

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ФИЛЬТРА-ПРОТОТИПА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАММАТОН-ФИЛЬТРОВ ПРИ ПОМОЩИ НЕРАВНОПОЛОСНОГО КОСИНУСНО-МОДУЛИРОВАННОГО БАНКА ФИЛЬТРОВ

ст. преп. Порхун М.И., проф. Вашкевич М.И.



*Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники (БГУИР)*

Кафедра электронных вычислительных средств



DSPA Conference

Digital Signal Processing and Its Applications

Цель доклада

Представить **оптимизационный метод проектирования фильтра-прототипа** для аппроксимации частотных характеристик гамматон-фильтров, **моделирующих работу слуховой системы**, при помощи неравнополосного косинусно-модулированного банка фильтров.

Области применения фильтров, моделирующих работу слуховой системы человека:

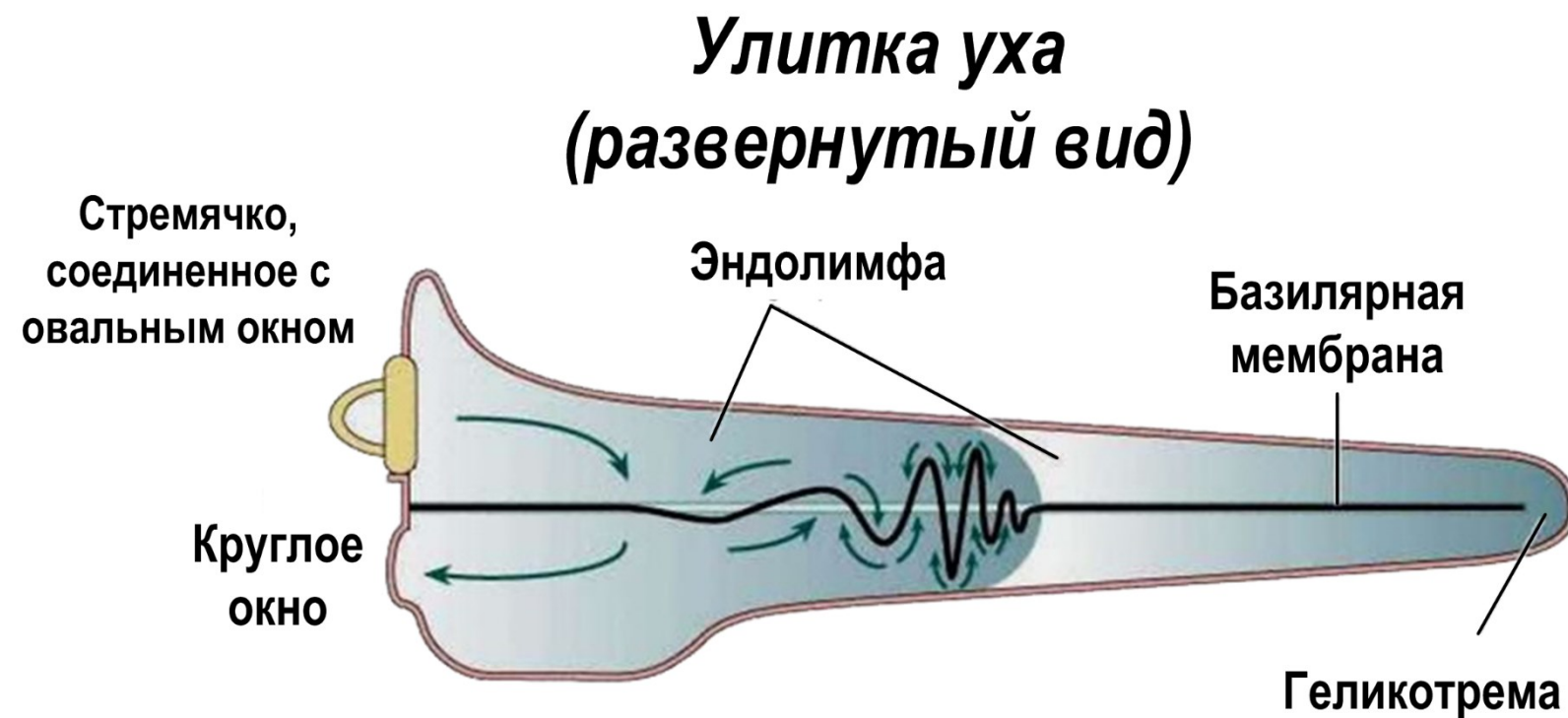
- аудиокодеры;*
- модели потери слуха (hearing loss simulation);*
- вспомогательные слуховые устройства (hearing assistive device).*

План доклада

- Проблематика кохлеарных фильтров
- Банк гамматон-фильтров (БГФ)
- Причины, затрудняющие эффективную реализацию БГФ
- Аппроксимация частотной характеристики БГФ
- Неравнополосный косинусно-модулированный банк фильтров
- Оптимизация фильтра-прототипа
- Экспериментальные исследования
- Заключение

Проблематика кохлеарных фильтров

- Основными типами фильтров, моделирующих работу слуховой системы, являются **гамматон-фильтры** и **гаммачирп-фильтры**.
- Данные фильтры выполняют **частотно-временную декомпозицию** входного сигнала и **моделируют работу базилярной мембраны** улитки уха.

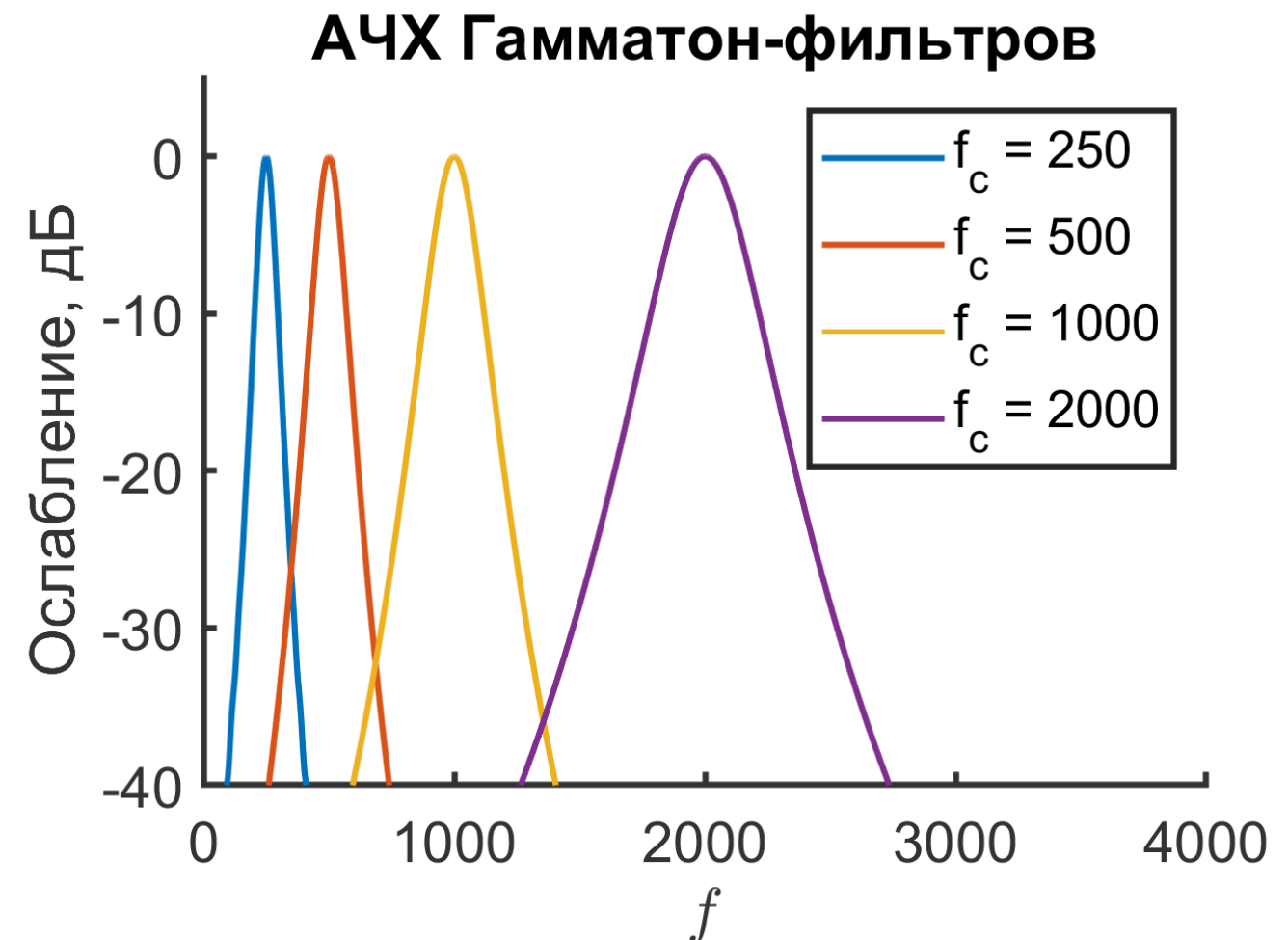
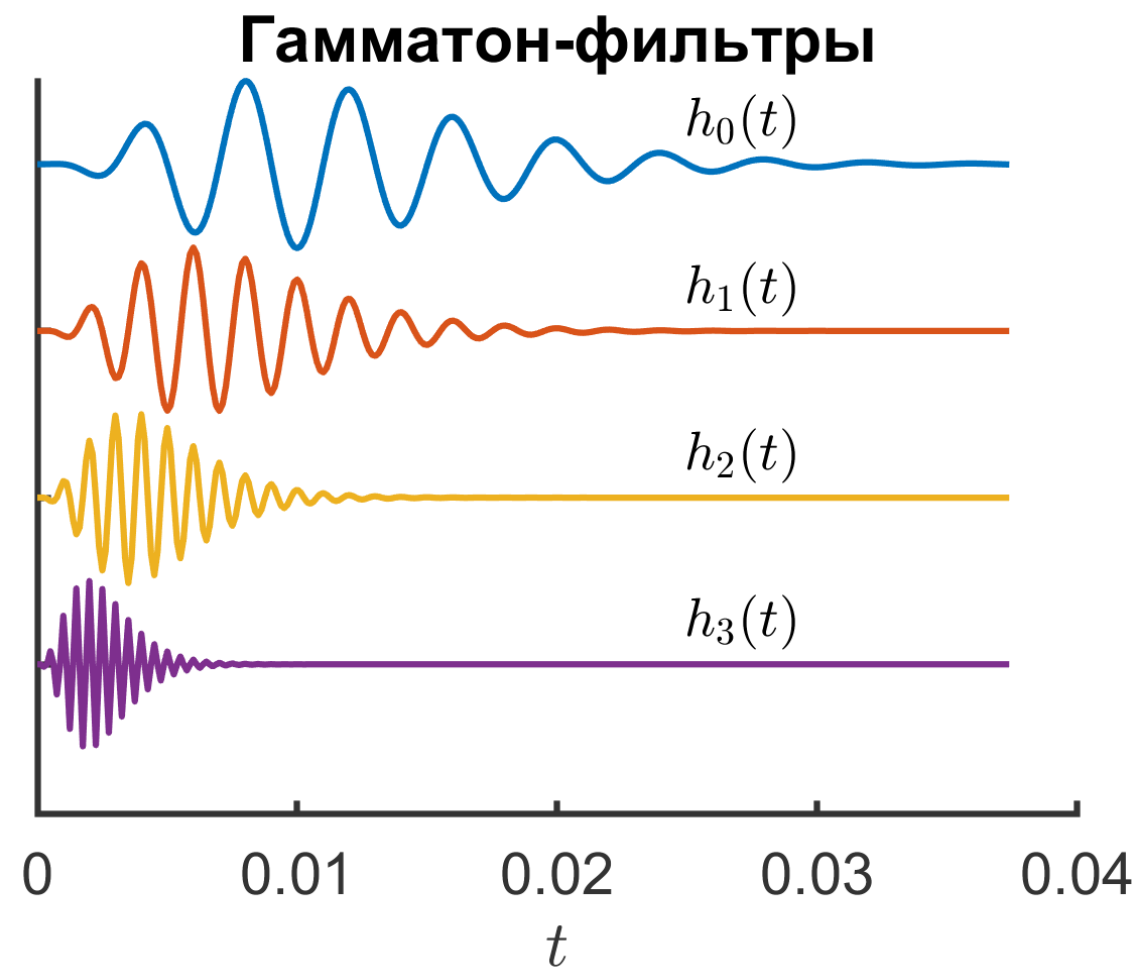


