия: как произвольный вектор можно представить в виде суммы ортогональных векторов, составляющих базис, так и произвольную функцию можно представить в виде суммы ортогональных функций (рис. 3.3).

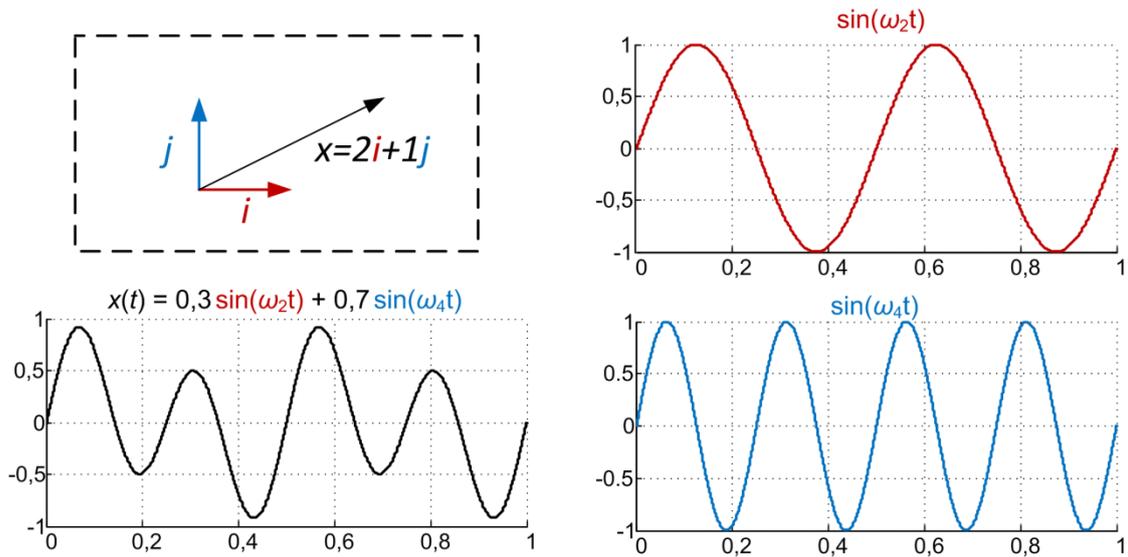


Рис. 3.3. Разложение в ортогональный базис вектора и функции

В левом верхнем углу на рис. 3.3 представлено разложение вектора  $\mathbf{x}$  в виде взвешенной суммы базисных векторов  $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ . Аналогичным образом периодическая функция  $x(t)$ , показанная в нижнем левом углу, может быть представлена в виде взвешенной суммы функций  $\sin(\omega_2 t)$  и  $\sin(\omega_4 t)$ . В данном случае, для получения  $x(t)$  требуется  $\sin(\omega_2 t)$  умножить на коэффициент 0,3, а  $\sin(\omega_4 t)$  на коэффициент 0,7. Как видно из формулы (3.1), в общем случае в разложении периодической  $x(t)$  участвуют базисные элементы вида  $a_k \cos(\omega_k t)$  и  $b_k \sin(\omega_k t)$ . Причем набор частот  $\omega_k$  фиксирован, он зависит от периода сигнала  $x(t)$ , а вот коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  – это то, что необходимо определить исходя из заданной функции  $x(t)$ . Расчёт коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  и есть центральная задача Фурье-анализа.

Возвращаясь к примеру, показанному на рис. 3.3. нужно сказать, что различие в разложении вектора и функции в том, что количество базисных векторов конечно, а число базисных функций в общем случае бесконечно.

### ***Ортогональность и скалярное произведение***

Как определить, является ли одна функция ортогональной по отношению к другой? Известно, что ортогональные векторы имеют нулевую проекцию друг на друга. С понятием проекции связано понятие скалярного произведения векторов

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \dots + a_n b_n^* = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*, \quad (3.4)$$

которое равно нулю для ортогональных векторов. Для функций также есть аналог скалярного произведения:

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_a^b f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt. \quad (3.5)$$

Это выражение равно нулю, если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  ортогональны на интервале  $[a, b]$ , иначе получаемое число показывает проекцию одной функции на другую. Исходя из того, что геометрический смысл интеграла – площадь под кривой, на рис. 3.4 иллюстрируется понятие скалярного произведения функций.

На верхней панели рис. 3.4 показана функция  $s_1(t)$ , состоящая из одного периода синуса. Графически проиллюстрировано, что скалярное произведение  $s_1(t)$  на саму себя равно 0,5. На нижней панели приведена функция  $s_2(t)$ , состоящая из двух периодов синуса. Рядом графически представлено произведение  $s_1(t) \cdot s_2(t)$ , которое состоит из двух симметричных участков, суммарная площадь которых с учетом знака равна нулю. Таким образом, можно сделать вывод, что функции  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  ортогональны друг другу на интервале  $[0, 1]$ .

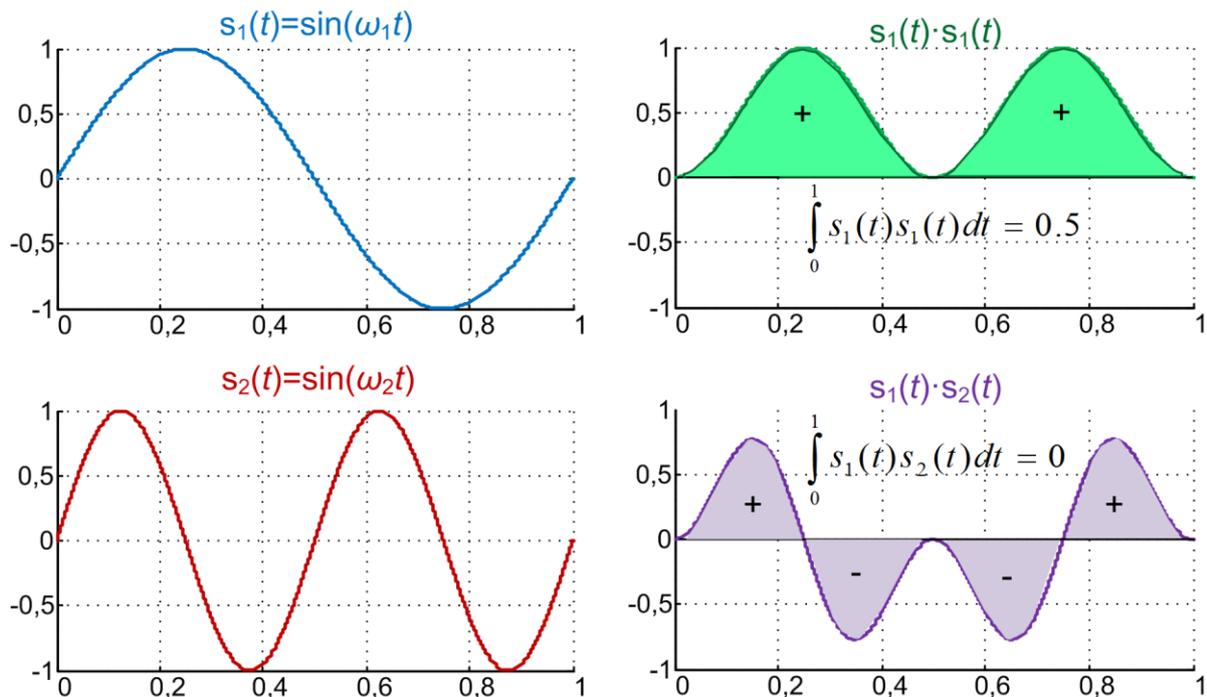


Рис. 3.4. Скалярное произведение функций

Учитывая введенные вначале обозначения, свойство ортогональности функций  $\sin$  и  $\cos$  записываются следующим образом:

$$\int_0^{T_0} \cos \omega_k t \sin \omega_m t dt = 0, \quad \forall k, m,$$

$$\int_0^{T_0} \cos \omega_k t \cos \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\int_0^{T_0} \sin \omega_k t \sin \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m. \end{cases}$$

Попробуйте самостоятельно доказать данные выражения.

### **Фурье-анализ**

Основная задача Фурье-анализа состоит в нахождении коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в выражении (3.1). Чтобы получить значение конкретного коэффициента  $a_m$  необходимо найти проекцию  $x(t)$  на базисную функцию  $\cos \omega_m t$ , т. е.

$$a_m = \langle x(t), \cos(\omega_m t) \rangle.$$

Учитывая формулу (3.5) для нахождения проекции необходимо умножить левую и правую части выражения (3.1) на  $\cos \omega_m t$ , а затем проинтегрировать левую и правую часть, используя свойство ортогональности синусов и косинусов. Итак, умножая левую и правую части выражения (3.1) на  $\cos \omega_m t$  получим

$$x(t) \cos \omega_m t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t \cos \omega_m t + b_k \sin \omega_k t \cos \omega_m t).$$

Интегрируя обе части по переменной  $t \in [0, T_0]$ , получаем

$$\int_0^{T_0} x(t) \cos \omega_m t dt = \frac{a_0}{2} \int_0^{T_0} \cos \omega_m t dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_0^{T_0} \cos \omega_k t \cos \omega_m t dt + b_k \int_0^{T_0} \sin \omega_k t \cos \omega_m t dt \right).$$

Используя свойство ортогональности (3.6), легко можно найти выражения для коэффициентов  $a_m$ :

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos \omega_m t dt.$$

В полученном выражении можно для удобства заменить индекс  $m$  на  $k$ .

Коэффициенты  $b_k$  находятся аналогичным образом, только выражение (3.1) умножается на  $\sin \omega_m t$ :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T_0} x(t) \sin \omega_k t dt.$$

Иногда бывает полезным следующее разложение функции  $x(t)$ , которое может быть получено из (3.1):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.7)$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right).$$

$A_k$  – амплитуда компоненты сигнала на частоте  $\omega_k$ ;  $\varphi_k$  – фаза компоненты сигнала на частоте  $\omega_k$ .

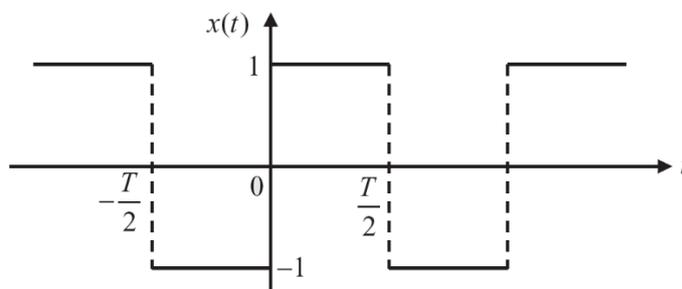


Рис. 3.5. Прямоугольный сигнал

### Пример разложения в ряд Фурье прямоугольного сигнала

В качестве примера рассмотрим ряд Фурье для периодического сигнала  $x(t + nT) = x(t)$ , который определен следующим образом (рис. 3.5):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T/2, \\ -1, & T/2 < t < T. \end{cases} \quad (3.8)$$

Легко заметить, что среднее значение сигнала равно нулю:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0,$$

а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  равны

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(\omega_k t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} \cos(\omega_k t) dt - \int_{T/2}^T \cos(\omega_k t) dt \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(\omega_k t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} \sin(\omega_k t) dt - \int_{T/2}^T \sin(\omega_k t) dt \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} + \frac{1}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T = \\ &= \frac{1}{\pi k} (-\cos(\pi k) + 1 + \cos(2\pi k) - \cos(\pi k)) = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos(\pi k)). \end{aligned}$$

Если принять  $T = 1$ , то  $b_k$  принимает следующий вид

$$b_k = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)).$$

Подставляя полученные значения в формулу (3.1), получим выражение для сигнала:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]. \quad (3.9)$$

Необходимо отметить, что в разложении участвуют только функции  $\sin$ . Это происходит из-за того, что прямоугольный сигнал является нечетной функцией и для его представления не нужны четные функции  $\cos$ .

Полезно рассмотреть, как частичные суммы (3.9) аппроксимируют исходный сигнал  $x(t)$ . Обозначим через  $S_n(t)$  сумму первых  $n$  членов в (3.9). Ниже приведен код, который использовался для получения графиков частичных сумм.

Графики первых трех частичных сумм приведены на рис. 3.6. Можно заметить, что при увеличении числа гармоник  $n$  результирующая форма функции  $S_n(t)$  становится все ближе к оригиналу  $x(t)$ .

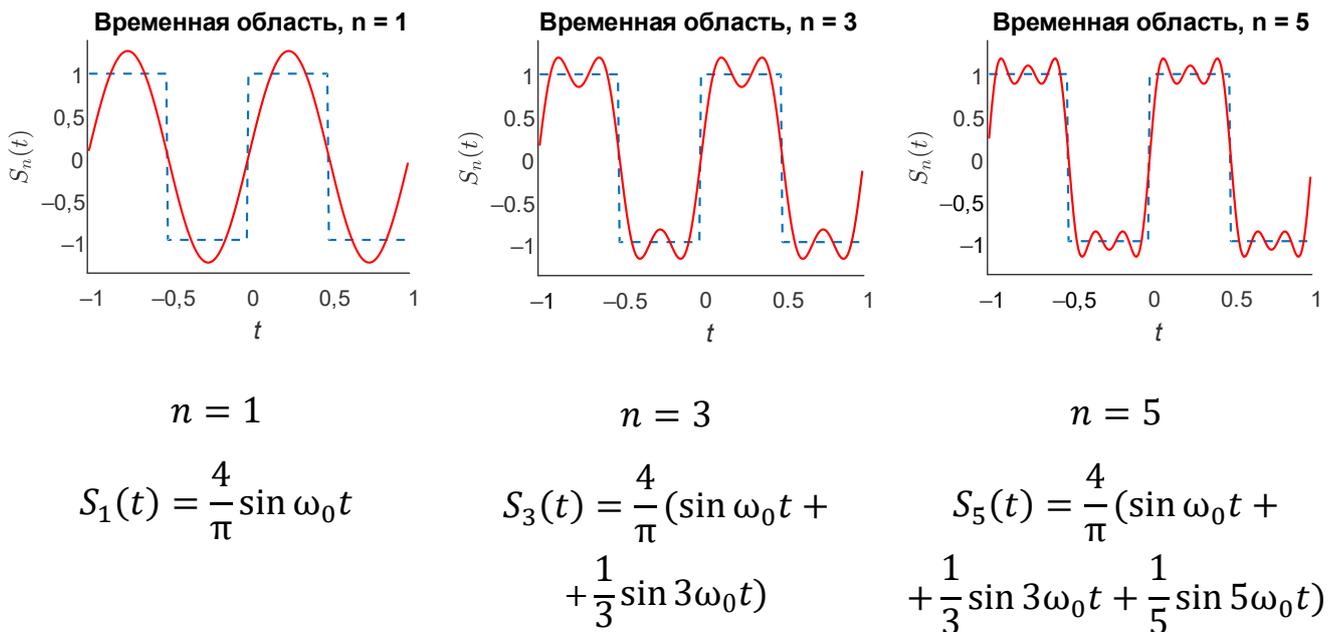


Рис. 3.6. Частичные суммы, аппроксимирующие прямоугольный сигнал

```

T = 1
t = -T:0.001:T;
% Вычисление исходного сигнала
x = square(2*pi*(1/T)*t);
% Число гармоник
n = 20;
S_n = zeros(1,length(x)); b = zeros(1,n);
for k = 1:n
    b(k) = 2/(pi*k)*(1-cos(k*pi));
    S_n = S_n + b(k)*sin(2*pi*k/T*t);
end
%% Graphics
FontSize = 14;
figure('Units','pixels', 'Position',[100 100 450 320]);
plot(t,x,'--'); hold on; plot(t,S_n,'r');
title(['Временная область, n = ' num2str(n)]);
xlabel('\it t'); ylabel('$S_n(t)$','Interpreter','latex');

```

## Эффект Гиббса

Поведение частичных сумм ряда Фурье  $S_n(t)$  в точке разрыва функции называют эффектом Гиббса. Создается впечатление, что колебания в точках разрыва исчезнут, если просуммировать больше членов ряда, однако этого не происходит (рис. 3.7). Заметьте, что от количества слагаемых в ряде Фурье амплитуда выброса не изменяется.