Банк гамматон-фильтров

- БГФ представляет собой **набор гамматон-фильтров**, каждый из которых связан с определенной характеристической частотой f_c :

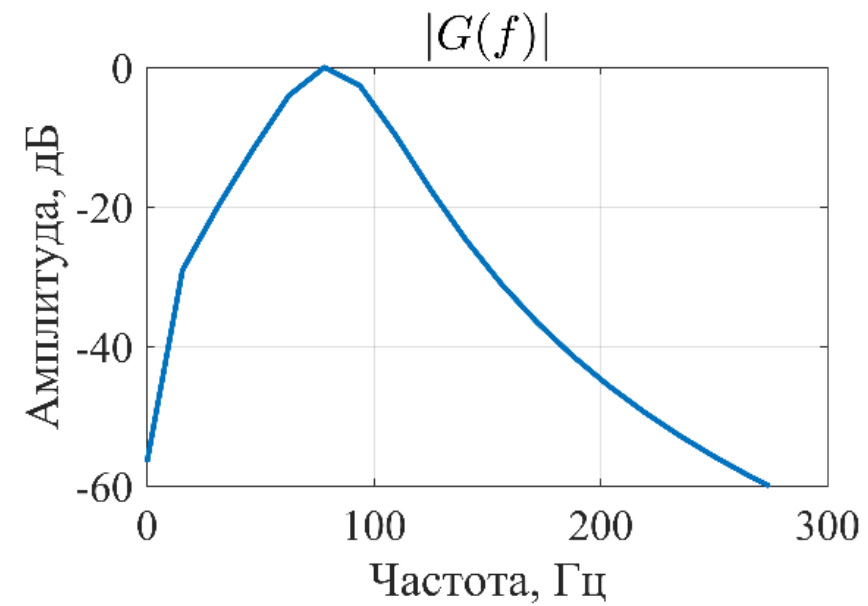
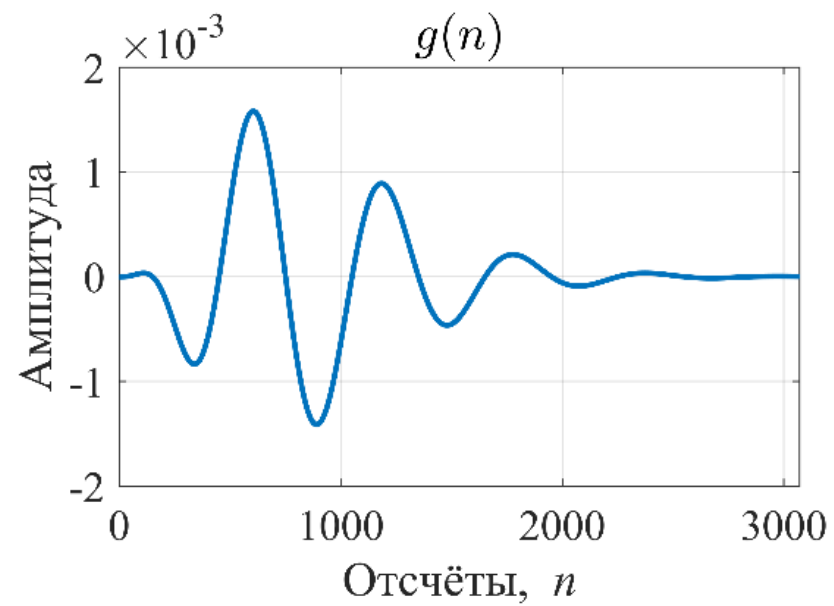
$$g(t) = t^{l-1} e^{-2\pi b \text{ERB}(f_c)t} \cos(2\pi f_c t), t > 0,$$

где t – время, l – порядок фильтра, b – параметр, регулирующий ширину полосы фильтра, f_c – центральная частота фильтра, $\text{ERB}(f_c)$ – эквивалентная прямоугольная полоса пропускания слухового фильтра.



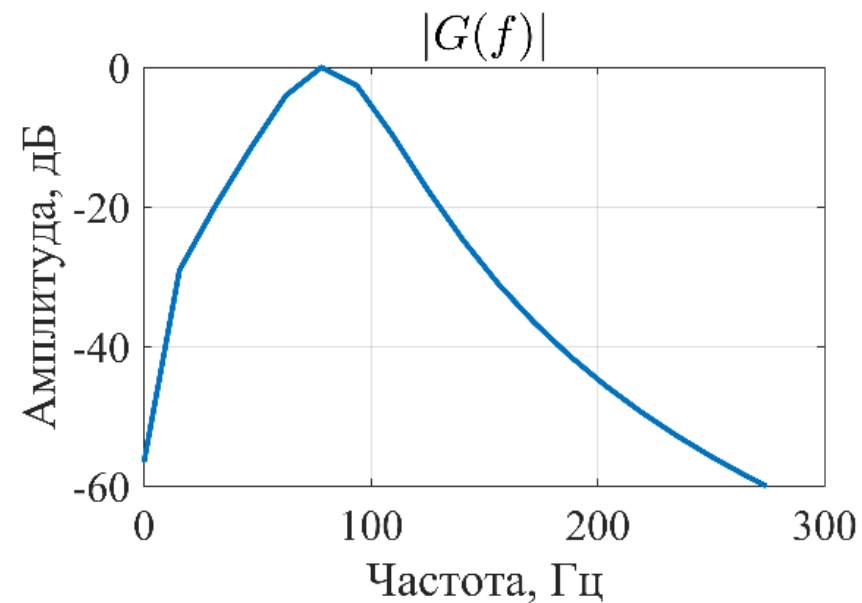
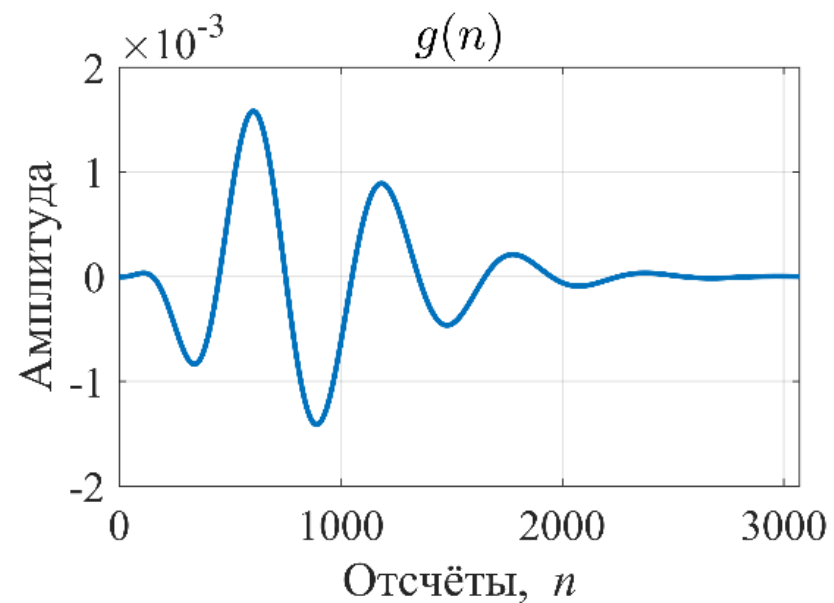
Причины, затрудняющие эффективную реализацию БГФ

1) *большая длина импульсных характеристик*, что требует для реализации существенных вычислительных затрат.



Причины, затрудняющие эффективную реализацию БГФ

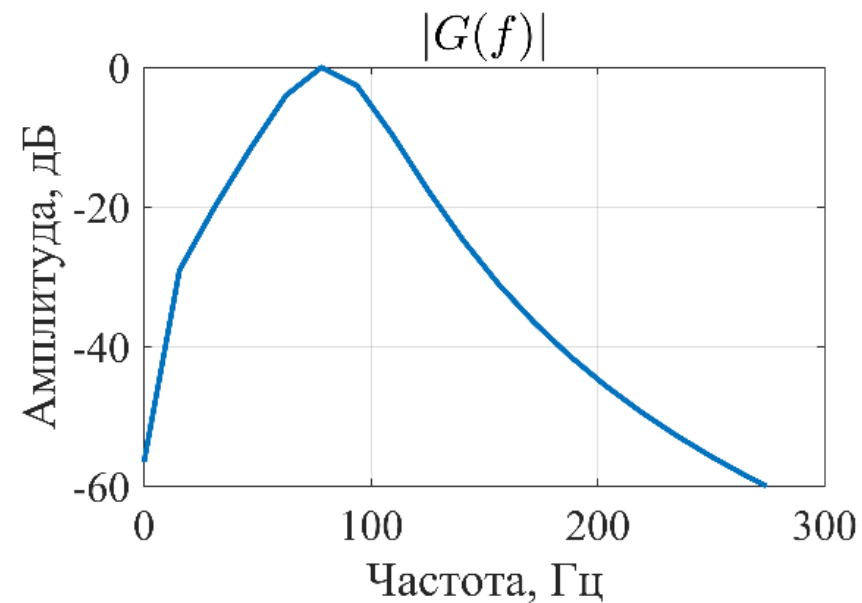
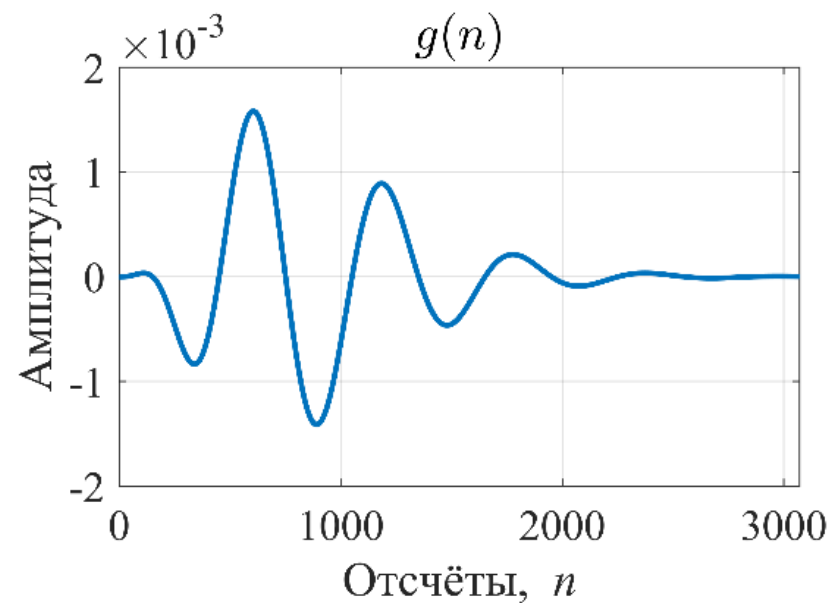
1) **большая длина импульсных характеристик**, что требует для реализации существенных вычислительных затрат.



2) в практических задачах **число каналов банка фильтров может достигать до 100**. С учётом длинных импульсных характеристик, число операций умножения при поступлении нового отсчёта входного сигнала может достигать более 10 тыс.

Причины, затрудняющие эффективную реализацию БГФ

1) **большая длина импульсных характеристик**, что требует для реализации существенных вычислительных затрат.



2) в практических задачах **число каналов банка фильтров может достигать до 100**. С учётом длинных импульсных характеристик, число операций умножения при поступлении нового отсчёта входного сигнала может достигать более 10 тыс.

3) **отсутствие модели банка фильтров синтеза.**

Вариант решения проблемы

Задача

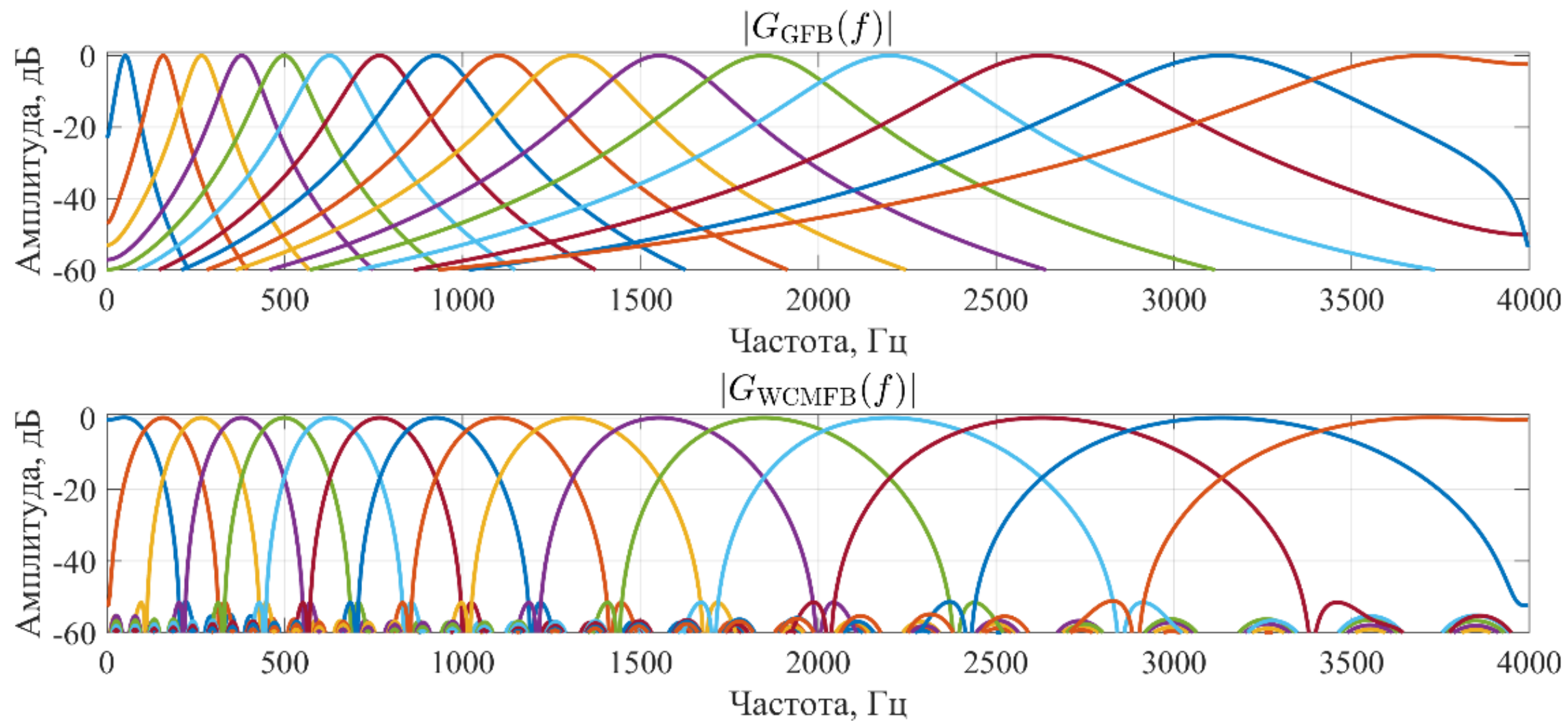
Актуальна задача разработки банка фильтров, схожего по своим характеристикам с БГФ, но **имеющего эффективную реализацию**, а также **включающего в себя структуры как для анализа, так и для синтеза сигнала**.

Решение

Предложен вариант решения проблемы высокой вычислительной сложности прямой реализации БГФ за счет использования неравнополосного косинусно-модулированного банка фильтров (**НКМБФ**) для аппроксимации банка гамматон-фильтров (БГФ), что **требует существенно меньше вычислительных ресурсов**, чем прямая реализация БГФ.