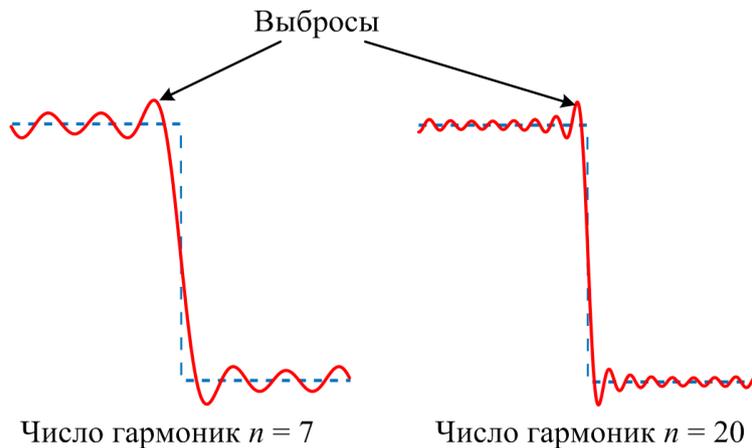


Рис. 3.7. Эффект Гиббса

## Комплексная запись ряда Фурье

Наиболее часто ряд Фурье записывается в терминах комплексных экспонент  $e^{j\omega_k t}$ . Переход к комплексной форме записи ряда Фурье можно выполнить, если учесть, что

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad \text{и} \quad \sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}). \quad (3.10)$$

Используя эти соотношения, выражение (3.1) можно преобразовать к виду

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \quad (3.11)$$
$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\omega_k t} dt,$$

Комплексные коэффициенты  $c_k$  связаны с  $a_k$  и  $b_k$  следующим образом:

$$c_k = (a_k - jb_k)/2.$$

Коэффициент  $c_k$  несет в себе информацию об амплитуде синусной и косинусной волны  $k$ -й компоненты разложения Фурье (или  $k$ -й гармоники). Форма (3.11) связана с разложением

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3.12)$$

следующим образом:

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k, \quad \arg(c_k) = \varphi_k.$$

Напомним, что аргумент комплексного числа  $z = x + jy$  удовлетворяет условию

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

И вычисляется следующим образом:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

В MATLAB для вычисления модуля комплексного числа используется функция `abs`, а для аргумента – функция `angle`.

Заметим, что в формулу (3.11) «кирпичиками», из которых складывается сигнал, являются комплексные экспоненты  $e^{-j\omega_k t}$ . Коэффициенты  $c_k$  также имеют комплексные значения и несут в себе информацию не только об амплитуде, но и о фазе  $k$ -й гармоники. Кроме того, в формуле (3.11) возникают компоненты с «отрицательной частотой». Понятие отрицательной частоты имеет чисто математическую природу и берет свои истоки в выражении (3.10).

### Спектр сигнала

Для пояснения понятия спектра сигнала обратимся к комплексной форме ряда Фурье (3.11). График зависимости  $|c_k|$  от частоты  $\omega_k$  называется **амплитудным спектром** сигнала  $x(t)$ . График зависимости фаз частотных компонент  $\arg c_k$  от частоты  $\omega_k$  называется **фазовым спектром** сигнала  $x(t)$ . Примеры амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 3.8.

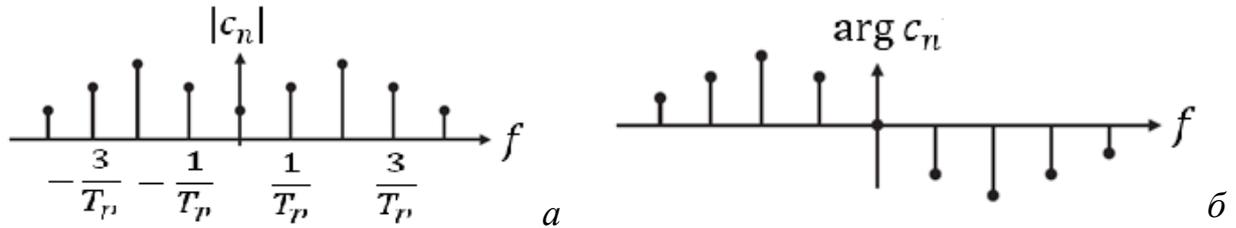


Рис. 3.8 – Спектры:

$a$  – амплитудный;  $b$  – фазовый

Альтернативным способом изобразить спектр сигнала является построение графиков для  $A_k$  и  $\varphi_k$  из выражения (3.12).

### Теоремы о свертке

Интересно попробовать ответить на вопрос: а как будет выглядеть разложение в ряд Фурье произведения двух функций? Ограничимся рассмотрением случая вещественных функций и для простоты будем полагать, что их период равен  $2\pi$ . В этом случае имеем:

$$x(t)h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jmt}. \quad (3.13)$$

Выполняя подстановку  $n = k + m$  и вынося комплексные экспоненты за знак суммы, получаем:

$$x(t)h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k} \right). \quad (3.14)$$

Полученное выражение (3.14) имеет вид ряда Фурье, причем  $n$ -й член разложения имеет вид:

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}. \quad (3.15)$$

Это выражение называется *сверткой* последовательностей  $c_k$  и  $d_k$ . Иногда свертку сокращенно обозначают:

$$r_n = c_k \cdot d_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}. \quad (3.16)$$

Если представить, что в свертке (3.16) все  $c_k$  равны нулю, за исключением одного, например  $c_0 = 1$ , то сумма превращается в один член, а именно в  $d_k$ . Другими словами, при

$$c_k = \delta(k), \quad r_n = c_k \cdot d_k = d_n. \quad (3.17)$$

Таким образом, свертка с одиночным импульсом на выходе дает члены второй последовательности.

Мы получили свертку в результате перемножения двух функций, значит, можно найти функцию, которая соответствует произведению соответствующих коэффициентов двух разложений:

$$g_k = c_k d_k.$$

Чтобы отыскать эту функцию мы должны ввести понятие свертки двух периодических функций:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Найдем коэффициенты Фурье для (3.18):

$$\begin{aligned}
 g_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) e^{-jkt} dt = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) h(t - \tau) e^{-jkt} e^{jk\tau} e^{-jk\tau} dt d\tau = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau}_{=c_k} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t - \tau) e^{-jk(t-\tau)} dt}_{=d_k} = c_k d_k.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

### 3.2. Порядок выполнения работы

#### Задание 1

Найдите аналитические выражения для коэффициентов  $a_k, b_k$  разложения в ряд Фурье периодического сигнала  $x(t)$  согласно варианту. На графиках приведен один период сигнала.

#### Вариант 1

Сигнал имеет вид (рис. 3.9):

$$x(t) = \sin^2(2\pi t) u(0,5 - t), \quad t \in [0, 1].$$

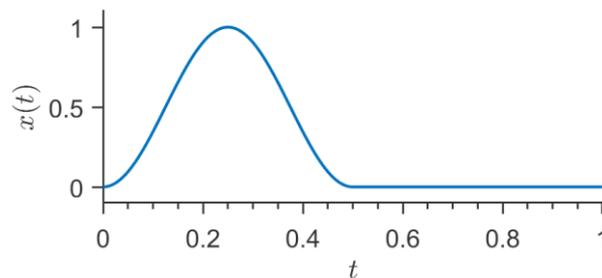


Рис. 3.9. Сигнал для варианта 1

*Вариант 2*

Сигнал имеет вид (рис. 3.10):

$$x(t) = u(t - 0,2) - u(t - 0,8), \quad t \in [0, 1].$$

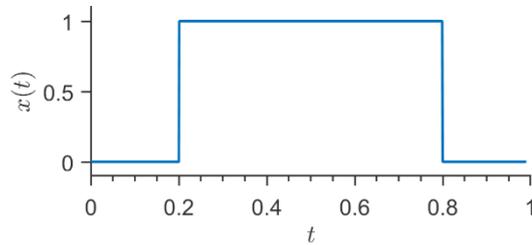


Рис. 3.10. Сигнал для варианта 2

*Вариант 3*

Сигнал имеет вид (рис. 33.11):

$$x(t) = (1 - 2t)(u(t - 0,2) - u(t - 0,8)), \quad t \in [0, 1].$$

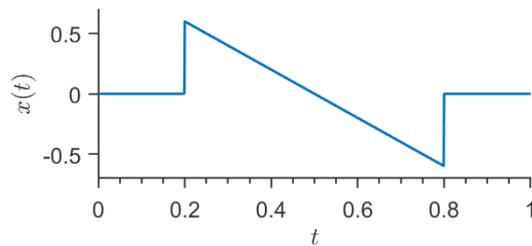


Рис. 33.11. Сигнал для варианта 3

*Вариант 4*

Сигнал имеет вид (рис. 3.12):

$$x(t) = 2t \cdot u(-t + 0,5) + u(t - 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

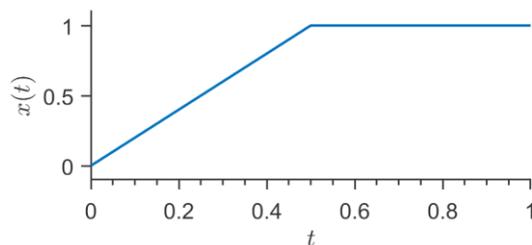


Рис. 3.12. Сигнал для варианта 4

*Вариант 5*

Сигнал имеет вид (рис. 3.13):

$$x(t) = (2 - 2t) \cdot u(t + 0,5) + u(-t + 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

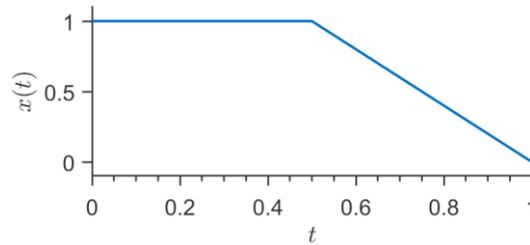


Рис. 3.13. Сигнал для варианта 5

*Вариант 6*

Сигнал имеет вид (рис. 3.14):

$$x(t) = 2t \cdot u(-t + 0,5) + (2 - 2t) \cdot u(t - 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

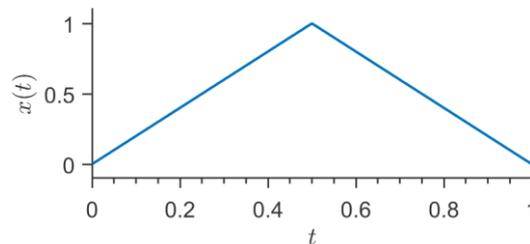


Рис. 3.14. Сигнал для варианта 6

*Вариант 7*

Сигнал имеет вид (рис. 3.15):

$$x(t) = \cos(2\pi 4t) \cdot u(t - 0,25) + u(t - 0,75), \quad t \in [0, 1].$$

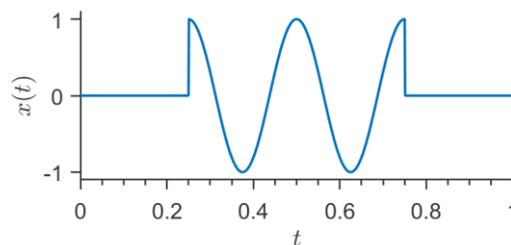


Рис. 3.15 – Сигнал для варианта 7

### Вариант 8

Сигнал имеет вид (рис. 3.16):

$$x(t) = \sin(2\pi 6t) \cdot u(t - 0,25) + u(t - 0,75), \quad t \in [0, 1].$$

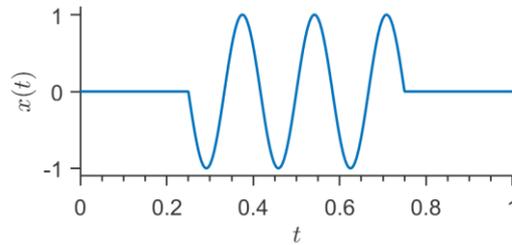


Рис. 3.16. Сигнал для варианта 8

### Задание 2

Рассчитайте коэффициенты  $a_k, b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 20$ ). Постройте графики для  $a_k$  и  $b_k$ , подпишите оси.

### Задание 3

Постройте графики частичных сумм

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

аппроксимирующих исходный сигнал  $x(t)$  на интервале  $t = [-T, 2T]$  для  $n \in \{1, 3, 10, 30\}$ . Наблюдается ли в данном случае эффект Гиббса? Если да, то какова причина его появления?

Для вариантов 4 и 5: постройте отдельно графики для  $S_{200}(t)$  используя только 1) коэффициенты  $a_k$ ; 2) используя только коэффициенты  $b_k$ .

### Задание 4

Для  $n$  из задания 3 постройте графики сигналов ошибки аппроксимации:

$$\epsilon_n(t) = |x(t) - S_n(t)|$$

Для  $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$  вычислите энергию сигнала-ошибки

$$E_n = \sum_{t \in [0, 1]} \epsilon_n^2(t).$$

Уменьшается ли  $E_n$  по мере увеличения  $n$ ?

### Задание 5

Найдите спектр сигнала, рассчитав параметры  $A_k$ ,  $\varphi_k$  гармонической формы ряда Фурье (3.7) для  $k = 0, 1, \dots, 20$ . Постройте графики для  $A_k$  и  $\varphi_k$ , подпишите оси.

Компонента с какой частотой (в герцах) имеет наибольшую амплитуду?

### 3.3. Дополнительные задания

1. Почему в варианте 2 при разложении функции в ряд Фурье коэффициенты  $b_k$  равны нулю? Можно ли было это предвидеть, не производя вычислений?
2. Показать, что косинусы ортогональны на интервале  $0 \leq t \leq \pi$ .
3. Показать, что синусы ортогональны на интервале  $0 \leq t \leq \pi$ .
4. Разложить в ряд Фурье функцию  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $|t| \leq \pi$ .
5. Найдите коэффициенты разложения в ряд Фурье периодическую функцию с периодом  $2\pi$ :

$$x(t) = 1 \text{ при } 0 < x < \pi \text{ и } x(-t) = -x(t).$$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Цель работы – изучение теории и применения дискретного преобразования Фурье с использованием пакета MATLAB.

### 4.1. Теоретические сведения

Существует несколько подходов к получению формул дискретного преобразования Фурье (ДПФ). В этом разделе мы рассмотрим способ получения формул ДПФ с позиции линейной алгебры. Подход основан на том, что мы будем отождествлять конечные последовательности, с которыми мы сталкиваемся в ЦОС, с векторами, которые изучаются в линейной алгебре. Иначе говоря, дискретному сигналу  $x(n)$  мы будем ставить в соответствие вектор

$$\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T. \quad (4.1)$$

Следовательно, мы ассоциируем сигнал с точкой в  $N$ -мерном пространстве  $\mathbb{C}^N$ . В этих обозначениях отдельные значения сигнала  $x(n)$  представляют собой координаты вектора. Координаты в свою очередь выражаются в отношении к «стандартному» ортонормированному базису. Применительно к представлению (4.1) стандартный базис состоит из векторов вида

$e_0 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$ ,  $e_1 = [0, 1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $\dots$ ,  $e_{N-1} = [0, 0, 0, \dots, 1]^T$ . Можно заметить, что по сути базис  $\{e_k\}_{k=0, 1, \dots, N-1}$  совпадает с набором сдвинутых единичных импульсов  $\delta(n-k)$ .

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим представление дискретного сигнала  $x(n) = 2n + 1$  для  $n = 0, 1, 2, 3$  в виде вектора.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1e_0 + 3e_1 + 5e_2 + 7e_3.$$

Легко видеть, что это представление идентично записи сигнала, как последовательности масштабированных и сдвинутых единичных импульсов:

$$x(n) = 1\delta(n) + 3\delta(n-1) + 5\delta(n-2) + 7\delta(n-3).$$

Используя понятие скалярного произведения (3.4) можно ввести понятие нормы вектора

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)} = \langle x, x \rangle^{1/2}. \quad (4.2)$$

Геометрический смысл нормы – это длина вектора. Другими словами, это расстояние между началом координат и точкой пространства, определяемой вектором.

Концепция нормы позволяет также ввести понятие евклидова расстояния между двумя векторами  $x$  и  $y$ :

$$d_2(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - y(n))^2}. \quad (4.3)$$

### *Система базисных функций*

Рассмотрим векторное пространство  $\mathbb{C}^N$ . В этом пространстве можно определить систему базисных векторов, которые мы отождествляем с конечными последовательностями –  $\{\phi_k(n)\}$ ,  $n, k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Для простоты будем использовать следующую запись

$$\phi_k = [\phi_k(0) \phi_k(1) \dots \phi_k(N - 1)]^T. \quad (4.4)$$

Любой дискретный сигнал  $x(n)$  может быть представлен в виде

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\phi_k(n), \quad (4.5)$$

где  $c(k)$  – коэффициенты разложения сигнала по базису  $\{\phi_k\}$ , называемые *спектром* сигнала. Выбор  $\{\phi_k\}$  определяется, исходя математического и практического удобства.

Чтобы лучше понять выражение (4.5) его лучше представить в векторной форме:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = c(0) \begin{bmatrix} | \\ \Phi_0 \\ | \end{bmatrix} + c(1) \begin{bmatrix} | \\ \Phi_1 \\ | \end{bmatrix} + \dots + c(N-1) \begin{bmatrix} | \\ \Phi_{N-1} \\ | \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Из этого выражения следует, что мы ищем возможность представить дискретный сигнал  $x(n)$  в виде линейной комбинации базисных векторов  $\{\Phi_k\}$ , а  $c(k)$  выступают в роли весовых коэффициентов.

Выражение (4.6) можно также переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \Phi_0 & \Phi_1 & \dots & \Phi_{N-1} \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(0) \\ \vdots \\ c(N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{x} = \Phi \cdot \mathbf{c}, \quad (4.7)$$

где  $\mathbf{c} = [c(0) \ c(1) \ \dots \ c(N-1)]^T$ , а  $\Phi$  – матрица, столбцами которой являются базисные вектора.

Как правило, стремятся, чтобы базисная система векторов обладала следующими свойствами:

1. Векторы системы должны быть линейно независимы, т. е.

$$a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + \dots + a_{N-1}\Phi_{N-1} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

при любых значениях коэффициентов  $a_k$ , кроме случая, когда все коэффициенты равны нулю.