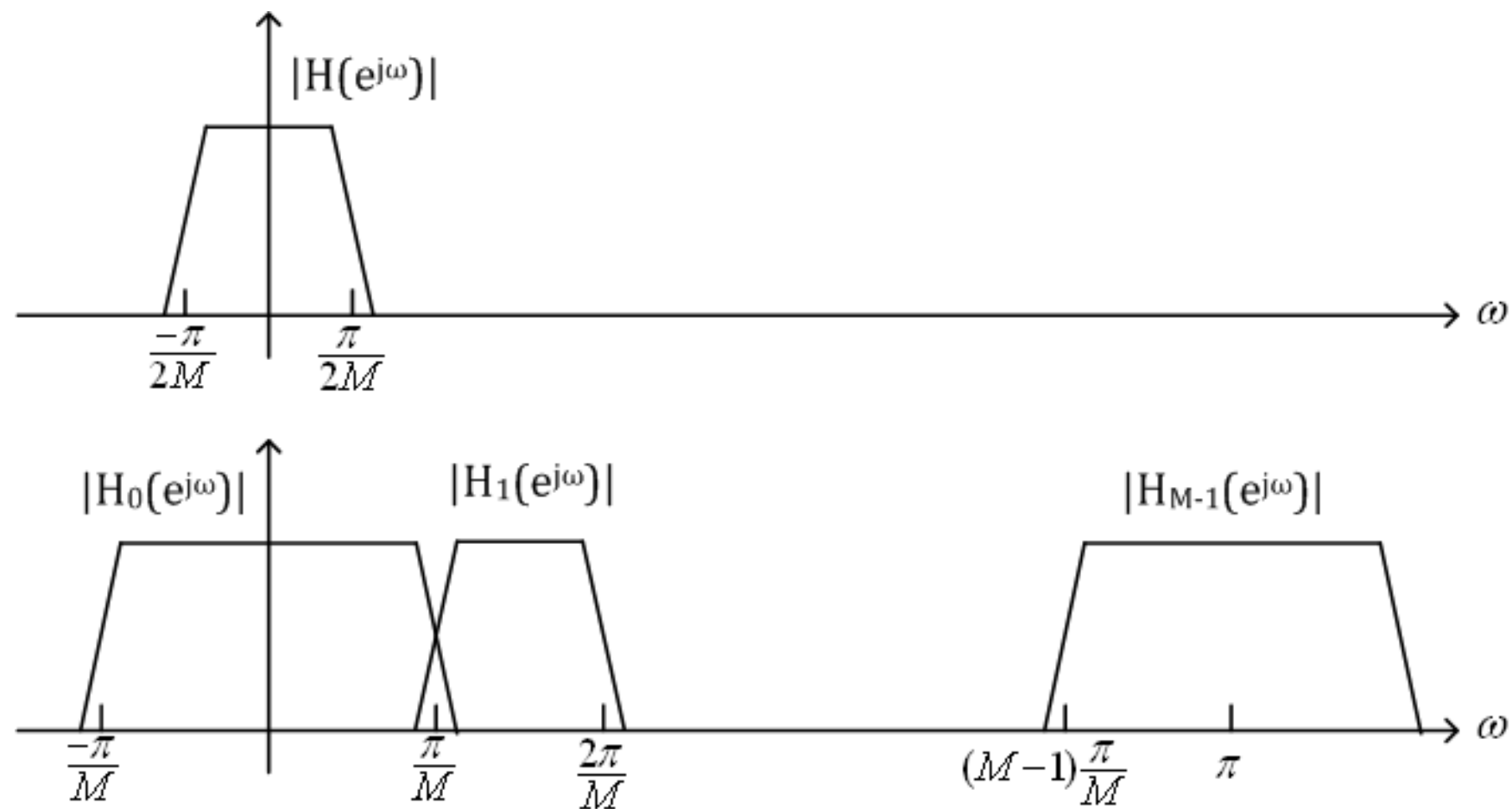
Аппроксимация частотной характеристики БГФ

Ставится задача разработки метода расчета фильтра-прототипа для НКМБФ для получения банка фильтров, схожего по своим характеристикам с БГФ.



Косинусно-модулированный банк фильтров (КМБФ)

КМБФ образуется путём *применения косинусной модуляции к фильтру-прототипу* – КИХ-фильтру нижних частот $h(n)$ с частотой среза $\pi/2M$, где M – количество каналов.



Таким образом, *синтез целого банка фильтров сводится к расчёту только фильтра-прототипа.*

Косинусно-модулированный банк фильтров (КМБФ)

Импульсные характеристики M -канального КМБФ анализа $h_k(n)$ описываются выражением:

$$h_k(n) = 2h(n) \cos \left(\frac{\pi(k + 0.5)}{M} \left(n - \frac{N - 1}{2} \right) + \frac{(-1)^k \pi}{4} \right),$$

где $N = 2mM$ – порядок фильтра-прототипа, m – положительное число, $k = 0, \dots, M - 1$ – номер канала, $n = 0, \dots, N - 1$ – временной индекс, $h(n)$ – коэффициенты фильтра-прототипа.

Косинусно-модулированный банк фильтров (КМБФ)

Пусть $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ – z -образ фильтра-прототипа. Тогда, применив z -преобразование к $h_k(n)$, получим **передаточные функции фильтров анализа** $H_k(z)$:

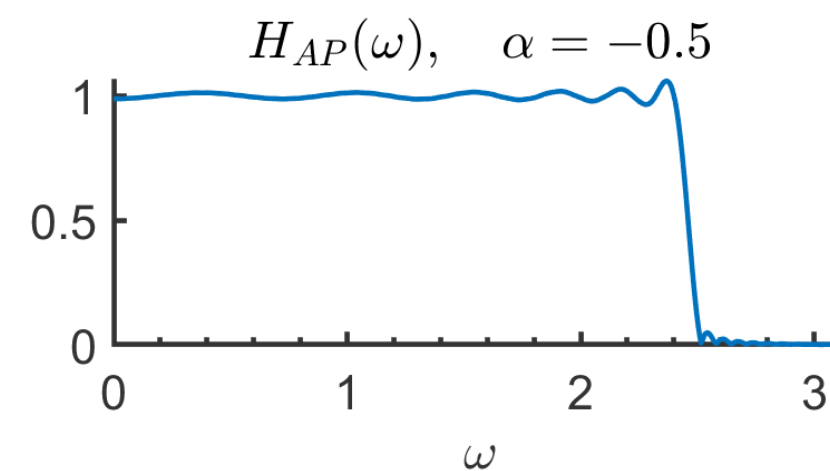
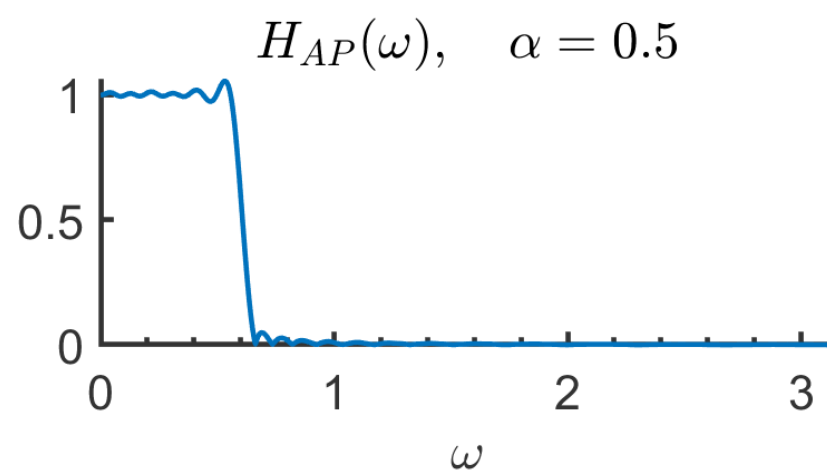
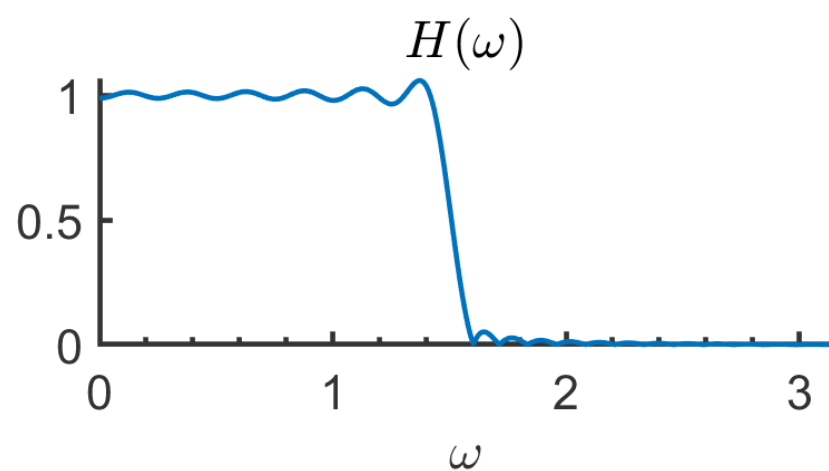
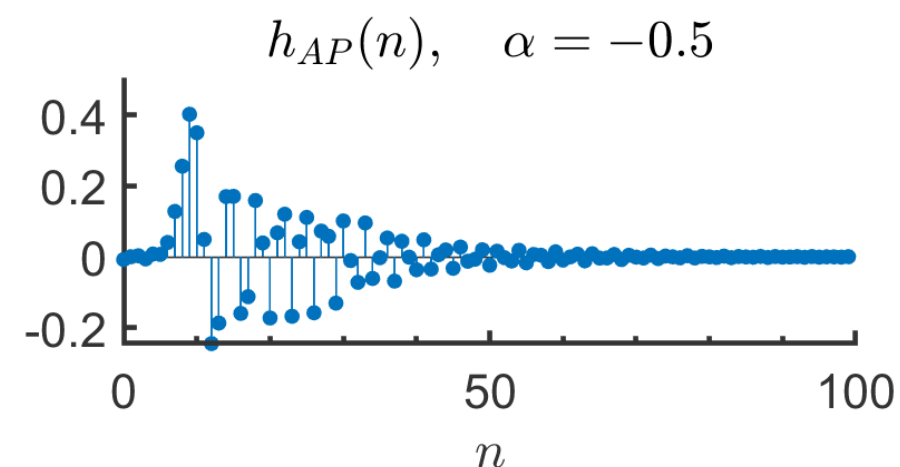
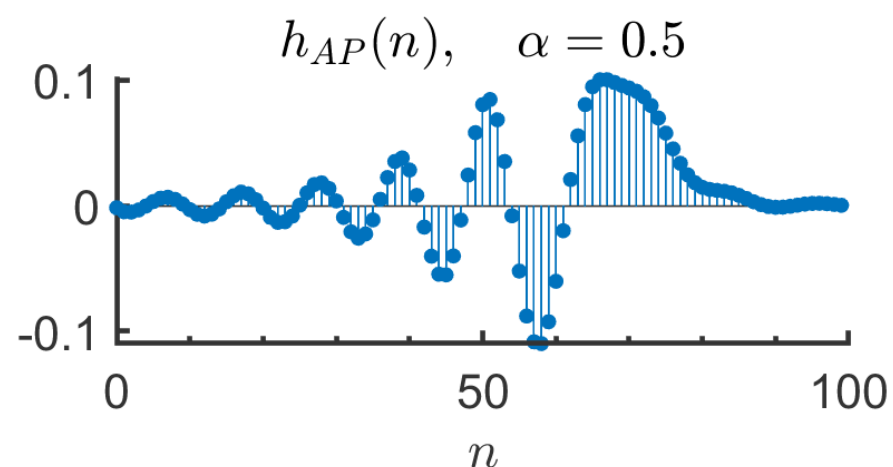
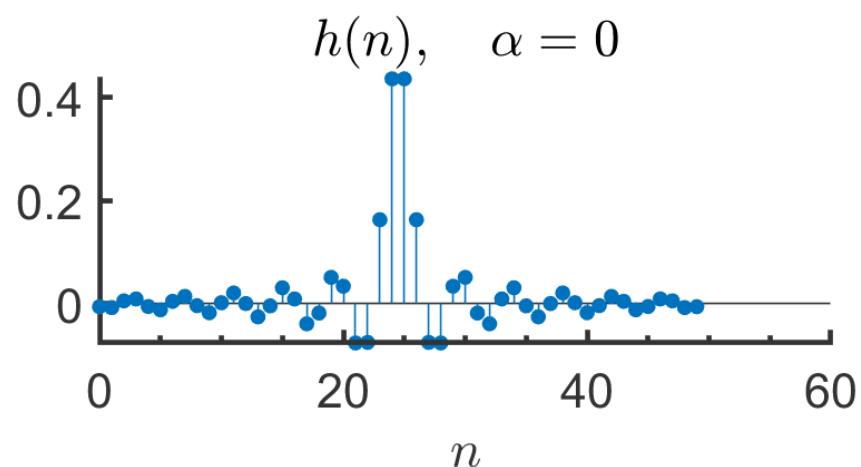
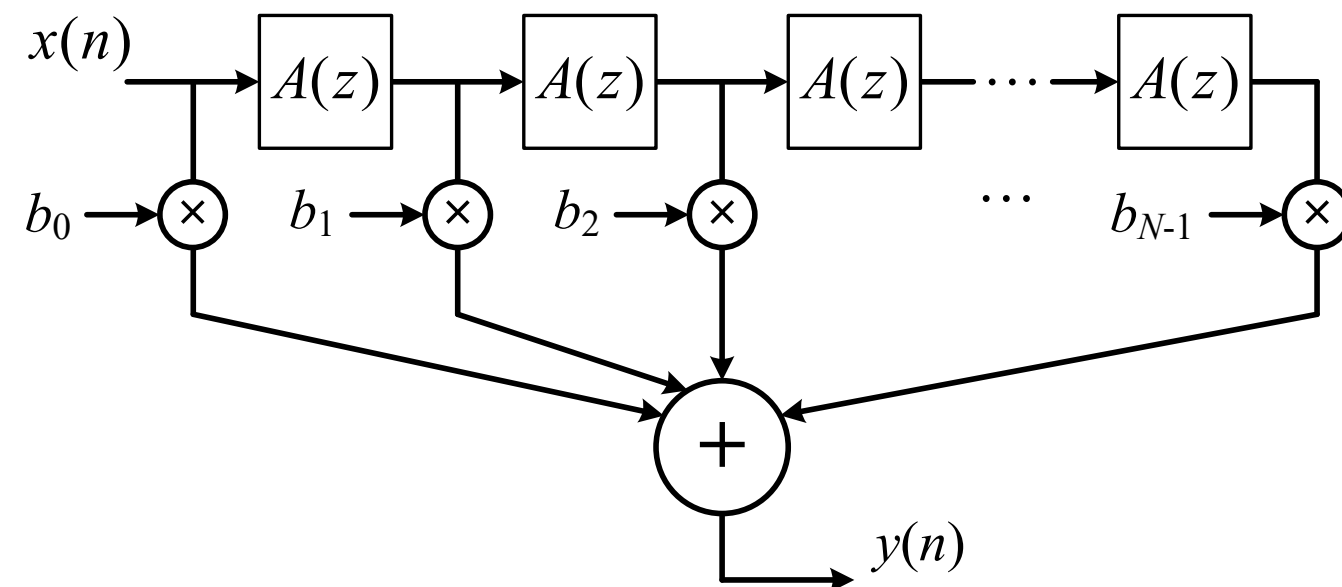
$$H_k(z) = a_k b_k H\left(z^{-1} W_{2M}^{(k+0,5)}\right) + \bar{a}_k \bar{b}_k H\left(z^{-1} W_{2M}^{-(k+0,5)}\right),$$

где $a_k = e^{j(-1)^k \pi/4}$, $W_M = e^{j2\pi/M}$, $b_k = W_{2M}^{\frac{N-1}{2}(k+0,5)}$, а верхняя черта – комплексное сопряжение.

Фазовое преобразование $z^{-1} \rightarrow A(z)$

Фазовое звено

$$A(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |\alpha| < 1.$$

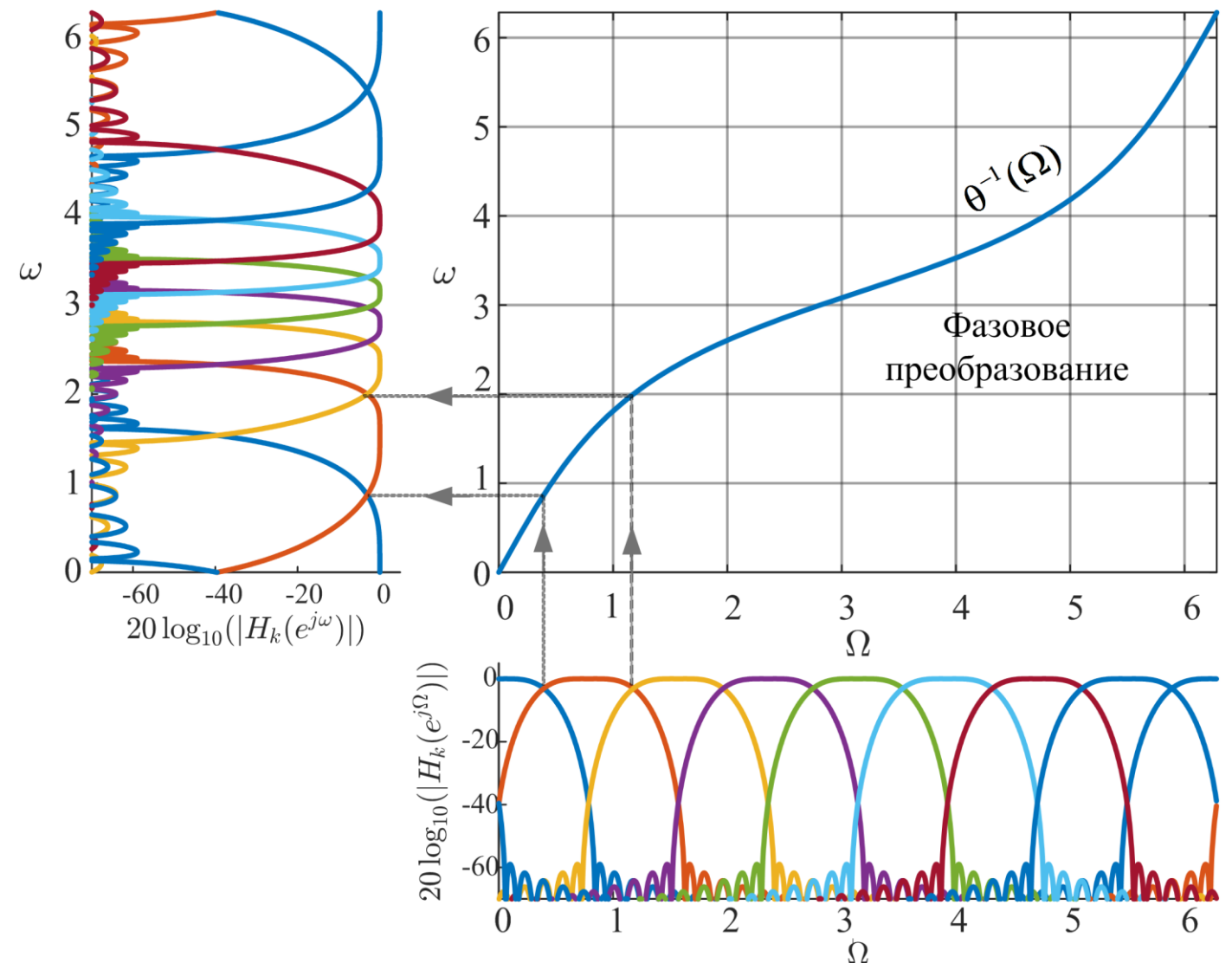


Неравнополосный КМБФ

НКМБФ образуется из равнополосного КМБФ путём **применения фазового преобразования**.