2. Система векторов должна быть ортогональной:

$$\langle \Phi_k, \Phi_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_k(n)\Phi_l^*(n) = \begin{cases} E, & k = l, \\ 0, & k \neq l; \end{cases} \quad (4.8)$$

где  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  – вычисление скалярного произведения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , выражение  $z^*$  – комплексное число сопряженное с  $z$ . Если  $E = 1$ , то система функций называется ортонормированной.

3. Система векторов должна быть полной. Это значит, что к ней нельзя добавить ни одного вектора, который был бы ортогонален остальным векторам системы.

Теперь можно найти выражение для вычисления коэффициентов  $c(k)$  из разложения (4.5):

$$x = c(0)\phi_0 + c(1)\phi_1 + \dots + c(N-1)\phi_{N-1}$$

Для нахождения  $c(k)$  вычислим скалярное произведение на  $\phi_k$  слева и справа

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \phi_k \rangle &= c(0)\langle \phi_0, \phi_k \rangle + c(1)\langle \phi_1, \phi_k \rangle + \dots + c(N-1)\langle \phi_{N-1}, \phi_k \rangle = \\ &= c(k)\langle \phi_k, \phi_k \rangle = c(k)E \end{aligned}$$

Или

$$c(k) = \frac{1}{E} \langle \mathbf{x}, \phi_k \rangle = \frac{1}{E} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\phi_k^*(n). \quad (4.9)$$

Результат (4.9) имеет большое практическое значение. Оказывается, если у нас есть система базисных ортогональных векторов, то для того, чтобы выяснить какой вклад в сигнал  $x(n)$  вносит вектор  $\phi_k$  достаточно вычислить скалярное произведение сигнала на этот вектор. Другими словами  $c(k)$  является проекцией анализируемого сигнала  $x(n)$  на базисный вектор  $\phi_k$ . Если вычислить проекции сигнала  $x(n)$  на все  $N$  базисных векторов, т. е. если найти все  $c(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , то мы получим новое представление сигнала  $x(n)$ . В случае использования базиса Фурье, о котором речь пойдет далее, получаемое представление  $c(k)$  называется **частотным представлением** сигнала.

### **Базис ДПФ**

Для того, чтобы из общей конструкции (4.9) получить ДПФ необходимо на базисные векторы наложить ограничения. Вспомним, что ДПФ описывает строго  $N$ -периодичные сигналы, т. е.  $x(n) = x(n+N)$ , значит базисные функции должны также удовлетворять этому свойству:

$$\phi_k(n) = \phi_k(n+N). \quad (4.10)$$

Рассмотрим следующее семейство конечных комплексных экспонент:

$$w_k(n) = e^{j\omega_k n}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.11)$$

где  $\omega_k$  – различные частоты, которые удовлетворяет нашим требованиям. Для определения этих частот, заметим, что для того чтобы в последовательность  $w_k(n)$  длины  $N$  укладывалось целое число периодов, она должна удовлетворять условию

$$w_k(0) = w_k(N) = 1,$$

которое, учитывая выражение (4.11), принимает следующий вид

$$(e^{j\omega_k})^N = 1.$$

Данное уравнение имеет  $N$  различных решений, которые представляют собой  $N$  корней из единицы  $e^{j2\pi k/N}$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ . Если мы определим комплексное число

$$W_N = e^{-j2\pi/N},$$

то выражение (4.11) может быть записано как

$$w_k(n) = W_N^{-nk}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.12)$$

Таким образом:

$$\mathbf{w}_k = \left[ 1 \ W_N^{-k} \ W_N^{-2k} \ \dots \ W_N^{-(N-1)k} \right]^T. \quad (4.13)$$

На рисунках 4.1 – 4.4 приведены некоторые примеры векторов Фурье базиса для случая  $N = 32$ .

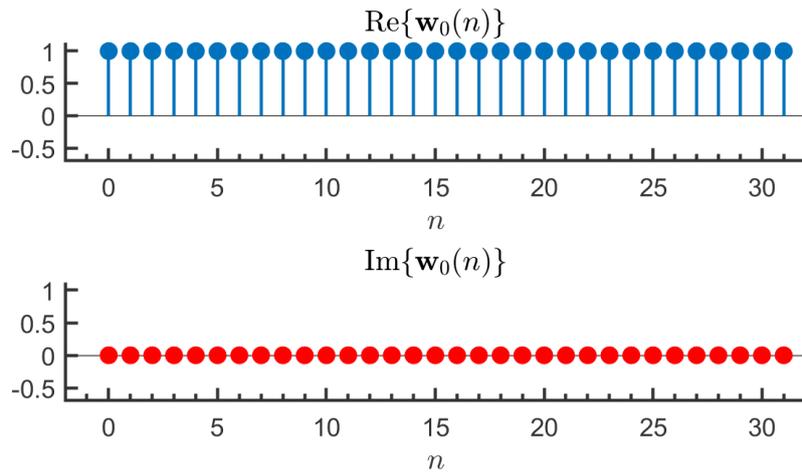


Рисунок 4.1. Базисный вектор  $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^{32}$

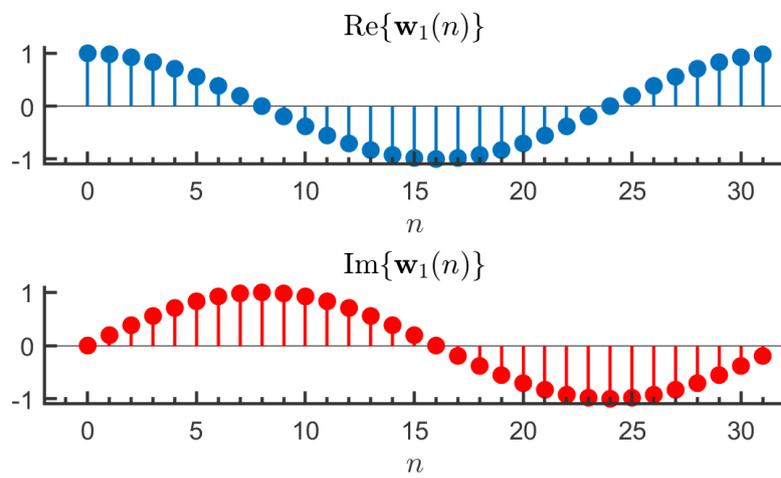


Рисунок 4.2. Базисный вектор  $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{C}^{32}$

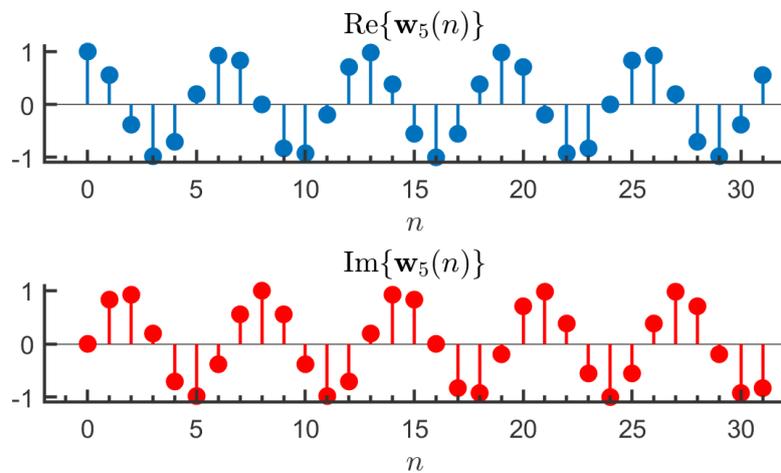


Рисунок 4.3 – Базисный вектор  $\mathbf{w}_5 \in \mathbb{C}^{32}$

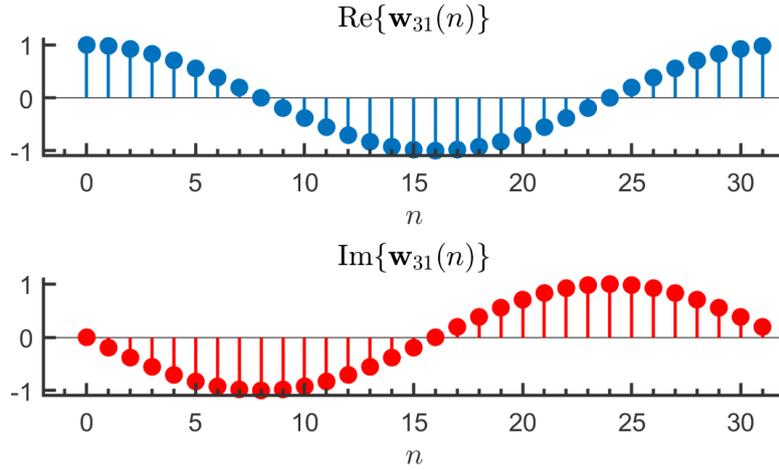


Рисунок 4.4 – Базисный вектор  $\mathbf{w}_{31} \in \mathbb{C}^{32}$

### Ортогональность базиса ДПФ

Проверим, является ли  $\{\mathbf{w}_k\}$  множеством ортогональных векторов.

В начале заметим, что  $(W_N^{-k})^* = W_N^k$ :

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_l \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{(m-l)i} = \begin{cases} N, & m = l \\ \frac{1 - W_N^{(m-l)N}}{1 - W_N^{(m-l)}} = 0, & m \neq l \end{cases} \quad (4.14)$$

поскольку  $W_N^{iN} = 1$  для любого  $i \in \mathbb{Z}$ . В более компактной форме мы можем записать последнее выражение следующим образом:

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_l \rangle = N\delta(m - l). \quad (4.15)$$

Таким образом, система векторов  $\{\mathbf{w}_k\}_{k=0,1,\dots,N-1}$  является базисом Фурье для векторного пространства  $\mathbb{C}^N$  или, что тоже – для пространства сигналов длины  $N$ . Также мы можем видеть, что этот базис не ортонормирован, поскольку  $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle = \|\mathbf{w}_k\|^2 = N$ . Однако он легко может быть превращен в ортонормированный, если отмасштабировать исходный на коэффициент  $1/\sqrt{N}$ .

### Явная форма записи ДПФ

Чаще всего в литературе по ЦОС приводят формулы ДПФ, записанные в явной форме, которые имеют вид (4.9), только с конкретизацией базиса ДПФ.

В частности, мы имеем две формулы: *анализа*:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad (4.16)$$

и *синтеза*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad (4.17)$$

где  $n, k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Выражение (4.16) также называют *прямым ДПФ*, а формулу (4.17) *обратным ДПФ*.

Часто вместо выражений (4.16) и (4.17) используют операторный способ записи ДПФ и ОДПФ:

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\}, \\ x(n) &= \text{IDFT}\{X(k)\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты ДПФ  $X(k)$  имеют комплексные значения и чаще всего представляются в полярной форме:

$$X(k) = |X(k)|e^{j \arg X(k)}.$$

Если на практике выполняют анализ сигнала  $x(n)$  с использованием ДПФ (4.16), то на графике отображают только модуль  $|X(k)|$ , поскольку он несет основную информацию о спектральном составе сигнала. Фазовый спектр  $\arg X(k)$  отображают, только если он представляет какой-то интерес.

Давайте посмотрим, что же представляет из себя ДПФ некоторых простых сигналов. На рисунке 4.5 показано ДПФ сигнала  $x(n) = \cos \frac{2\pi 4n}{32}$ .

Частота сигнала  $x(n)$  соответствует двум базисным векторам ДПФ –  $w_4(n)$  и  $w_{28}(n)$ , и в результате ортогональности базиса только коэффициенты  $X(4)$  и  $X(28)$  оказываются ненулевыми. Почему же все-таки так происходит? Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Ключом к пониманию результата, показанного на рис. 4.5, является представление косинуса в виде суммы двух комплексных экспонент:

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi 4n}{32}\right) = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi 4n}{32}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi 4n}{32}}. \quad (4.1811)$$

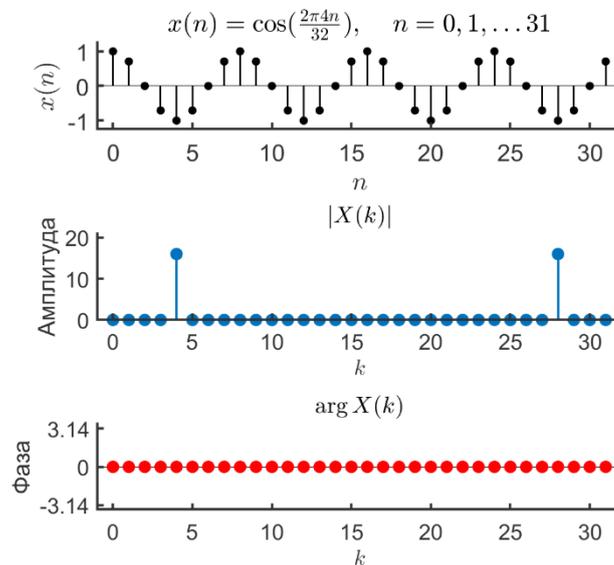


Рис. 4.5. Синусоидальный сигнал и его ДПФ

Легко заметить, что первая экспонента  $e^{j\frac{2\pi 4n}{32}}$  является ничем иным, как базисным вектором ДПФ  $\mathbf{w}_4(n)$ . На первый взгляд вторая экспонента в выражении (4.1811) не совпадает ни с каким вектором из базиса ДПФ, однако это не так. Воспользуемся периодичностью дискретной комплексной экспоненты и прибавим к показателю степени  $2\pi$ :

$$e^{j(\frac{-2\pi 4n}{32} + 2\pi)} = e^{j\frac{2\pi(32-4)n}{32}} = e^{j\frac{2\pi 28n}{32}} = \mathbf{w}_{28}(n). \quad (4.19)$$

Таким образом, выражение (4.1811) можно переписать в виде

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi 4n}{32}\right) = \frac{1}{2} \mathbf{w}_4(n) + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{28}(n). \quad (4.20)$$

Воспользуемся представлением (4.20) для того, чтобы вычислить ДПФ. Напомним, что мы представляем себе ДПФ как операцию выполнения проекции исходного вектора  $x(n)$  на базис ДПФ (см. выражение (4.9)), т. е.

$$X(k) = \langle x(n), \mathbf{w}_k(n) \rangle \quad (4.21)$$

Теперь перепишем (4.21), учитывая (4.20):

$$X(k) = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{w}_4(n) + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{28}(n), \mathbf{w}_k(n) \right\rangle. \quad (4.22)$$

Осталось вспомнить, что векторы, составляющие базис ДПФ, являются ортогональными, поэтому, если мы примем во внимание (4.15), сможем записать (4.22) в окончательном виде

$$X(k) = \frac{N}{2} \delta(k - 4) + \frac{N}{2} \delta(k - 28). \quad (4.23)$$

Если учесть, что в рассматриваемом примере (4.1811)  $N = 32$ , то нам станет понятно, откуда в графике модуля ДПФ  $|X(k)|$  появились две частотные составляющие с амплитудой 16 на индексах с номерами 4 и 28.

На рис. 4.6 показан этот же сигнал, но имеющий ненулевой фазовый сдвиг. Можно заметить, что амплитудный спектр сигнала не изменился, однако фазовый сдвиг отразился в фазовом спектре.

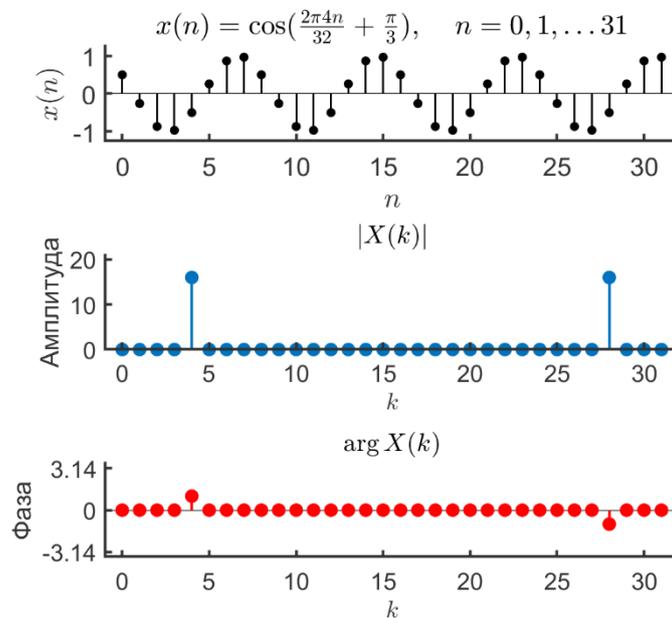


Рис. 4.6. Синусоидальный сигнал с фазовым сдвигом и его ДПФ

На рис. 4.7 показан пример синусоидального сигнала с частотой, которая не совпадает с частотой ( $\omega = 2\pi 4,6/32$ ), которая не совпадает ни с одной из частот базисных векторов ДПФ.

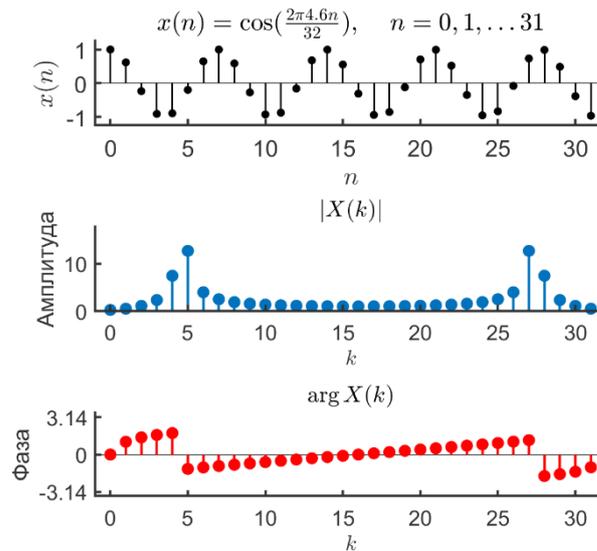


Рис. 4.7. Временное и частотное представление сигнала с частотой не кратной частоте базисных функций ДПФ

В результате мы видим, что для восстановления такого сигнала нужны все базисные функции. Очевидно, что амплитуды компонент больше для тех частот, которые близки к исходной частоте сигнала (в данном случае это частота сигнала находится между  $4 \frac{2\pi}{32}$  и  $5 \frac{2\pi}{32}$ ).

### ***Симметрия ДПФ***

Если сигнал  $x(n)$  принимает вещественные значения, то его ДПФ  $X(k)$  симметрично относительно отсчета  $k = N/2$ , т. е. удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{Re}\{X(k)\} = \operatorname{Re}\{X(N - k)\}, \quad (4.24)$$

$$\operatorname{Im}\{X(k)\} = -\operatorname{Im}\{X(N - k)\}, \quad (4.25)$$

$$|X(k)| = |X(N - k)|, \quad (4.26)$$

$$\arg X(k) = -\arg X(N - k). \quad (4.27)$$

Примеры приведенных типов симметрии мы уже видели на рис. 4.5–4.7.

Выражения (4.24)–(4.27) показывают, что действительная часть  $X(k)$  имеет четную симметрию (или просто симметрию), а мнимая – нечетную симметрию (или антисимметрию). Модуль  $X(k)$  имеет четную симметрию, а фаза – нечетную симметрию.

Докажем, что

$$\operatorname{Re}\{X(k)\} = \operatorname{Re}\{X(N - k)\}. \quad (4.28)$$

Для этого вспомним, что

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[ \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right],$$

Откуда  $\operatorname{Re}\{X(k)\}$  и  $\operatorname{Re}\{X(N - k)\}$  можно записать как

$$\operatorname{Re}\{X(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

$$\operatorname{Re}\{X(N - k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi n(N - k)}{N}\right).$$

Мы также знаем, что

$$\cos\left(2\pi nk - \frac{2\pi nk}{N}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

Таким образом мы доказали справедливость (4.28).

Нечетная симметрия мнимой части доказывается аналогично

$$\operatorname{Im}\{X(k)\} = -\operatorname{Im}\{X(N - k)\}. \quad (4.29)$$

Поскольку

$$\operatorname{Im}\{X(k)\} = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

а

$$\operatorname{Im}\{X(N-k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right).$$

При этом

$$\sin\left(2\pi nk - \frac{2\pi nk}{N}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

следовательно, выражение (4.29) справедливо.

Опираясь на данные свойства симметрии легко показать, что модуль  $X(k)$  обладает четной симметрией:

$$|X(k)| = |X(N-k)|. \quad (4.30)$$

Вспомним, что

$$\begin{aligned} |X(k)| &= \sqrt{\operatorname{Re}^2\{X(k)\} + \operatorname{Im}^2\{X(k)\}} = \\ &= \sqrt{\operatorname{Re}^2\{X(N-k)\} + \operatorname{Im}^2\{X(N-k)\}} = |X(N-k)|. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Свойство (4.30) можно доказать и непосредственно. Для этого распишем левую часть по  $|X(k)|$ :

$$|X(k)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \right|,$$

и правую часть (4.30):

$$|X(N-k)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi n(N-k)}{N}} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \right|,$$

поскольку  $e^{-j\frac{2\pi nN}{N}} = 1$ .

Нечетная симметрия фазы  $X(k)$ :

$$\angle X(k) = -\angle X(N - k),$$

также следует из свойств симметрии действительной и мнимой части  $X(k)$ , если вспомнить, что

$$\angle X(k) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}\{X(k)\}}{\operatorname{Re}\{X(k)\}} \right),$$

а

$$\begin{aligned} \angle X(N - k) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}\{X(N - k)\}}{\operatorname{Re}\{X(N - k)\}} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{-\operatorname{Im}\{X(k)\}}{\operatorname{Re}\{X(k)\}} \right) = \\ &= -\operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}\{X(k)\}}{\operatorname{Re}\{X(k)\}} \right) = -\angle X(k). \end{aligned}$$

### ***ДПФ четных и нечетных сигналов***

Если  $x(n)$  – четный сигнал  $x_{\text{ч}}(n)$ , т. е.  $x_{\text{ч}}(n) = x_{\text{ч}}(-n)$ , в случае  $N$ -периодических последовательностей имеем  $x_{\text{ч}}(n) = x_{\text{ч}}(N - n)$ , то

$$\operatorname{DFT}\{x_{\text{ч}}(n)\} = X_{\text{ч}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\text{ч}}(n) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (4.32)$$

Это означает, что четный сигнал раскладывается только по косинусным функциям, которые в свою очередь представляют из себя четные сигналы.

Если  $x(n)$  – нечетный сигнал  $x_{\text{н}}(n)$ , т. е.  $x_{\text{н}}(n) = -x_{\text{н}}(-n)$ , в случае  $N$ -периодических последовательностей имеем  $x_{\text{н}}(n) = -x_{\text{н}}(N - n)$ , то

$$\operatorname{DFT}\{x_{\text{н}}(n)\} = X_{\text{н}}(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x_{\text{н}}(n) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (4.33)$$

Выражение (4.33) показывает, что в разложении  $x_{\text{н}}(n)$  участвуют только синусоидальные последовательности, которые сами по себе также представляют собой нечетные сигналы. Другими словами, сигнал  $x_{\text{н}}(n)$  имеет нулевую проекцию на функции вида  $\cos(2\pi nk/N)$ , поэтому  $\operatorname{Re}\{X_{\text{н}}(k)\} = 0$ .

### ***Теорема Парсеваля***

Нормированная энергия сигнала равна

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2. \quad (4.34)$$

Правая часть уравнения (4.34) – это среднеквадратическая амплитуда, а левая часть – сумма квадратов амплитуд временного ряда.

Например, рассмотрим ДПФ для сигнала длины 2:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1), \\ X(1) &= x(0) - x(1). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что для данного примера теорема Парсеваля выполняется:

$$X^2(0) + X^2(1) = (x(0) + x(1))^2 - (x(0) - x(1))^2 = 2(x^2(0) + x^2(1)).$$

### ***Линейность ДПФ***

Если последовательности  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  имеют  $N$ -точечные ДПФ  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$ , то

$$\text{DFT}\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} = \alpha X_1(k) + \beta X_2(k).$$

Используя это свойство, важно убедиться, что исходные последовательности имеют одинаковую длину. Если  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  различной длины, то более короткая последовательность должна быть дополнена нулями. Например, если  $x_1(n)$  имеет длину  $N_1$ , а  $x_2(n)$  имеет длину  $N_2$ , причем  $N_2 > N_1$ , то  $x_1(n)$  можно рассматривать как последовательность длины  $N_2$ , которая имеет на конце  $N_2 - N_1$  нулей, таким образом от обеих последовательностей можно вычислить ДПФ длины  $N_2$ .

### Свойство сдвига во временной и частотной области

Справедливо следующее соотношение:

$$\text{DFT}\{x(n - m)\} = X(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}. \quad (4.35)$$

Выражение (4.35) показывает, что сдвиг временного сигнала на  $m$  отсчетов соответствует умножению его ДПФ-образа на комплексную экспоненту  $e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$ . Однако, поскольку представление сигнала посредством ДПФ подразумевает периодическое продолжение сигнала, то в результате сдвига произойдет циклический сдвиг. Поэтому выражение (4.35) можно переписать, как

$$\text{DFT}\{x(\langle n - m \rangle_N)\} = X(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}, \quad (4.36)$$

где  $\langle a \rangle_N$  обозначает операцию нахождения остатка от деления числа  $a$  на  $N$ .

Аналогичным образом можно показать, что

$$\text{DFT}\left\{x(n)e^{j\frac{2\pi mk}{N}}\right\} = X(\langle k - m \rangle_N). \quad (4.37)$$

Свойство частотного сдвига проиллюстрировано на рис. 4.8.

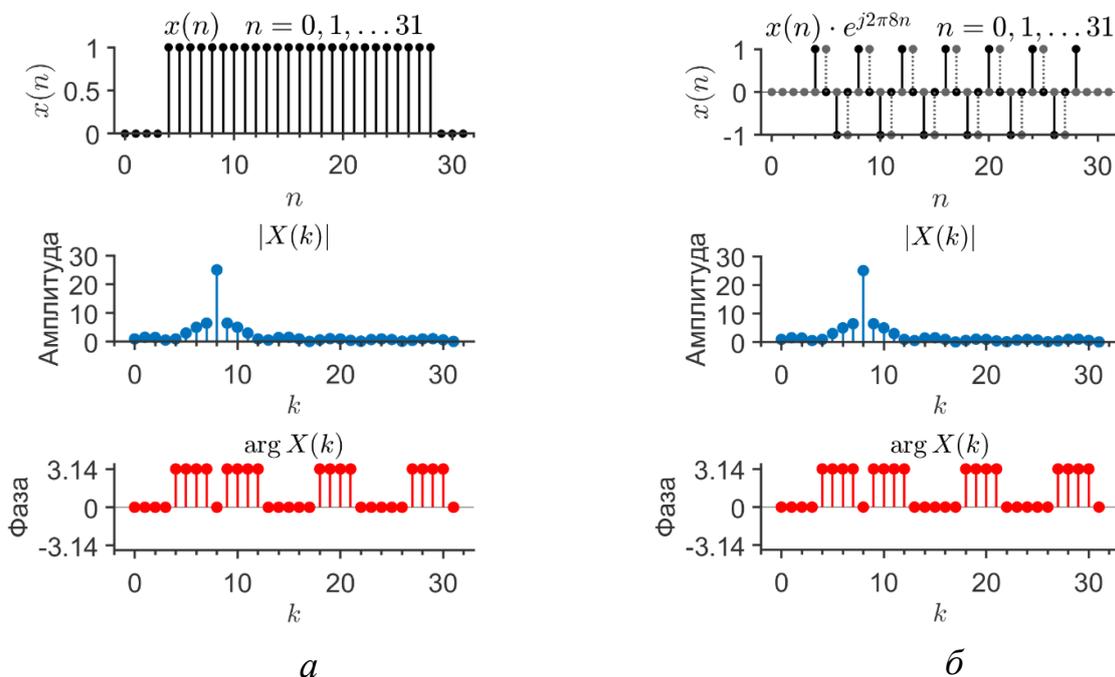


Рис. 4.8 – Свойство частотного сдвига ДПФ:

*а* – исходный сигнал и его спектр;

*б* – сигнал после умножения на экспоненту и его спектр

### ***Свойство обращения времени***

Если  $X(k)$  есть ДПФ вещественного сигнала  $x(n)$ , то обращенный во времени сигнал  $x(\langle -n \rangle_N)$  имеет следующее ДПФ:

$$\text{DFT}[x(\langle -n \rangle_N)] = X^*(k).$$

Заметим, что  $|X(k)| = |X^*(k)|$ . Таким образом, амплитудный спектр сигнала не меняется при обращении времени.

### ***Круговая (периодическая) свертка***

ДПФ можно использовать для вычисления круговой свертки:

$$\text{DFT}\{x_1(n) \circledast x_2(n)\} = X_1(k)X_2(k), \quad (4.38)$$

где  $x_1(n), x_2(n)$  – конечные периодические последовательности одинаковой длины.

Выражение (4.38) можно записать как:

$$x_3(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n - m \rangle_N) = \text{IDFT}\{X_1(k)X_2(k)\}.$$

Приведем небольшой пример. Так линейная (нециклическая) свертка последовательности  $x_0, x_1, x_2, x_3$  с другой последовательностью  $y_0, y_1, y_2, y_3$  дает

$$\begin{aligned} x * y &= x_0y_0, \\ & x_0y_1 + x_1y_0, \\ & x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0, \\ & x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0, \\ & x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1, \\ & x_2y_3 + x_3y_2, \\ & x_3y_3. \end{aligned}$$

Круговая (циклическая) свертка этих же последовательностей имеет вид

$$\begin{aligned}
 x \circledast y &= x_0y_0 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1, \\
 & x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 + x_3y_2, \\
 & x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 + x_3y_3, \\
 & x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0, \\
 & x_0y_0 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1, \\
 & x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 + x_3y_2, \\
 & x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 + x_3y_3.
 \end{aligned}$$

Если исходные последовательности дополнить нулями, то с помощью ДПФ можно вычислить линейную свертку.

### ***Теорема о свертке в частотной области***

Уравнение (4.39) – формулировка теоремы о свертке в частотной области:

$$\text{DFT}[x_1(n)x_2(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \circledast X_2(k). \quad (4.39)$$

Выражение (4.38) дает основания утверждать, что свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной, тогда как (4.39) приводит к наблюдению о том, что свертка в частотной области эквивалентна умножению во временной.

### ***Перестановка коэффициентов ДПФ***

Необходимо всегда помнить, что ДПФ является  $N$ -периодической последовательностью, поэтому для него справедливо равенство:

$$X(k + mN) = X(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.40)$$

Рассмотрим 8-точечный сигнал

$$x(n) = \cos(2\pi fn), \quad f = \frac{1}{8}, \quad n = 0, 1, \dots, 7.$$

Его ДПФ будет иметь вид:

$$X = [0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4],$$

Таким образом, коэффициенты ДПФ расположены следующим образом:

$$X(0), X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7).$$

Формально все правильно, но интуитивно воспринимается плохо. Мы видим, что в конце массива имеется ненулевой компонент, что может наводить на мысль, что в сигнале есть какая-то компонента с высокой частотой. На самом деле более предпочтительно представление, в котором имеются отрицательные частоты. По аналогии с тем, как мы расписываем косинус по формуле Эйлера:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$$

исходя из которой, мы видим, что косинус состоит из двух экспонент с положительной и отрицательной частотой. В этом же смысле и для ДПФ предпочтительнее следующий порядок выходных коэффициентов:

$$X(-4), X(-3), X(-2), X(-1), X(0), X(1), X(2), X(3).$$

Как найти  $X(-k)$ ? Нужно использовать свойство периодичности (4.40). Тогда получим:

$$X(5) = X(-3), X(6) = X(-2), X(7) = X(-1), X(4) = X(-4).$$

В MATLAB есть функция выполняющая данный сдвиг – `fftshift`.

```
>> X = fft(cos(2*pi*1/8*(0:7)))
X =
     0     4     0     0     0     0     0     4
>> Xs = fftshift(X)
Xs =
     0     0     0     4     0     4     0     0
k=  -4    -3    -2    -1     0     1     2     3
```

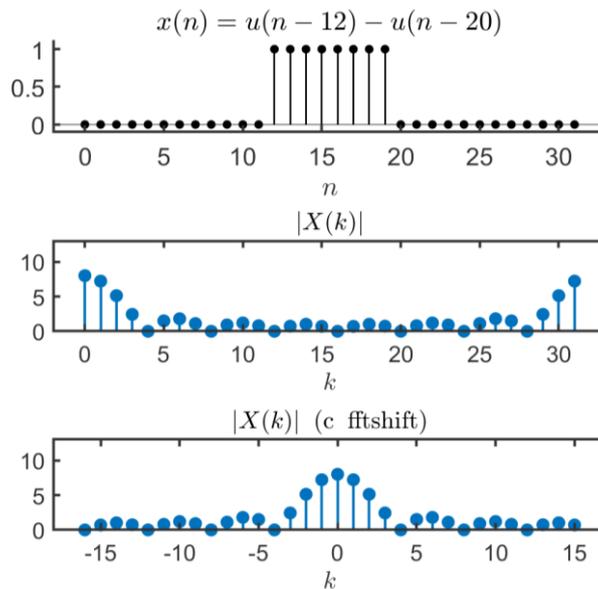


Рис. 4.9. Пример использования перестановки `fftshift`

На рис. 4.9 приведен пример вычисления ДПФ от дискретного прямоугольного импульса, показан его амплитудный спектр, а также выполнена операция перестановки коэффициентов ДПФ. Полученное представление более наглядно, поскольку лучше отражает тот факт, что основная энергия данного сигнала сконцентрирована в низкочастотном диапазоне (т. е. около частоты с индексом 0).

***Какое значение имеет индекс  $k$  в обозначении ДПФ  $X(k)$ ?***

После вычисления ДПФ от последовательности  $x(n)$ , которая обычно получается путем дискретизации сигнала  $x(t)$ , нас может интересовать значение частоты компоненты с максимальной амплитудой  $|X(k)|$ . Выводя график  $|X(k)|$ , обычно по горизонтальной оси мы откладываем частотный индекс  $k$ . Однако как этот индекс соотносится с реальной физической частотой, которая содержалась в исходном сигнале  $x(t)$ ?