Воспользовавшись заменой $z^{-1} \rightarrow A(z)$, перепишем $H_k(z)$:

$$H_k(z) = a_k b_k H \left(A(z) W_{2M}^{(k+0,5)} \right) + \bar{a}_k \bar{b}_k H \left(A(z) W_{2M}^{-(k+0,5)} \right)$$



НКМБФ

Амплитудно-частотная характеристика фазового звена определяется как:

$$A(e^{j\omega}) = e^{j\Theta_\alpha(\omega)}; \quad \Theta_\alpha(\omega) = \omega - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha \sin(\omega)}{\alpha \cos(\omega) - 1} \right)$$

где α – коэффициент фазового звена, а ω – нормированная частота в радианах.

В результате замены элементов задержки в полифазной структуре равнополосного КМБФ на фазовые звенья **происходит деформация (отображение) частотной сетки** $\omega \rightarrow \Theta_\alpha(\omega)$.

Степень деформации частот зависит только от параметра α .

Расчётные формулы

Перейдем к вычислению частотных характеристик НКМБФ с использованием **векторно-матричных операций**.

Частотную характеристику КИХ-фильтра чётного порядка N с линейной ФЧХ можно записать в виде:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{h}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{C}(\omega) = \left[2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) \dots 2 \cos\left(\frac{(N-1)\omega}{2}\right) \right]^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{h} = \left[h\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right) h\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1\right) \dots h(N-1) \right]^T,$$

где надстрочный знак T означает транспонирование.

Расчётные формулы

Используя (1) запишем выражение для расчёта частотной характеристики КМБФ:

$$H_k(e^{j\omega}) = a_k b_k e^{-\frac{j(N-1)\omega}{2}} \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{h} W_{2M}^{(k+0,5)} + \\ + \bar{a}_k \bar{b}_k e^{-j(N-1)\omega/2} \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{h} W_{2M}^{-(k+0,5)}.$$

Расчётные формулы

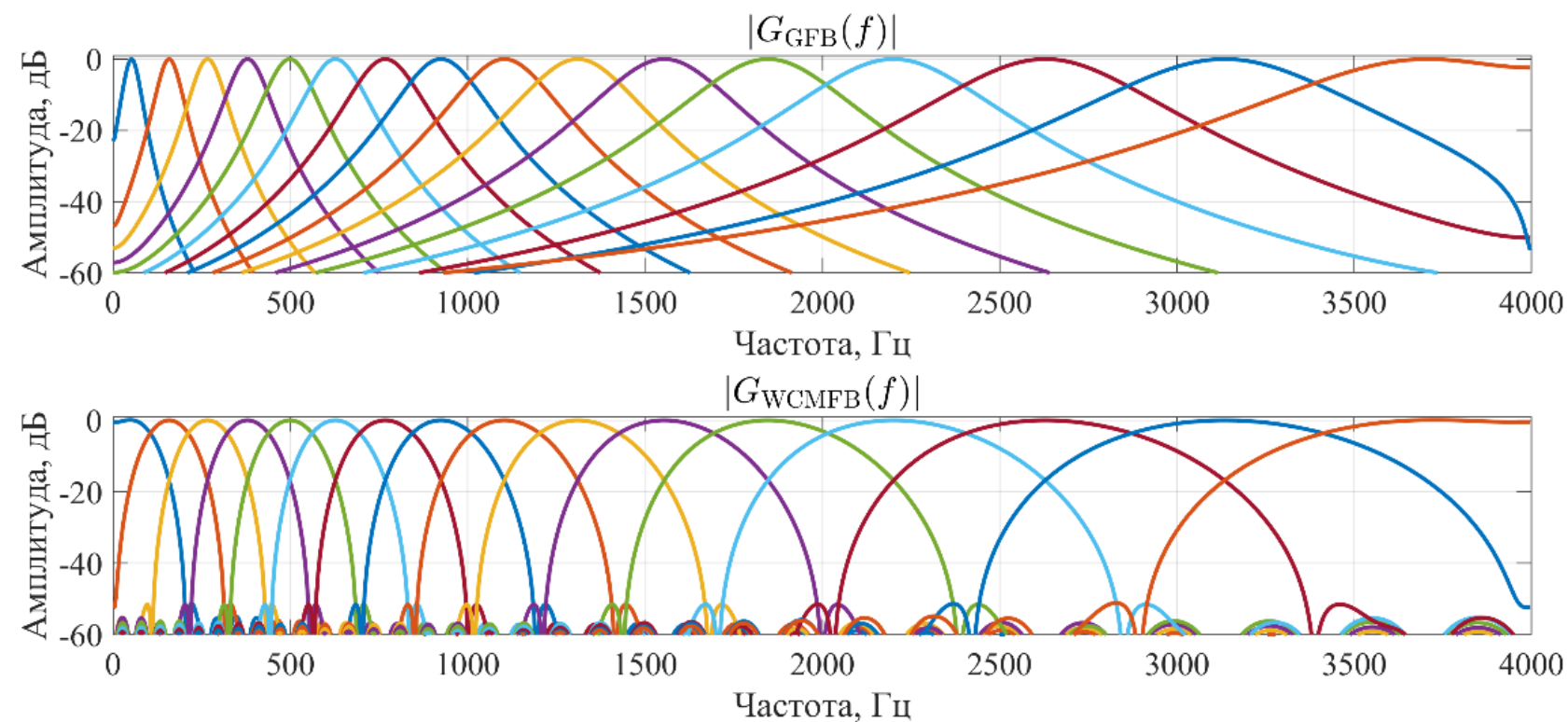
НКМБФ получается из КМБФ *путём отображения частотной оси*, поэтому его частотную характеристику можно записать в виде:

$$H_k(e^{j\omega}) = a_k b_k e^{-j(N-1)\Theta_\alpha(\omega)/2} \mathbf{C}^T(\Theta_\alpha(\omega)) \mathbf{h} W_{2M}^{(k+0,5)} + \\ + \bar{a}_k \bar{b}_k e^{-j(N-1)\Theta_\alpha(\omega)/2} \mathbf{C}^T(\Theta_\alpha(\omega)) \mathbf{h} W_{2M}^{-(k+0,5)}.$$

Данное выражение можно использовать для создания *процедуры оптимизации фильтра-прототипа НКМБФ* для аппроксимации АЧХ БГФ. В этом случае *настроечными параметрами выступают коэффициенты фильтра-прототипа \mathbf{h}* .

Требования к фильтру-прототипу

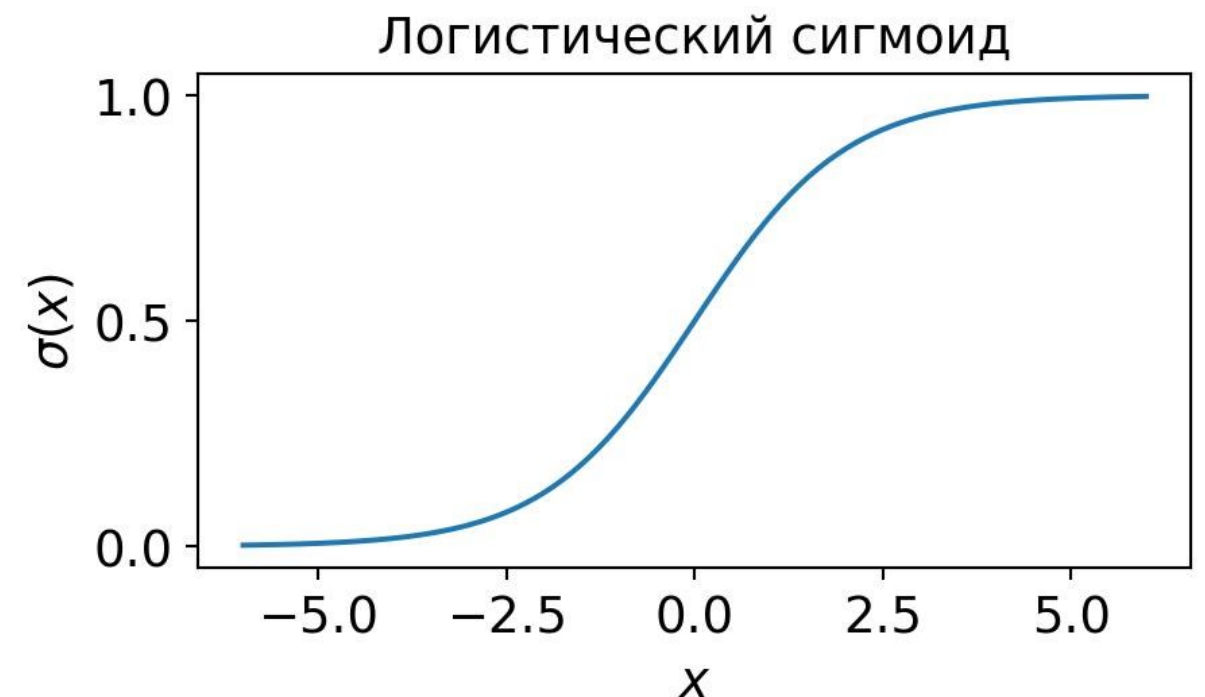
- Частотные характеристики гамматон-фильтров **монотонно спадают** относительно центральной частоты, а АЧХ НКМБФ **имеют колебания в полосе не пропускания**. Следовательно, **необходимо добиться монотонности частотных характеристик НКМБФ**.
- Импульсная характеристика фильтра-прототипа НКМБФ **должна быть монотонна и не иметь пересечений уровня нуля**.



Логистический сигмоид

Для «конструирования» фильтра-прототипа НКМБФ предлагается использовать **функцию логистического сигмоида**:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Её выбор обусловлен её **монотонностью**, а также **отсутствием переходов через нуль**.

Фактически требуется получить **лишь половину реальной импульсной характеристики**, вторая половина образуется симметричным отображением.