Предположим, что в результате дискретизации  $x(t)$  мы получили дискретный сигнал  $x(n)$  длины  $N$  такой, что в нем содержится ровно один период функции косинус. Это можно записать следующим образом

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1}{N} n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.41)$$

Мы специально ввели умножение на единицу, чтобы показать, что сигнал содержит ровно один период функции косинус.

Сигнал (4.41) можно также записать, используя понятие нормированной частоты (см. выражение (1.10)):

$$x(n) = \cos(2\pi fn), \quad (4.42)$$

где  $f = 1/N$ .

Из предыдущих разделов мы уже знаем, что ДПФ от сигнала (4.41) будет равно

$$X(k) = \frac{N}{2} \delta(k - 1) + \frac{N}{2} \delta(k - (N - 1)), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.43)$$

Т. е. основная информация попадет на частотный отсчет с номером  $k = 1$ , второй частотный отсчет  $k = N - 1$ , на котором также содержится информация является лишь следствием симметрии ДПФ (4.28). Теперь вернемся к дискретному сигналу (4.41) и попробуем ответить на вопрос: какова была реальная аналоговая частота  $F$  этого сигнала до дискретизации? Естественно, чтобы ответить на этот вопрос мы должны знать частоту дискретизации  $f_s$ . Поскольку мы считаем ее известной, то можем вычислить, умножая нормированную частоту на  $f_s$ :

$$F = f \cdot f_s = \frac{f_s}{N}. \quad (4.44)$$

Зафиксируем этот результат. Дискретный сигнал (4.41) при частоте дискретизации  $f_s$  соответствует аналоговому сигналу с частотой  $F = f_s/N$ . Получается, что значение ДПФ  $X(1)$  соответствует частоте  $F = f_s/N$ . Если бы исходный сигнал имел нормированную частоту  $f = 2/N$  (т. е. в  $N$  отсчетов укладывалось бы 2 периода), то ДПФ  $X(k)$  содержало бы информацию на отсчете с номером  $k = 2$ , а аналоговая частота сигнала равнялась  $F = 2 \cdot f_s/N$ . В общем случае, для сигнала с нормированной частотой  $f = m/N$  имеем ненулевой отсчет ДПФ  $X(m)$  и частотой равной  $F = m \cdot f_s/N$ .

Таким образом мы выяснили, что отсчету ДПФ  $X(k)$  с целым индексом  $k$  соответствует аналоговая частота

$$F_k = k \frac{f_s}{N}. \quad (4.45)$$

Таким образом, зная частоту дискретизации сигнала мы всегда можем отмасштабировать частотную ось на графике, чтобы вместо частотного индекса  $k$  на нем отображались аналоговые частоты  $F_k$ .

Расстояние между двумя последовательными значениями  $k$  часто называют **частотным разрешением ДПФ**

$$\Delta f = f_s/N. \quad (4.46)$$

Допустим, что максимальное значение  $|X(k)|$  соответствует индексу  $k_m$ , тогда значение аналоговой частоты равно

$$\frac{k_m f_s}{N} \text{ Гц.}$$

### ***Применение MATLAB для расчета ДПФ сигнала***

Ниже приведен пример как можно при помощи MATLAB вычислить ДПФ сигнала

$$x(n) = \sin^3 \left( 2\pi \frac{2}{N} n \right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.47)$$

для  $N = 40$ . В примере также показано, как построить график сигнала во временной области и отобразить действительную и мнимую часть ДПФ.

```
f = @(n,N)(sin(2*pi*(2/N*(0:N-1))).^3);
N = 40;
n = 0:N-1;      % Временные отсчеты
x = f(n,N);     % Вычисление сигнала
X = fft(x);     % Вычисление ДПФ
k = 0:N-1;     % Частотный индекс

figure('Position',[100 100 800 450]);
subplot(2,2,[1 2]); stem(n,x,'LineWidth',1.5);

xlabel('$n$', 'interp', 'latex');
title('$x(n)$', 'interp', 'latex');

subplot(2,2,3); stem(k,real(X),'LineWidth',1.5);
xlabel('$k$', 'interp', 'latex');
title('$\mathrm{Re}\{X(k)\}$', 'interp', 'latex');
```

```

subplot(2,2,4); stem(k,imag(X),'r','Linewidth',1.5);
xlabel('$k$', 'interp', 'latex');
title('$\mathrm{Im}\{X(k)\}$', 'interp', 'latex');
FileName = 'Task_1.png';
print('-dpng', '-opengl', '-r300',FileName);

```

Результат работы программы представлен на рис. 4.10.

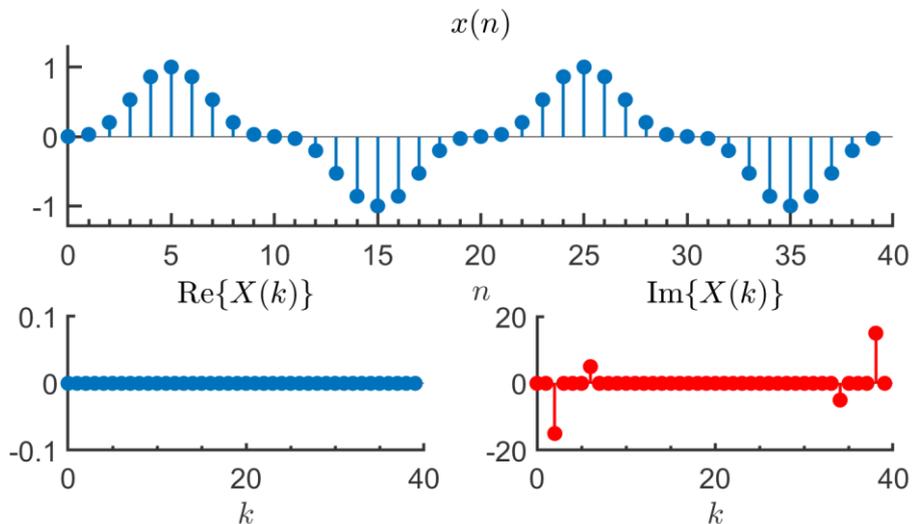


Рис. 4.10. ДПФ сигнала (4.19)

Поскольку исходный сигнал  $x(n)$  является нечетным, его ДПФ  $X(k)$  является мнимой функцией (см. выражение (4.33)). Полученный график это подтверждает, поскольку  $\operatorname{Re}\{X(k)\} = 0$ . Также на основании того, что исходный сигнал представляет собой вещественную функцию, его мнимая часть его ДПФ обладает свойством антисимметричности (4.25), что также видно из приведенного графика.

### ***Частотный анализ сигнала при помощи ДПФ***

Для анализа амплитудного спектра сигнала удобно отобразить на графике вместо частотных индексов реальные частоты (см. выражение (4.45)). Рассмотрим следующий пример. Пусть задан сигнал, состоящий из трех компонент:

$$x(n\Delta T) = A_1 \sin(2\pi f_1 n\Delta T) + A_2 \sin(2\pi f_2 n\Delta T) + A_3 \sin(2\pi f_3 n\Delta T) \quad (4.48)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – амплитуды, а  $f_1, f_2, f_3$  – частоты синусоидальных составляющих,  $n\Delta T$  – дискретное время.

Необходимо построить амплитудный спектр сигнала  $x(n\Delta T)$  и отобразить на графике реальные частоты. Ниже приведен MATLAB-код, выполняющий данную задачу.

```

fs = 1000;           % Частота дискретизации
N = 100;            % Длина сигнала
t = (0:N-1)*(1/fs); % Дискретное время

A = [0.1 0.3 0.05]; % Вектор амплитуд
f = [10 100 400];  % Вектор частот

x = A(1)*sin(2*pi*f(1).*t)+...
    A(2)*sin(2*pi*f(2).*t)+...
    A(3)*sin(2*pi*f(3).*t);

k = N/2 + 1;       % Частотные индексы
freq = (0:k-1)*(fs/N); % Частотная сетка
X = fft(x);        % Вычисление ДПФ
abs_X = abs(X(1:N/2+1)); % Половина амплитудного спектра

subplot(311);
stem(t,x,'filled','k','LineWidth',1.5,'MarkerSize',4); grid on;
xlabel('\it Время, c');
ylabel('\it Амплитуда');
title('$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t)$','interp','latex');

subplot(312);
stem([0:k-1],abs_X,"filled",'LineWidth',1.5); grid on;
xlabel('\it Частотный индекс, k');
ylabel('\it Амплитуда');
title('$|X(k)|$','interp','latex');

subplot(313);
stem(freq,abs_X,"filled",'LineWidth',1.5);grid on;
xlabel('\it Частота, Гц');
ylabel('\it Амплитуда');
title('$|X(k)|$','interp','latex');

print('-dpng', '-opengl','-r200', 'fft_real_freq.png');

```

Результат работы программы представлен на рис. 4.11. В спектре  $|X(k)|$  отчетливо видны все три компоненты сигнала (4.48). Нижний график также позволяет выявить реальные частоты компонент, содержащихся в сигнале. Остается лишь одна деталь – мы не видим в спектре реальных амплитуд частотных компонент. Так, например, значение  $|X(1)|$ , которое соответствует компоненте с частотой 10 Гц, равно 5, хотя из приведенного кода видно, что реальная амплитуда компоненты с частотой 10 Гц равняется  $A_1 = 0,1$ . Чтобы понять почему так произошло следует обратиться к выражению (4.43), из которого становится понятно, что дискретный синусоидальный сигнал с единичной амплитудой будет в спектре ДПФ давать амплитудное значение  $N/2$ . Соответственно, чтобы увидеть реальные значения амплитуд синусоидальных компонент сигнала нужно отсчеты ДПФ  $X(k)$  разделить на  $N/2$ . Единственное исключение будет только для компоненты  $X(0)$ , которую необходимо для нормировки делить на  $N$ .

Таким образом, нормировка амплитудного спектра описывается выражением:

$$X_{norm}(k) = \begin{cases} X(k)/N, & k = 0, \\ X(k)/(N/2), & k \neq 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

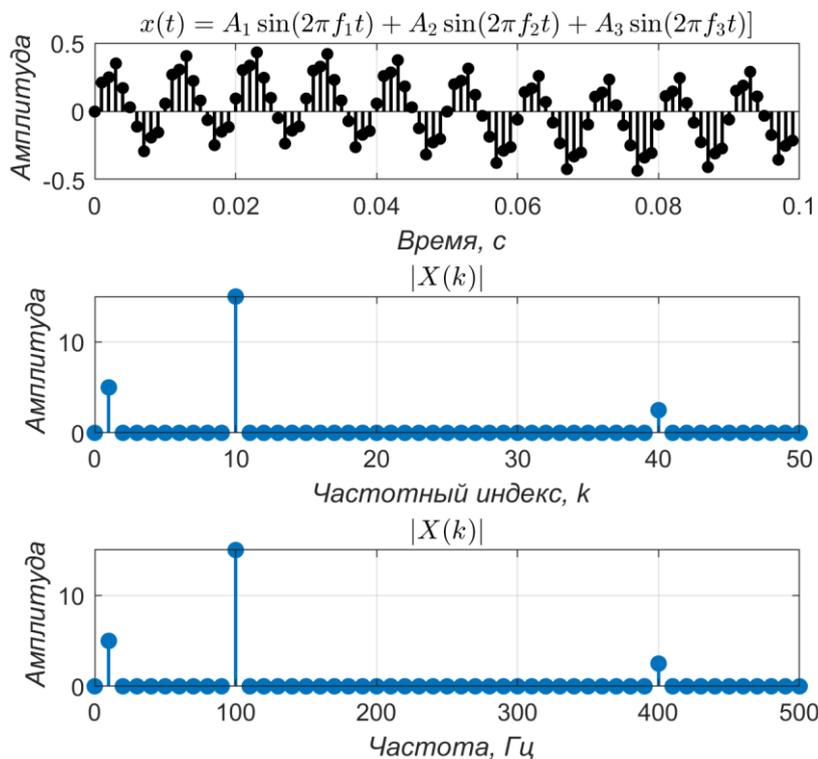


Рис. 4.11. ДПФ сигнала (4.48)

После выполнения описанной нормировки амплитудный спектр рассматриваемого сигнала будет выглядеть, как показано на рис. 4.12.

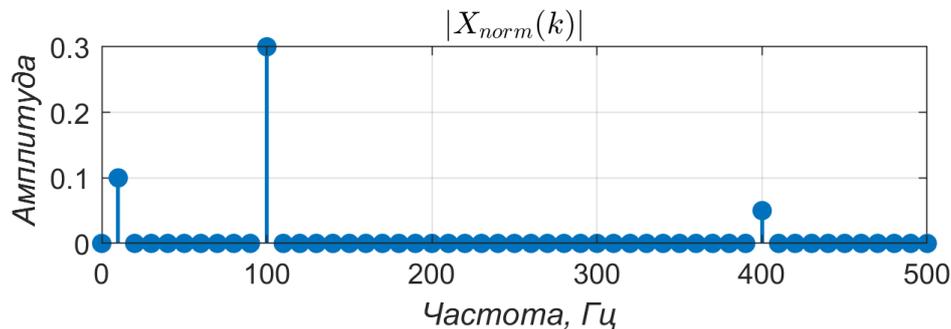


Рис. 4.12. Амплитудный спектр сигнала (4.48) после нормировки (4.49)

Можно заметить, что компоненты спектра на рис. 4.12 совпадают с амплитудами, которые мы задавали в приведенном выше коде:  $|X_{norm}(1)| = A_1 = 0,1$ ,  $|X_{norm}(10)| = A_2 = 0,3$ , а  $|X_{norm}(40)| = A_3 = 0,05$ . Приведенный пример может показаться достаточно тривиальным, поскольку мы заранее знали количество синусоидальных компонент, которые содержатся в сигнале. Однако, если представить, что нам известны лишь отсчеты сигнала во временной области, показанные на верхнем графике рис. 4.11, то окажется, что без такого инструмента, как ДПФ, далеко не так просто определить, какие именно синусоидальные компоненты входят в состав сигнала. При помощи ДПФ мы не только смогли определить количество компонент, но и нашли значение их частот и амплитуд.

#### ***Применение ДПФ: интерполяция сигнала во временной области***

Путь есть рассчитанное ДПФ от  $N$ -точечной последовательности  $x(n)$ :

$$X(k) = \text{DFT}\{x(n)\}.$$

Если мы хотим получить в  $M$  раз больше отсчетов во временной области, то мы должны добавить  $(N - 1)M$  нулей в середину массива  $X(k)$  и таким образом получить последовательность  $X_{int}(k)$  длиной  $NM$ . Далее необходимо для  $X_{int}(k)$  узнать обратное ДПФ, чтобы получить интерполированную версию сигнала во временной области:

$$x_{int}(n) = \text{IDFT}\{X_{int}(k)\}.$$

Чтобы быть уверенными, что интерполированная последовательность будет иметь только вещественные значения, нужно обеспечить симметричную комплексную сопряженность коэффициентов  $X_{int}(k)$ . Если последовательность  $X(k)$  содержит ненулевой отсчет  $X(N/2)$ , т. е. компоненту, соответствующую  $f_s/2$ , то необходимо выполнить следующие шаги, чтобы гарантировать сохранность комплексно-сопряженной симметрии:

- 1) вычисляя  $N$ -точечное ДПФ последовательности  $x(n)$ , получите  $N$  частотных отсчетов  $X(k)$ ;
- 2) создайте массив  $X_{int}(k)$  длиной  $NM$ , заполненный нулями;
- 3) присвойте  $X_{int}(k) = X(k)$  для  $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ ;
- 4) присвойте  $X_{int}(\frac{N}{2})$  и  $X_{int}(MN - \frac{N}{2})$  значения равные  $X(\frac{N}{2})/2$ ;
- 5) присвойте  $X_{int}(MN - N + k) = X(k)$  для  $\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N - 1$ ;
- 6) вычисляя  $MN$ -точечное обратное ДПФ, получите интерполированную версию последовательности  $x_{int}(n)$ ;
- 7) в результате описанной процедуры интерполяции и происходит ослабление амплитуды на коэффициент  $1/M$ ; для восстановления исходной амплитуды последовательность необходимо умножить на  $M$ .

Ниже приведен пример того, как должно происходить формирования спектра сигнала для выполнения интерполяции в случае, когда  $N = 8$ , а  $M = 2$ .

Таблица 4.1

Модификация спектра сигнала, выполняемая для интерполяции

$k$	$X_{int}(k)$	$k$	$X_{int}(k)$
0	$X(0)$	8	0
1	$X(1)$	9	0
2	$X(2)$	10	0
3	$X(3)$	11	0
4	$X(4)/2$	12	$X(4)/2$
5	0	13	$X(5)$
6	0	14	$X(6)$
7	0	15	$X(7)$

## Кратковременное преобразование Фурье

Кратковременное преобразование Фурье (КВПФ) (англ. STFT – short-time Fourier transform) широко используется для анализа, модификации и синтеза звуковых сигналов. КВПФ можно рассматривать как преобразование со скользящим окном, которое имеет вид:

$$X(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(n + lL)e^{-j\omega_k n}, \quad (4.50)$$

где  $x(t)$  – входной дискретный сигнал (в данном случае мы используем переменную  $t$  для обозначения глобального индекса отсчетов сигнала),  $h(n)$  – ограниченная во времени оконная функция, а  $\omega_k = \frac{2\pi k}{M}$ ,  $k = 0, 1, \dots, M - 1$  – частотный индекс,  $L$  – временной шаг анализа (расстояние между соседними фреймами),  $l$  – номер фрейма анализа. Легко заметить, что (4.50) является вычислением дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для сигнала  $h(n)x(n + lL)$ . Таким образом,  $X(k, l)$  – это последовательность локализованных во времени спектров.