Модель импульсной характеристики

Половину импульсной характеристики фильтра-прототипа НКМБФ предлагается формировать с использованием следующей функции:

$$p(t) = A \prod_{r=1}^R \sigma(k_r t + b_r), \quad t \geq 0, A > 0.$$

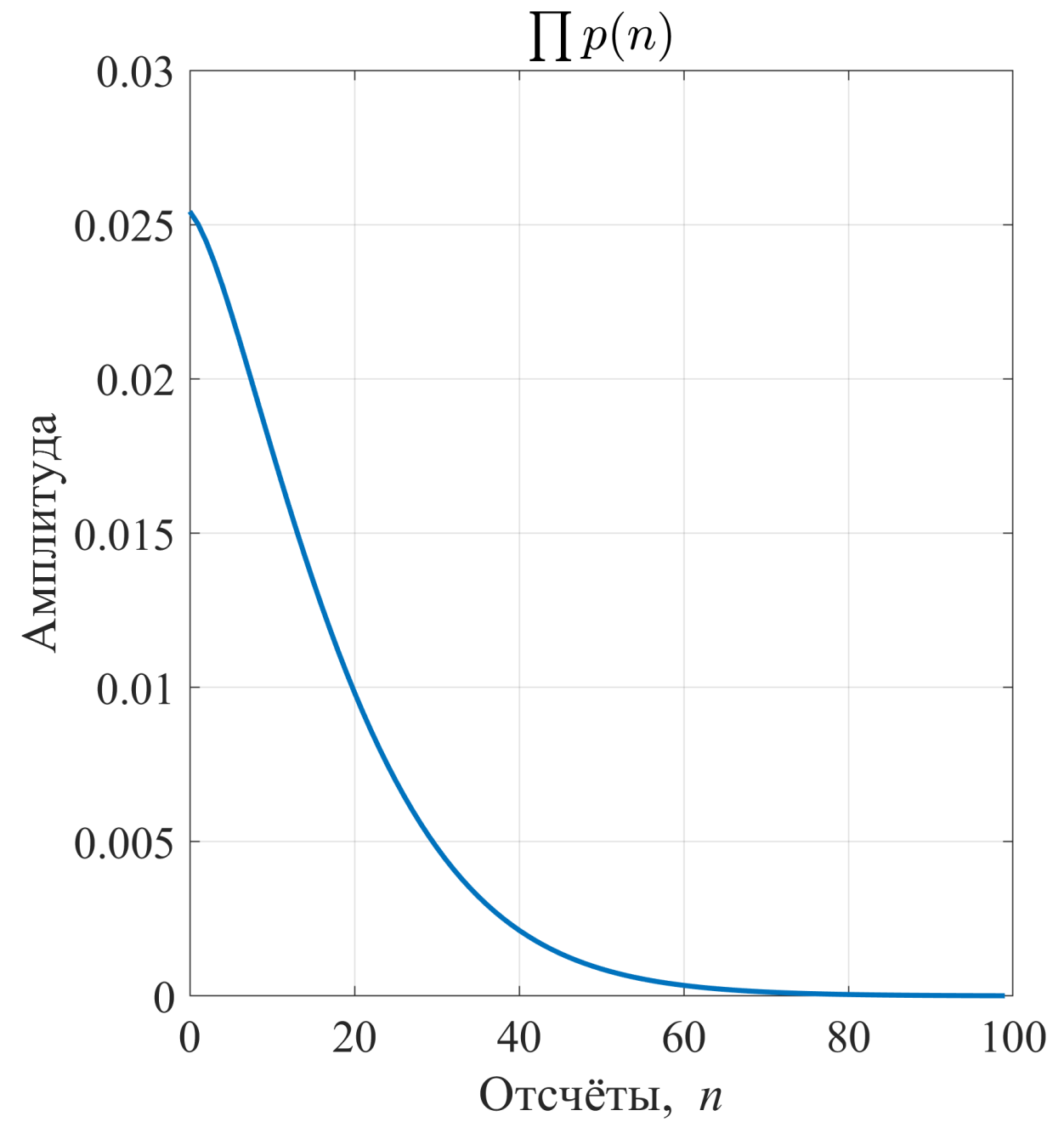
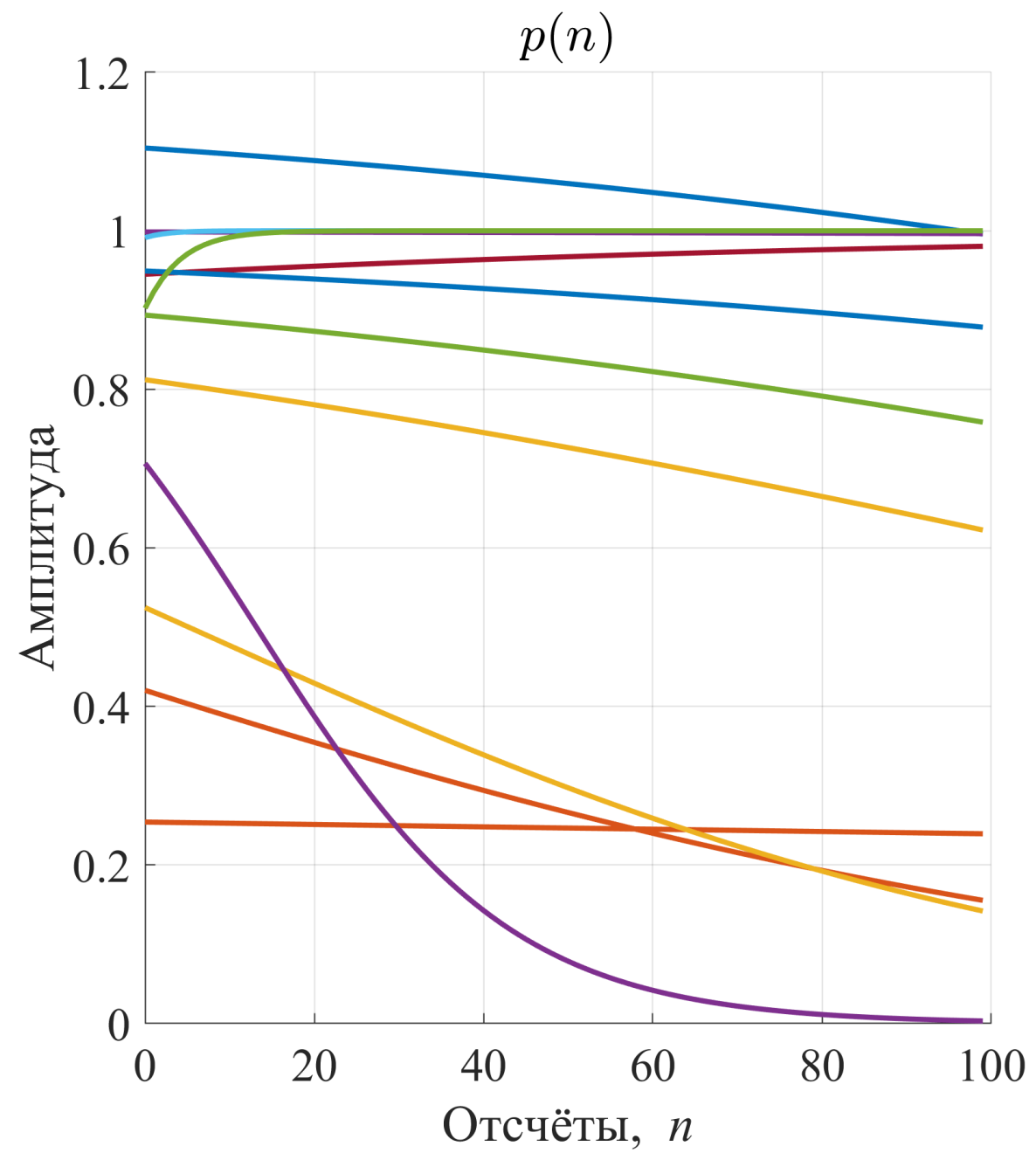
Поскольку $p(t)$ является непрерывной, то **необходимо выполнить её дискретизацию**:

$$p(n) = p(n\Delta T), \quad \Delta T = 1/24, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