На рис. 4.13 приведен пример, как речевой сигнал  $x(t)$  разбивается на фреймы умножением на оконную функцию  $h(n)$ . В данном случае  $n$  – это «локальный» индекс времени внутри одного фрейма, который пробегает значения от 0 до  $N - 1$ . В приведенном на рис. 4.13 примере  $N = 1024$ , шаг анализа  $L = 512$ .

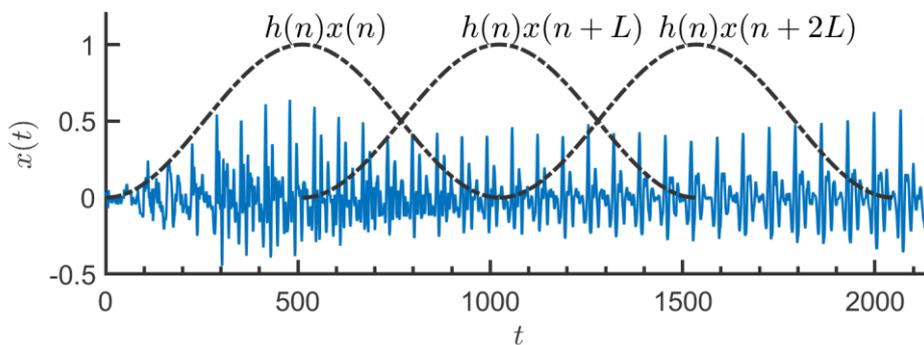


Рис. 4.13. Разбиение сигнала  $x(t)$  на фреймы

### Спектрограмма (частотно-временное представление сигнала)

КВПФ (4.50) позволяет получить **частотно-временное представление** сигнала  $x(n)$ . Вместо одномерного сигнала  $x(n)$  у нас появляется функция двух переменных  $X(k, l)$ , которая отражает частотный состав сигнала ( $k$  – индекс частоты) на фрейме с номером  $l$ :

$$X(k, l) = DFT\{h(n)x(n + lL)\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.51)$$

Отображая поверхность  $X(k, l)$ , можно увидеть динамику изменения частотного состава сигнала во времени. Учитывается, что  $X(k, l)$  принимает комплексные значения графически отображают модуль  $|X(k, l)|$ . Двумерное представление  $|X(k, l)|$  называют **спектрограммой** сигнала. Пример спектрограммы для речевого сигнала («да») показан на рис. 4.14.

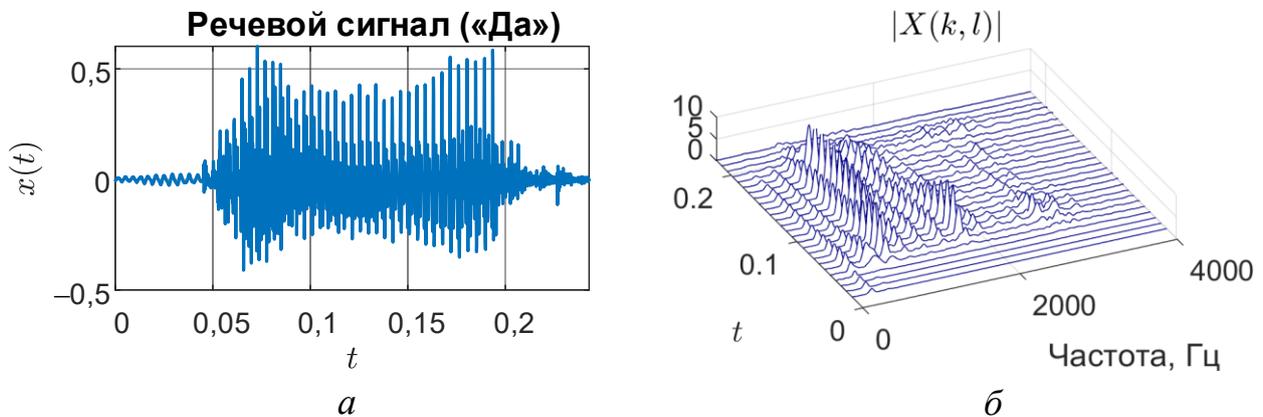


Рис. 4.14. Речевой сигнал («да»):

$a$  – представление во временной области;  $b$  – спектрограмма сигнала

Величины  $|X(k, l)|$  как правило, имеют большой динамический диапазон и изменяются в пределах от  $10^{-5}$  до 1, поэтому для удобства графического отображения часто переходят к логарифмическим единицам – децибелам:

$$Spec_{dB}(k, l) = 20 \log_{10}|X(k, l)|. \quad (4.52)$$

Величина  $Spec_{dB}(k, l)$ , как правило, находится в пределах от  $-100$  до  $0$  дБ. На практике чаще всего спектрограмму отображают в виде тепловой карты. **Тепловая карта** представляет собой способ визуализации функции двух переменных в виде двумерного изображения, при котором значение функции отображается цветом. На рис. 4.15 показан пример отображения спектрограммы речевого сигнала в виде тепловой карты.

Из приведенных на рис. 4.14, б и 4.15 спектрограмм видно, что сигнал звонкого звука [а] состоит из нескольких частотных компонент, которые отделены друг от друга по частоте на величину основного тона –  $f_0$ . В приведенном примере частота основного тона находится на уровне 250 Гц. Спектрограмма дает представление о том, что частота основного тона не является постоянной, а изменяется в процессе фонации. Компоненты сигнала, с частотами, которые кратны частоте основного тона, называются *гармониками*. Анализируя приведенные спектрограммы, мы можем заметить, что в процессе произнесения звука [а] амплитуды гармоник плавно изменяются. Изменение гармоник связано с изменением *оггибающей спектра* речевого сигнала, которая в свою очередь отвечает за тембр речи.

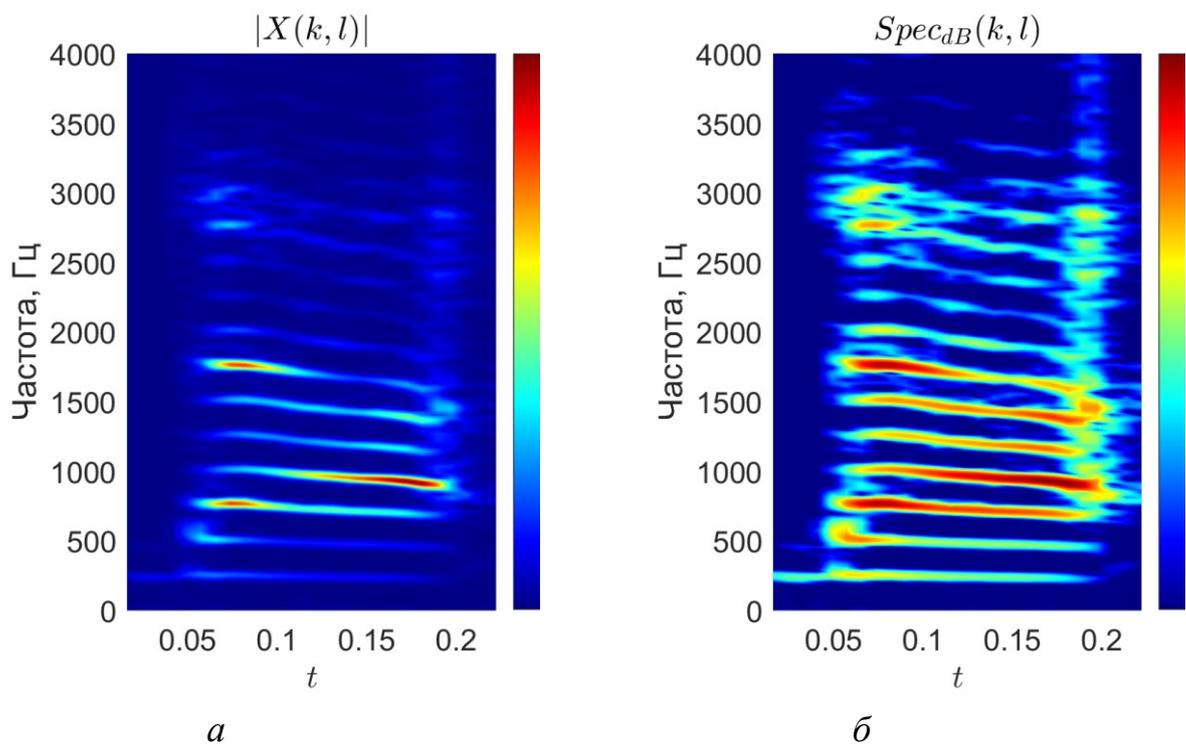


Рис. 4.15. Отображение спектрограммы речевого сигнала («да») в виде тепловой карты:

*а* – линейный масштаб; *б* – логарифмический масштаб

На практике строят спектрограммы двух видов – широкополосные и узкополосные. Способ получения спектрограммы в обоих случаях одинаков (см. выражение (4.51)), отличие заключается в выборе параметра  $N$  – длины анализируемого фрейма, которая определяет частотное и временное разрешение спектрограммы. Ниже приведен MATLAB-код, который позволяет построить спектрограмму речевого сигнала.

```

[x,fs] = audioread('female_speech.wav'); % чтение файла

Ln = length(x);

% Параметры анализа
L=32; % Перекрытие между фреймами
N=round(fs/60); % Размер фрейма для узкополосной спектрограммы
% N=round(fs/180); % Размер фрейма для широкополосной спектрограммы

N_bins=round(N/2)+1; % Число эффективных частотных отсчетов
w = hann(N); % Оконная функция Ханна для анализа

N_frames=floor((Ln-N)/L); % Число фреймов

Spec = zeros(N_bins,N_frames);

for l = 1:N_frames
    fprintf('Фрейм %d из %d\n',l,N_frames);

    x_frame = x(1+(l-1)*L:(l-1)*L+N);
    x_frame = x_frame.*w;

    % Получение X(k,m) по формуле (4.50)
    X_kl = fft(x_frame);
    X_kl = X_kl(1:N_bins)/(N/2);

    Spec(:,m) = 20*log10(abs(X_kl));
end

%% Визуализация
figure('Position',[100 100 800 550]);

subplot(3,1,[1 2]);
pcolor(Spec);
shading flat;
colormap(jet);
set(gca,'CLim',[-75 -15]);
ylabel('Частотный индекс \it k');
xlabel('Временной индекс \it l');

subplot(3,1,3);
plot(0:Ln-1,x);
xlabel('Номер отсчета,\it n');
ylabel('Амплитуда');
xlim([0 Ln-1]);

```

При помощи приведённого кода получены широкополосная (рис. 4.16) и узкополосная спектрограмма речевого сигнала (рис. 4.17). Анализируемый сигнал имел частоту дискретизации  $f_s = 16000$  Гц. В случае широкополосной спектрограммы размер фрейма  $N = 89$  отсчетов и частотное разрешение согласно выражению (4.46) равнялось  $\Delta f = f_s/N \approx 180$  Гц. На широкополосной спектрограмме хорошо видны периоды основного тона речевого сигнала. Но разрешение по частоте недостаточно для представления тонкой структуры спектра речи. Другими словами, на широкополосной спектрограмме не видны отдельные гармоники основного тона. Обратите внимание на то, что для шипящих звуков /sh/ основная энергия сконцентрирована в области верхних частот. Во временной области эти сигналы имеют шумоподобный вид. Широкополосная спектрограмма по существу представляет собой аппроксимацию огибающей спектра, как функции времени.

В случае узкополосной спектрограммы размер фрейма  $N = 267$  отсчетов, а частотное разрешение равнялось  $\Delta f = f_s/N \approx 60$  Гц. Если сравнить её с узкополосной спектрограммой, то легко заметить, что на ней отчётливо видны отдельные гармоники спектра. При этом разрешение по времени ухудшилось.

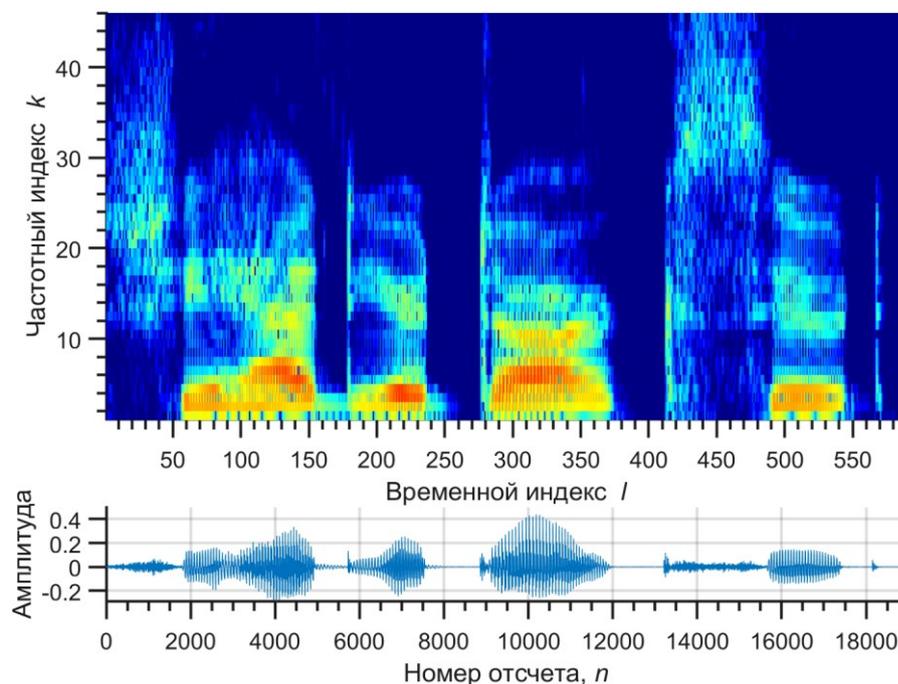


Рис. 4.16. Широкополосная спектрограмма речевого сигнала «she had your dark suit»

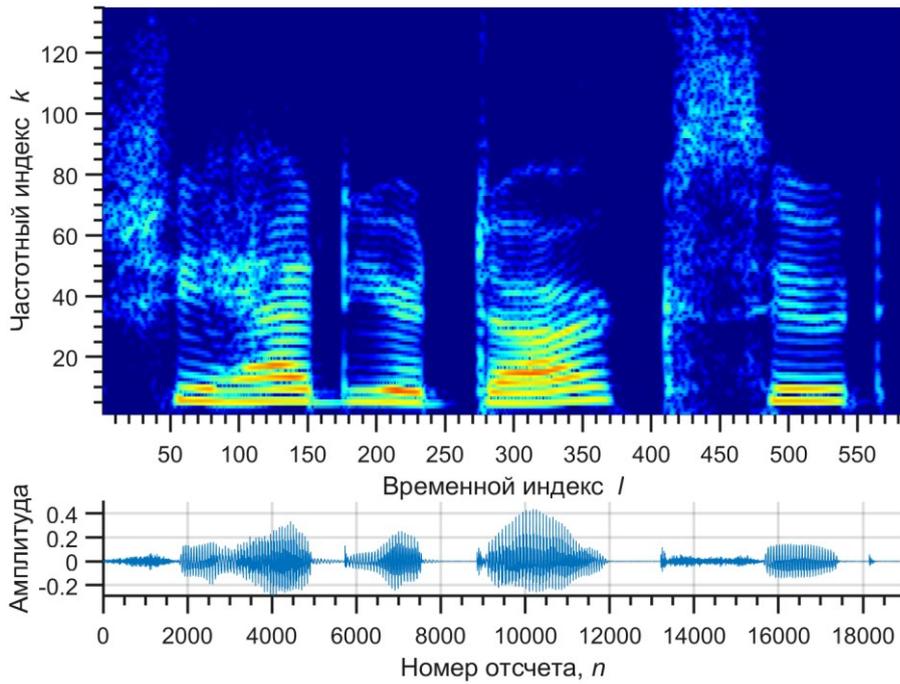


Рис. 4.17 – Узкополосная спектрограмма речевого сигнала «she had your dark suit»

### ***КВПФ: восстановление сигнала***

Выражение (4.50) представляет собой операцию анализа. Чтобы выполнять модификацию сигнала на основе КВПФ, необходимо иметь выражение для синтеза сигнала. В идеальном случае синтез должен приводить к полному восстановлению сигнала (при условии, что спектральные составляющие  $X(k, l)$  остаются неизменными). Для восстановления нужно использовать ОДПФ:

$$\hat{x}_l(n) = IDFT\{X(k, l)\} = h(n)x(n + lL), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Это выражение записано относительно внутрифреймового индекса  $n$ , его можно переписать относительно глобального временного индекса  $t = n + lL$

$$\hat{x}_l(t - lL) = h(t - lL)x(t), \quad lL \leq t \leq lL + N - 1. \quad (4.53)$$

Таким образом у нас есть последовательность фреймов  $\hat{x}_l(t - lL)$  для всех  $l$ . Нужно объединить их, чтобы в результате получился исходный сигнал  $x(t)$ . Для этого необходимо устранить эффект умножения на окно  $h(t - lL)$  – см. выражение (4.53). Процесс восстановления сигнала производится методом перекрытия с суммированием (англ. OLA – overlap-add), с применением синтезирующего окна  $g(n)$ .

Мы умножаем каждый восстановленный фрейм  $\hat{x}_l(t - lL)$  на синтезирующее окно и складываем все полученные фреймы:

$$\begin{aligned}\hat{x}_l(t) &= \sum_l g(t - lL) \cdot \text{IDFT}\{X(k, l)\} = \\ &= \sum_l g(t - lL)h(t - lL)x(t).\end{aligned}\tag{4.54}$$

Таким образом, для восстановления всего сигнала, каждый фрейм, восстановленный ОДПФ, взвешивается на синтезирующее окно и добавляется к соседним окнам с перекрытием во времени. В выражении (4.54)  $x(t)$  может быть вынесен за скобки:

$$\hat{x}_l(t) = x(t) \left( \sum_l g(t - lL)h(t - lL) \right).$$

Значит полное восстановление сигнала достигается, если  $h(n)$  и  $g(n)$  удовлетворяют условию:

$$\sum_l g(t - lL)h(t - lL) = 1.\tag{4.55}$$

Рассмотрим один из подходов к получению окон удовлетворяющих (4.55). Пусть есть окно  $h_{PR}(n)$  удовлетворяющее условию полного восстановления

$$\sum_l h_{PR}(t - lL) = 1.\tag{4.56}$$

Тогда для анализа может быть выбрана произвольная оконная функция  $h(n)$ , а синтезирующее окно должно вычисляться следующим образом:

$$g(n) = \frac{h_{PR}(n)}{h(n)}.\tag{4.57}$$

Известно, что свойству (4.56) отвечает треугольное окно, окна семейства Блэкмена – Харриса, Хэмминга и Ханна. Рассмотрим пример, когда в качестве окна  $h_{PR}(n)$  выбирается окно Ханна. Для того, чтобы избежать нулевых отсчетов в начале и в конце, сгенерируем окно длины  $N + 2$ , а затем отбросим первый и последний отсчеты:

$$h_{PR}(n) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N + 2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В качестве окна анализа  $h(n)$  возьмем окно Хэмминга:

$$h(n) = 0,54 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.58)$$

Окно синтеза  $g(n)$  рассчитывается по выражению (). На рис. 4.18 показаны полученные окна анализа и синтеза, для значения параметров  $L = 256$ ,  $N = 2L$ .

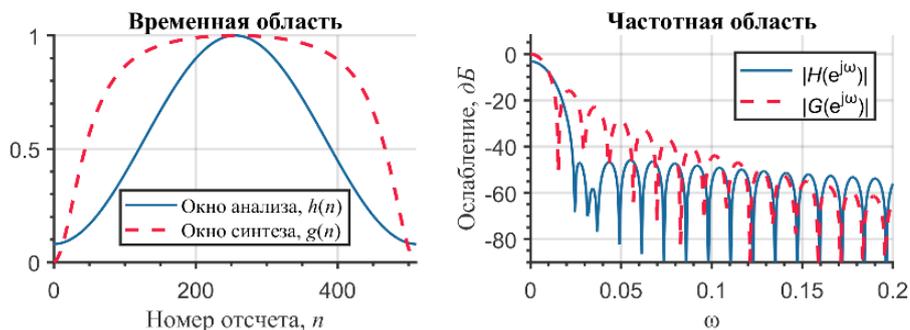


Рис. 4.18. Окна анализа и синтеза во временной и частотной областях

### ***Спектральный анализ сигнала с использованием оконной функции***

Модель сигнала для ДПФ предполагает, что вне заданного интервала сигнал имеет периодическое продолжение. Это означает, что если мы найдем ДПФ сигнала  $X(k) = DFT\{x(n)\}$ , а затем воспользуемся формулой () для его восстановления, но будем подставлять в нее значения  $n > N$ , то в результате получим периодическое продолжение сигнала. Этот процесс показан на рис. 4.19.

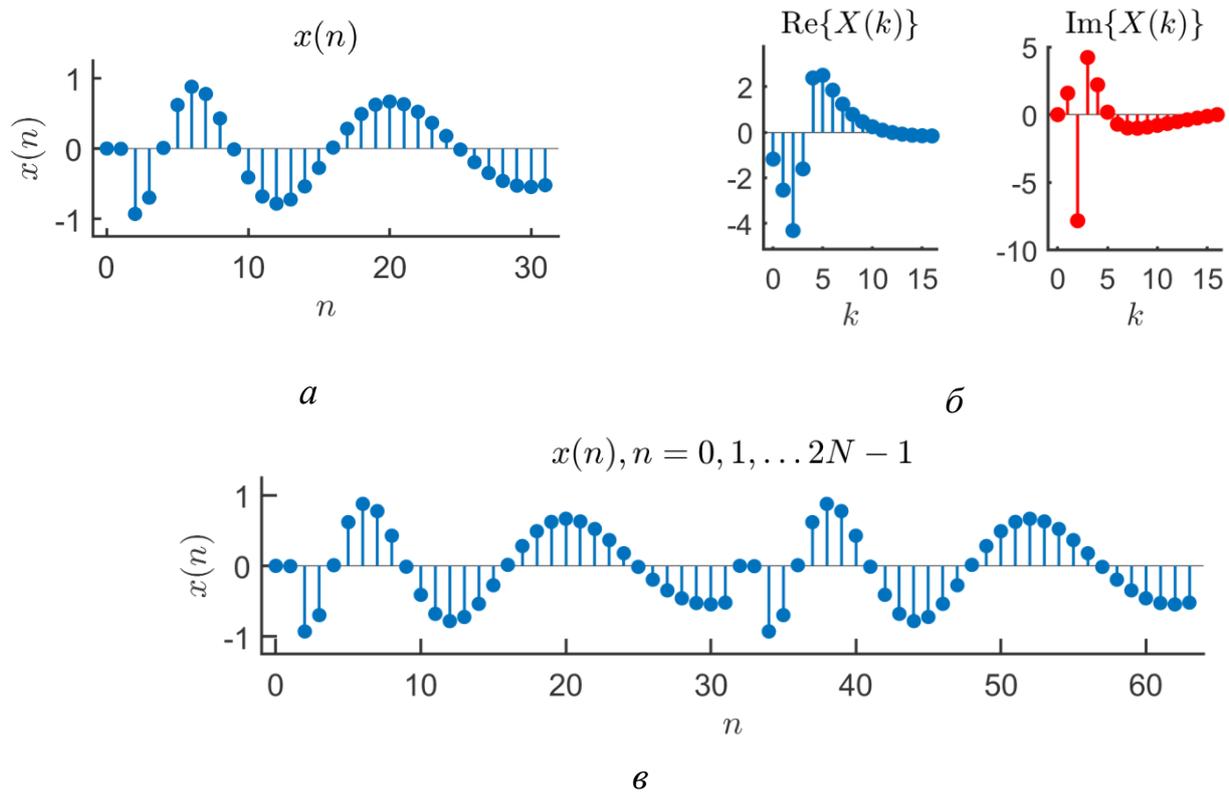


Рис. 4.19 – Периодическое продолжение дискретного сигнала:  
*a* – временное представление сигнала; *б* – ДПФ сигнала;  
*в* – периодическое продолжение сигнала

По этой причине «чистый» синус (согласно модели ДПФ) представляется, как показано на рис. 4.20 (без последнего нулевого отсчета в конце). Так происходит, потому что именно в этом случае ДПФ-расширение сигнала тоже является синусом (рис. 4.21).

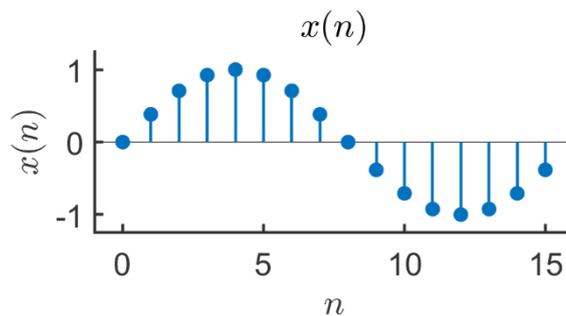


Рис. 4.20. Дискретный синус

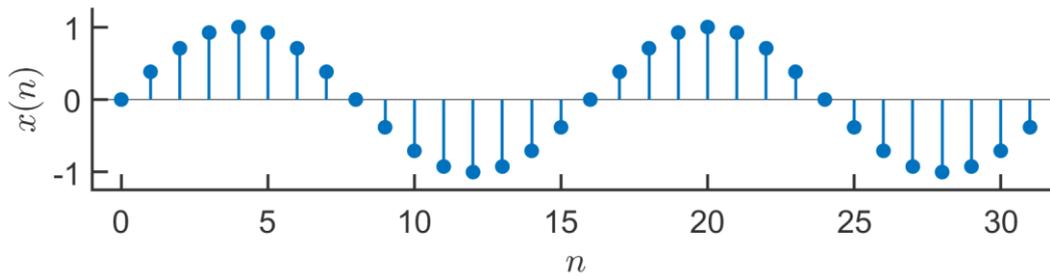


Рис. 4.21. Дискретный синус: ДПФ расширение

Рассмотрим вопрос анализа спектра сигнала при помощи ДПФ. Остановимся на двух ситуациях. В первом случае во входном сигнале содержится в точности целое число периодов синусоидального сигнала. Тогда согласно модели сигнала ДПФ имеет место периодическое продолжение исследуемого фрагмента сигнала, формируя таким образом бесконечный непрерывный периодический сигнал, как показано на рис. 4.22.

Рис. 4.23 отражает ситуацию, когда в сигнале нет целого числа периодов. Разрывы, которые образуются на краях интервала наблюдения, приводят к появлению новых компонент в спектре сигнала. Появляются паразитные боковые «лепестки» в спектре сигнала, происходит снижение разрешающей способности по частоте. Обратите внимание, что боковой лепесток на 12 дБ ниже основного лепестка и что боковые лепестки имеют спад только 6 дБ/октаву. Такая ситуация неприемлема для большинства задач анализа спектра.

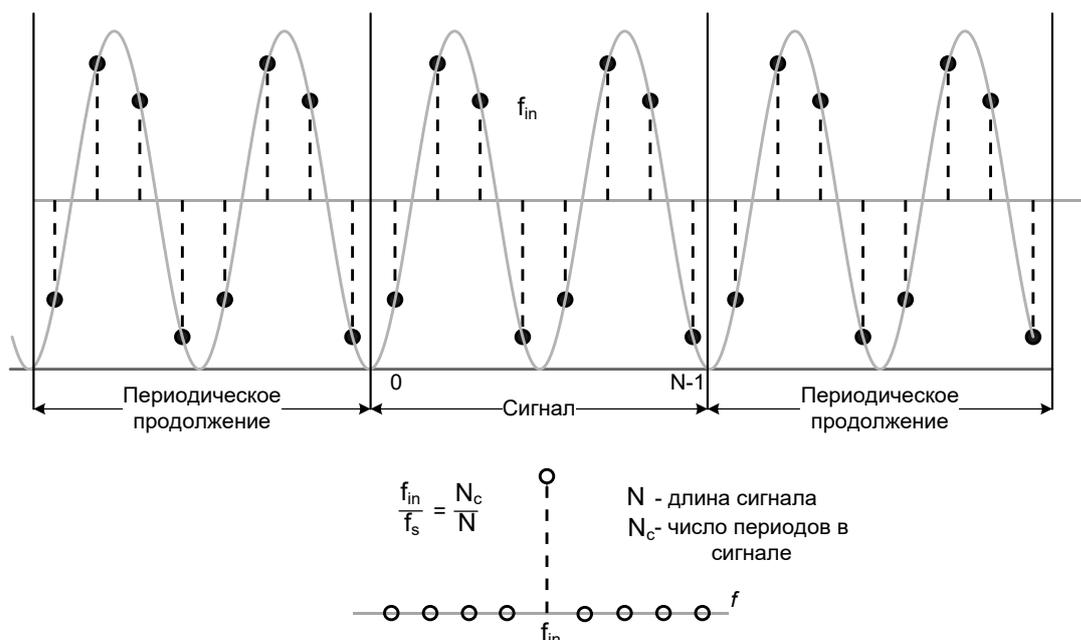


Рис. 4.22. ДПФ синусоидального сигнала с целым числом периодов

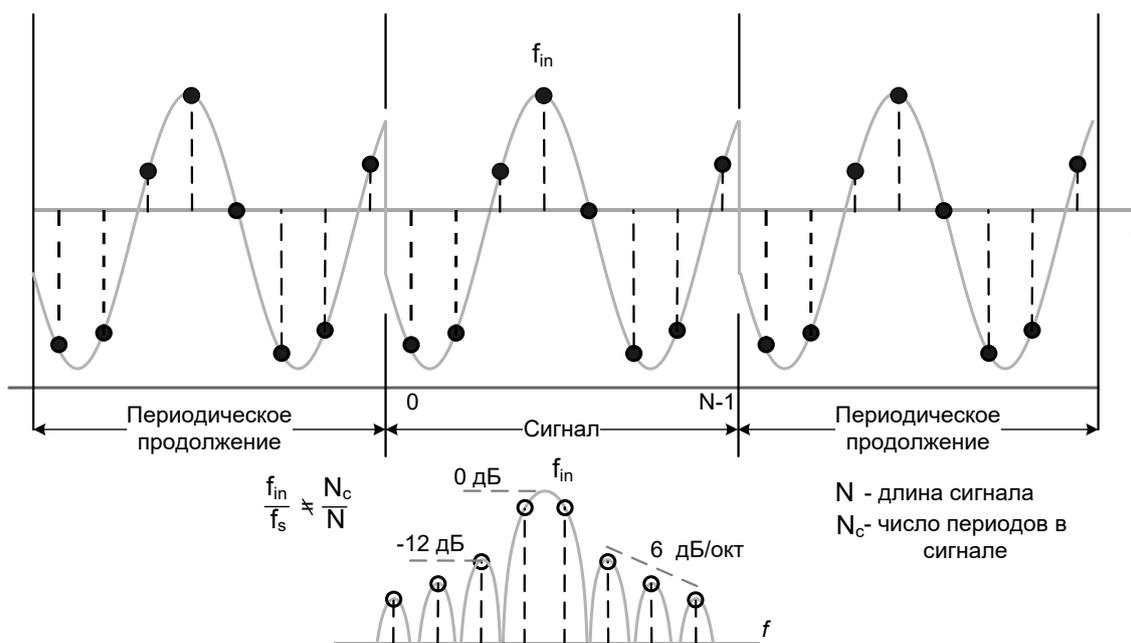


Рис. 4.23. ДПФ синусоидального сигнала с нецелым числом периодов

Для устранения эффекта разрыва сигнала на концах интервала наблюдения необходимо входные отсчеты умножить на соответствующую оконную функцию. Применение оконной функции уменьшает амплитуду сигнала в начале и конце интервала наблюдения.

### Алгебраический взгляд на ДПФ

В данном разделе мы хотим продвинуться в понимании алгебраической и вычислительной структуры ДПФ. Наше понимание проистекает из двух новых путей интерпретации ДПФ:

- 1) как произведение матрицы  $\mathbf{W}$  на вектор (сигнал);
- 2) как полином от  $W_N$ .

Мы видели, что ДПФ является линейным преобразованием вектора длины  $N$  в вектор такой же длины. Из курса линейной алгебры известно, что линейное преобразование представимо матрицей. Поэтому вместо того, чтобы говорить о функции, которая преобразует  $N$  отсчетов сигнала  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$  в такое же количество частотных отсчетов  $X(0), \dots, X(N-1)$ , можем говорить о произведении  $N \times N$  матрицы  $\mathbf{W}$  на  $N$ -мерный вектор  $[x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$ , которое дает  $N$ -мерный вектор  $[X(0), X(1), \dots, X(N-1)]$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}.$$

Простейший пример 2-точечного ДПФ:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}.$$

В общем случае матрица ДПФ имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^3 & W_N^6 & \dots & W_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

где  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  – корень  $N$ -й степени из единицы. Поэтому степени  $W_N$  можно сокращать по модулю  $N$ .

Например,

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Матрица ДПФ является симметричной (ее элементы симметричны относительно главной диагонали). Она также обладает рядом других симметрий. Например, любые две строки матрицы ортогональны, а квадрат длины любой строки (сумма квадратов элементов строки) равен в точности  $N$ . Таким образом, матрица ДПФ является ортогональной. Но не ортонормированной.

Матричное представление позволяет прийти к наиболее простой интерпретации обратного ДПФ. Матрица ОДПФ должна быть обратной к матрице ДПФ:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X},$$

Как следствие ортогональности обратная матрица ДПФ является транспонированной версией матрицы ДПФ:

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^\dagger,$$

где  $^\dagger$  – обозначение транспонированной сопряженно матрицы. Элементами матрицы  $\mathbf{W}^\dagger$  являются

$$(\mathbf{W}^\dagger)_{N}^{nk} = e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = W_N^{-nk}.$$

где  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает не просто транспонированную, но сопряженную матрицу  $U$  (эквивалентный термин эрмитово сопряженная матрица), т. е.  $u_{ij}^\dagger = u_{ji}^*$ .