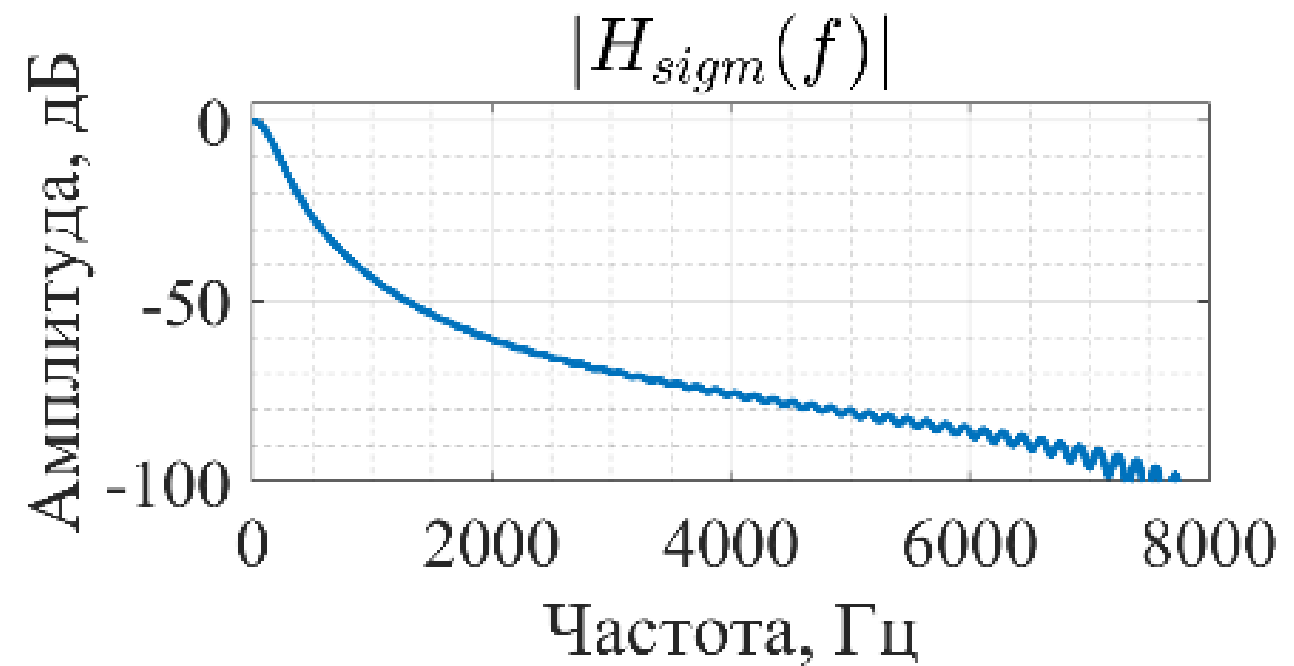
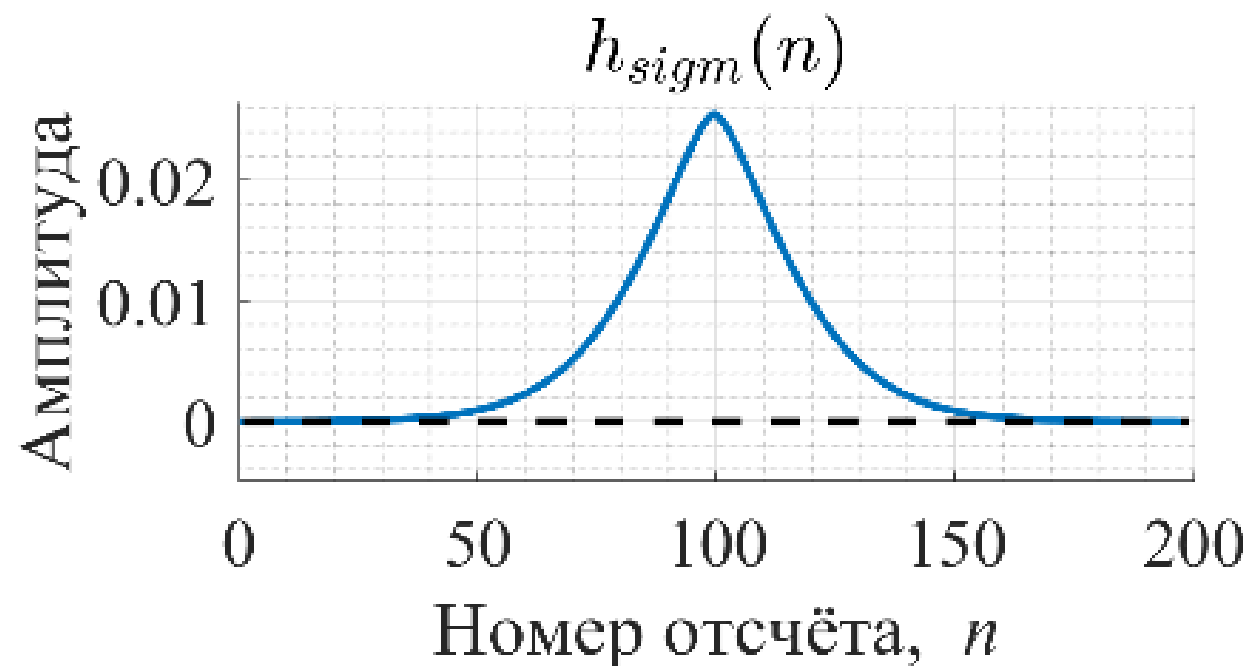
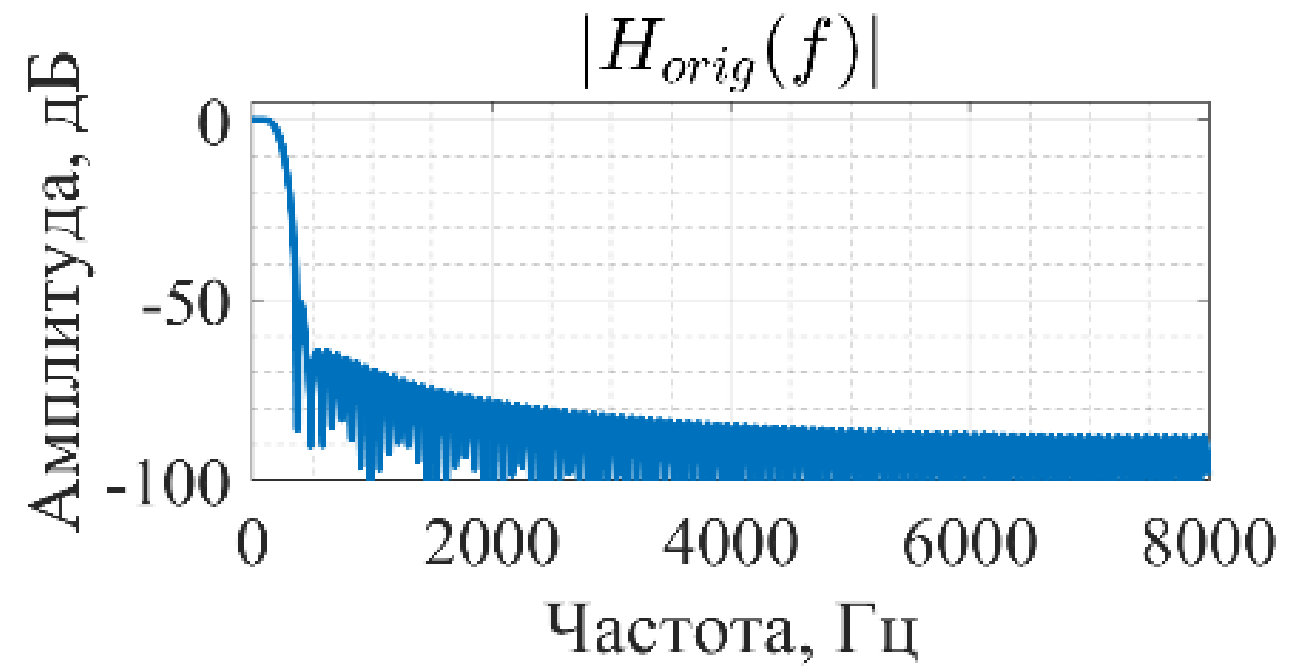
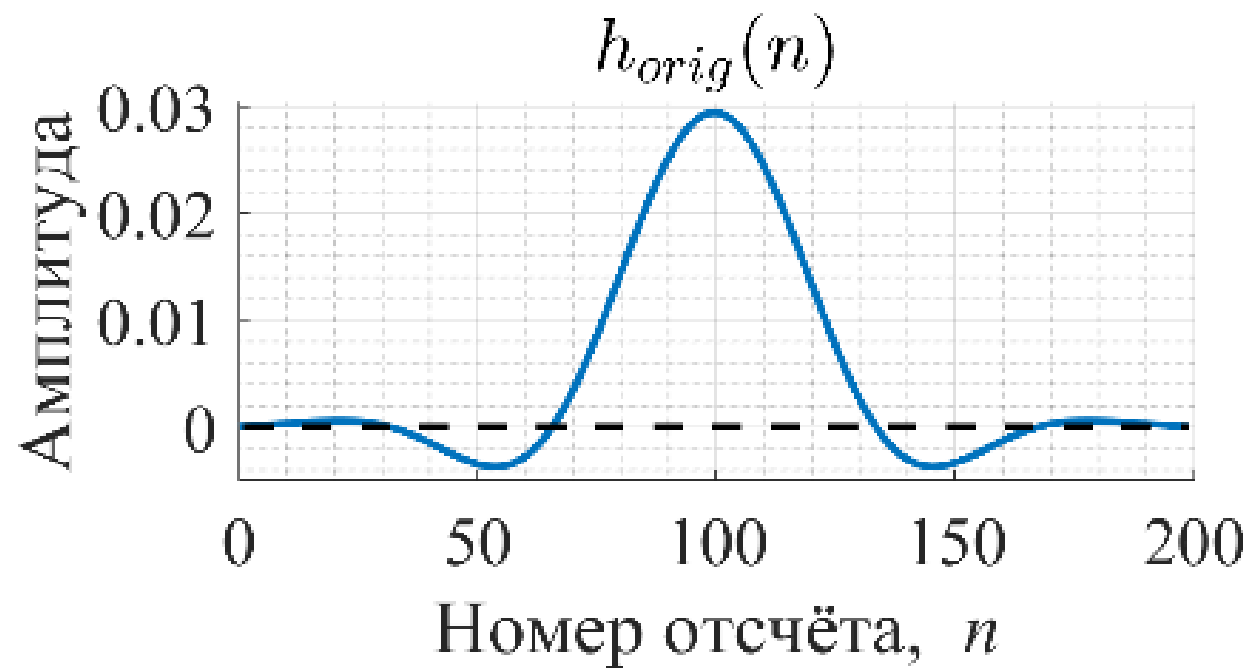
где $p(n)$ – половина импульсной характеристики фильтра прототипа:

$$\mathbf{h} = [p(0) \ p(1) \ \dots \ p(N/2 - 1)]^T.$$

Модель импульсной характеристики



Расчётные формулы



Оптимизация фильтра-прототипа

- Оптимизация фильтра-