Рассмотрим еще один способ записи базовой формулы ДПФ, который позволяет по-новому взглянуть на это преобразование. Для фиксированных  $N$  и  $k$  отбросим эти индексы, так что  $W \equiv W_N^k$ . Тогда ДПФ принимает форму многочлена от  $W$  с коэффициентами  $x(n)$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^n.$$

Данное представление ценно по двум причинам. Первая – устанавливается связь с многочленами, что позволяет использовать эффективные алгоритмы вычисления полиномов для ДПФ (такие как, например, схема Горнера). Заметим, что БПФ, которое впервые было введено в ЦОС, можно также рассматривать как эффективный способ умножения многочленов. Кроме того, использование схемы Горнера позволяет построить эффективный рекурсивный алгоритм вычисления ДПФ, известный как алгоритм Гёрцеля. Вторая – более современный подход рассматривает ДПФ как способ аппроксимации полиномом реального спектра. Отсюда ясно, что когда реальный спектр сигнала имеет острые пики, то полиномиальная аппроксимация является неэффективной, в этом случае для описания спектра лучше использовать рациональные функции.

## 4.2. Порядок выполнения работы

### Задание 1

Сгенерируйте дискретный сигнал согласно вашему варианту из таблицы 4.2. Постройте его график, подпишите оси

Таблица 4.2

Варианты сигналов

Номер варианта	Сигнал
1	$x(t) = \sin^4(2\pi 10t)$ . Временной интервал $t \in [0, 1]$ с. Частота дискретизации $f_s = 100$ Гц
2	Пилообразный сигнал с частотой 8 Гц. Временной интервал $t \in [0, 1,5]$ с. Частота дискретизации $f_s = 96$ Гц
3	Треугольный сигнал с частотой 15 Гц. Временной интервал $t \in [0, 1,6]$ с. Частота дискретизации $f_s = 81$ Гц
4	$x(t) = \sin 2\pi f_c t \times \sin 2\pi f_m t$ , где $f_c = 0,5$ Гц, $f_m = 20$ Гц. Временной интервал $t \in [0, 2]$ с. Частота дискретизации $f_s = 250$ Гц
5	$x(t) = 0,1 \cdot \sin^2(2\pi 5t) + \cos(2\pi t)$ . Временной интервал $t \in [0, 1]$ с. Частота дискретизации $f_s = 100$ Гц
6	$x(t) = e^{-0,1t} \cos(3\pi t)$ . Временной интервал $t \in [0, 3]$ с. Частота дискретизации $f_s = 120$ Гц
7	$x(t) = \operatorname{Re}\{2e^{(-0,2+j4)t}\}$ . Временной интервал $t \in [0, 3]$ с. Частота дискретизации $f_s = 160$ Гц
8	$x(t) = \operatorname{Im}\{e^{(-0,3+j4)t}\}$ . Временной интервал $t \in [0, 6]$ с. Частота дискретизации $f_s = 180$ Гц

*Примечания:*

1. Для генерирования сигнала из варианта 2 воспользуйтесь MATLAB-функцией  $x = \text{sawtooth}(t)$ , которая генерирует пилообразный сигнал с периодом  $2\pi$ , элементами массива  $t$  является дискретное время.

2. Для генерирования сигнала из варианта 3 воспользуйтесь MATLAB-функцией  $x = \text{sawtooth}(t, x_{\max})$ , которая генерирует модифицированное треугольное колебание с периодом  $2\pi$ , элементами массива  $t$  являются временные метки. Положение максимума контролируется параметром  $x_{\max}$ . Параметр  $x_{\max}$  задается, как скалярная величина между 0 и 1, он определяет точку между 0 и  $2\pi$ , в которой колебание достигает максимума.

### ***Задание 2 («ДПФ»)***

Разработайте функцию DFT, вычисляющую ДПФ, не используя функцию MATLAB `fft`. Используя функцию DFT, найдите ДПФ сигнала  $x(n)$  из задания 1. Постройте графики подтверждающие наличие в  $X(k)$  симметрий  $(-)$ – $(-)$ . При построении графиков для отображения действительной части используйте синий цвет, для отображения мнимой – красный.

Сравните результаты работы своей функции с функцией MATLAB `fft`.

### ***Задание 3 («Интерполяция»)***

Используя ДПФ, выполните интерполяцию сигнала из задания 1 на величину  $M = 2V$ , где  $V$  – номер варианта.

### ***Задание 4 («Сдвиг во временной области»)***

Выполните сдвиг сигнала из задания 1 на число отсчетов  $m = V$ , используя свойство сдвига во временной области (4.35). Для этого необходимо выполнить следующие шаги:

- 1) найти ДПФ исходного сигнала  $X(k) = \text{DFT}\{x(n)\}$ ;
- 2) модифицировать ДПФ сигнала  $Y(k) = X(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$ ;
- 3) вычислить обратное ДПФ  $y(n) = \text{DFT}^{-1}\{Y(k)\}$ .

Полученный сигнал  $y(n)$  должен быть сдвинутой версией  $x(n)$ .

Проверьте, можно ли применяя этот способ для сдвига сигнала на нецелое число отсчетов, например  $m = 10,5$ .

*Примечание:* для вычисления ОДПФ на шаге 3 используйте MATLAB-функцию `ifft`.

### Задание 5

Выполните спектральный анализ сигнала согласно варианту. В одном случае выполните прямой расчет ДПФ  $X(k)$  от входного сигнала  $x(n)$ , во втором случае предварительно выполните взвешивание на указанную оконную функцию. Полученный амплитудный спектр переведите в децибелы, используя выражение:

$$20 \log_{10} \left| \frac{X(k)}{N/2} \right|.$$

Укажите каким аналоговым частотам соответствуют компоненты анализируемого сигнала  $x(n)$ .

#### Вариант 1

Входной сигнал ( $f_s = 4000$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{2\pi 3n}{N} + 0,3 \sin \frac{2\pi 5,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 64$ , Для анализа используйте окно Хемминга (см. формулу(4.58)):

#### Вариант 2

Входной сигнал ( $f_s = 6000$  Гц):

$$x(n) = \cos \left( \frac{2\pi 10n}{N} + 0,1 \right) + 0,2 \cos \frac{2\pi 13,4n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 100$ .

Для анализа используйте окно Блэкмана:

$$w(n) = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N} \quad (4.59)$$

#### Вариант 3

Входной сигнал ( $f_s = 8000$  Гц):

$$x(n) = \sin \frac{2\pi 20n}{N} + 0,15 \sin \frac{2\pi 18,7n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 200$ .

Для анализа используйте окно Ханна:

$$w(n) = 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} \quad (4.60)$$

*Вариант 4*

Входной сигнал ( $f_s = 2000$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{2\pi 3n}{N} + 0,3 \sin \frac{2\pi 5,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 256$ , Для анализа используйте окно Блэкмана – Харриса:

$$w(n) = 0,35875 - 0,48829 \cos \frac{2\pi n}{N} + \\ + 0,14128 \cos \frac{4\pi n}{N} - 0,01168 \cos \frac{6\pi n}{N}. \quad (4.61)$$

*Вариант 5*

Входной сигнал ( $f_s = 12000$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{2\pi 100n}{N} + 0,2 \sin \frac{2\pi 103,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 256$ . Для анализа используйте окно Хемминга (см. формулу(4.58)).

*Вариант 6*

Входной сигнал ( $f_s = 11025$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{2\pi 10n}{N} + 0,3 \sin \frac{\pi 15,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 400$ . Для анализа используйте окно Блэкмана (см. формулу(4.59)).

*Вариант 7*

Входной сигнал ( $f_s = 16000$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{\pi 8n}{N} + 0,3 \sin \frac{\pi 11,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 800$ . Для анализа используйте окно Ханна.

### Вариант 8

Входной сигнал ( $f_s = 22000$  Гц):

$$x(n) = \cos \frac{\pi 80n}{N} + 0,3 \sin \frac{\pi 85,5n}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $N = 1024$ .

Для анализа используйте окно Блэкмана – Харриса (см. формулу (4.61)).

#### Задание 6 («Свертка»)

Используя теорему о свертке, найдите круговую свертку последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ . Исходные последовательности возьмите из таблицы 4.3 согласно варианту. Постройте результат круговой свертки. Покажите, как нужно дополнить исходные последовательности нулями, чтобы результатом вычисления стала линейная свертка.

Таблица 4.3

Исходные последовательности

Номер варианта	Вид сигнала
1	$x_1 = [-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0];$ $x_2 = [0 \ 0.2 \ 0.8 \ 1 \ 0.8 \ 0.2 \ 0 \ 0];$
2	$x_1 = [0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0];$ $x_2 = [0 \ 0.2 \ 0.5 \ -1 \ 0.5 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0];$
3	$x_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0];$ $x_2 = [0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0 \ 0];$
4	$x_1 = [0 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0];$ $x_2 = [0.2 \ -0.3 \ 0.7 \ 0.7 \ -0.3 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0];$
5	$x_1(n) = (-1)^n, \ n = 0, 1, \dots, 7$ $x_2(n) = \delta(n) + \delta(n - 5), \ n = 0, 1, \dots, 6$
6	$x_1(n) = \sin(2\pi 0.2n), \ n = 0, 1, \dots, 9$ $x_2(n) = \delta(n) + \delta(n - 5), \ n = 0, 1, \dots, 9$
7	$x_1(n) = u(n), \ n = 0, 1, \dots, 9$ $x_2(n) = \delta(n) - \delta(n - 6), \ n = 0, 1, \dots, 9$
8	$x_1(n) = u(n - 1) - u(n - 4), \ n = 0, 1, \dots, 10$ $x_2(n) = \delta(n) - \delta(n - 7), \ n = 0, 1, \dots, 11$

#### Задание 7 («Спектрограмма»)

При помощи диктофона смартфона выполните запись собственного голоса (протяжного произнесения звука [а], не менее 2 секунд). Сохраните файл в формате .wav с частотой дискретизации не ниже  $f_s = 16$  кГц.

Используя выражение (4.51) – (4.52) постройте спектрограмму полученного сигнала в линейном и логарифмическом масштабе. Для отображения спектрограммы используйте функцию `psolor`.

### **Задание 8 («Определение частоты основного тона голоса»)**

Известно, что гласный звук представляет из себя почти периодическое колебание, состоящее из основного тона и его гармоник. Для сигнала из задания 5 определите частоту основного тона с использованием ДПФ. Для этого:

- 1) прочитайте записанный вами файл (при помощи функции `audioread`);
- 2) выберите из него сегмент  $x(n)$ , длительностью  $t_a = 50$  мс (для частоты дискретизации 16 кГц это будет  $f_s \times t_a = 16000 \times 0,05 = 800$  отсчетов);
- 3) найдите ДПФ выделенного сегмента сигнала;
- 4) постройте его амплитудный спектр  $X(k)$ , отмасштабируйте частотную ось так, чтобы на ней отображались реальные частоты.

Первый пик в спектре будет соответствовать частоте основного тона, который отвечает за восприятие высоты голоса. Как правило, частота основного тона лежит в диапазоне от 50 до 450 Гц.

### **4.3. Дополнительные задания**

1. Покажите, каким образом получено выражение (4.14)?
2. Выведите выражение для ДПФ сигнала длины  $N$  следующего вида:

$$x(n) = \cos\left(2\pi\left(\frac{L}{N}\right)n + \phi\right).$$

3. Вычислите  $N$ -точечные ДПФ следующих сигналов:

а)  $x_1(n) = \delta(n)$ ,

б)  $x_2(n) = \delta(n - n_0)$ , где  $0 < n_0 < N$ ,

в)  $x_3(n) = \alpha^n$ ,  $0 \leq n < N$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

г)  $x_4(n) = u(n) - u(n - n_0)$ , где  $0 < n_0 < N$ .

4. Найдите 10-точечное обратное ДПФ для

$$X(k) = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k < 9. \end{cases}$$

5.  $N$ -точечное ДПФ сигнала  $X(k)$  можно интерпретировать, как  $N$ -периодическую функцию от  $k$ . Ответьте на вопрос: какие из следующих функций являются действительными (валидными) ДПФ-образами? Для каждого валидного

ДПФ-образа найдите размер  $N$  и определите является ли соответствующий временной сигнал  $x(n)$  действительными или нет:

а)  $X(k) = j - \pi$ ;

б)  $X(k) = \sin(k/10)$ ;

в)  $X(k) = \sin(\pi k/10)$ ;

г)  $X(k) = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^k$ ;

д)  $X(k) = \langle k + \pi \rangle_{10}$ .

6. Для дискретной последовательности длины  $N$ :

$$x(n) = u(n) - u(n - m + 1), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

найти ДПФ  $X(k)$ . Построить график  $|X(k)|$  для случая  $m = 3, N = 8$ .

7. Вычислите 4-точечное ДПФ сигнала

$$x(n) = 3\delta(n) - 2\delta(n - 2) + 2\delta(n - 3).$$

Постройте график амплитудного спектра сигнала  $|X(k)|$ .

8. Найдите формулу для ДПФ сигнала длины  $N$  следующего вида:

$$x(n) = \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)8n + \varphi_0\right).$$

9. Определите ДПФ перечисленных конечных последовательностей, считая что все они имеют длину  $N$ , где  $N$  – четное число

а)  $x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 \leq n_0 \leq N - 1$ .

б)  $x(n) = \begin{cases} 1, & n - \text{четно}, \\ 0, & n - \text{нечетно} \end{cases}$

в)  $x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad |a| < 1$ .

10. Вычислите 4-х точечное ДПФ  $X(k)$  для конечной последовательности

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad 0 \leq n \leq 3.$$

11. Докажите, что если сигнал  $x(n)$  принимает вещественные значения, то его ДПФ  $X(k)$  симметрично относительно отсчета  $k = N/2$  и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\{X(k)\} = \operatorname{Re}\{X(N - k)\}.$$

12. Используя метод перекрытия с суммированием, опишите простую систему сжатия аудиосигнала в частотной области. Для этого разбейте сигнал на перекрывающиеся сегменты, вычислите от них ДПФ. Из всех частотных составляющих сохраните только 10 % имеющих наибольшую амплитуду, остальные приравняйте нулю. После этого выполните обратное ДПФ и восстановите сигнал согласно методу перекрытия с суммированием. Оцените качество реконструированного сигнала.

13. Постройте спектрограмму речевого сигнала длительностью 3 – 5 секунд, используя а) окно Ханна; б) окно Блэкмана. Какие вы опишите различия полученных спектрограмм?

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М. : Техносфера, 2006. – 853 с.
2. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
3. Применение цифровой обработки сигналов / под ред. Э. Оппенгейма. – М. : Мир, 1980. – 552.
4. Хемминг, Р. В. Цифровые фильтры / Р. В. Хемминг. – М. : Сов. радио, 1980. – 224 с.
5. Каппелини, В. Цифровые фильтры и их применение / В. Каппелини, А. Константиноидис, П. Эмилиани. – М. : Радио и связь, 1983. – 350 с.
6. Гольденберг, Л. М. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие для вузов / Л. М. Гольденберг, В. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1990. – 315 с.
7. Vaidyanathan, P. P. Multirate systems and filter banks / P. P. Vaidyanathan. – Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1993. – 911 p.
8. Hayes, M. H. Schaum's outline of theory and problems of digital signal processing / M. H. Hayes. – New York : McGraw-Hill, 1999. – 436 p.
9. Stein, J. Digital signal processing: a computer science perspective / J. Stein. – New York : Wiley-Interscience Publ., 2000. – 859 p.
10. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.
11. Брюханов Ю. А. Лабораторный практикум по курсу «Цифровые цепи и сигналы»: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. / Ю.А. Брюханов. – Ярославль : ЯрГУ, 2007. – 140 с.
12. Айфичер, Э. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис ; пер. с англ. – М. : Изд-во Вильямс. – 2004. – 992 с.
13. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Лайонс ; пер. с англ. – 2-е изд. – М. : ООО Бином-Пресс, 2006. – 656 с.
14. Смит, С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников / С. Смит. – М. : Додэка-XXI, 2012. – 720 с.
15. Цифровая обработка сигналов и MATLAB: учеб. пособие / А. И. Соломина [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.
16. Lathi B. P. Essentials of digital signal processing / B. P. Lathi, R. Green. – New York : Cambridge Univ. Press, 2014. – 748 p.

17. Петровский, А. А. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум : пособие / А. А. Петровский, М. И. Вашкевич, И. С. Азаров. – Минск. : БГУИР, 2016. – 87 с.

18. Вашкевич, М. И. Теория и применение цифровой обработки сигналов : учеб.-метод. пособие / М. И. Вашкевич, М. И. Порхун. – Минск : БГУИР, 2022. – 84 с. : ил.

19. Основы цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / С. Л. Ремизов [и др.]. – М. : Горячая линия – Телеком, 2021. – 492 с.

*Учебное издание*

**Вашкевич Максим Иосифович**  
**Порхун Максим Игоревич**  
**Азаров Илья Сергеевич**

**ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ  
СИГНАЛОВ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.**

**ПОСОБИЕ**

**Редактор А. Ю. Шурко**  
**Корректор Е.Н. Батурчик**

Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 138.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014, ЛП №02330/264 от 14.05.2014.  
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск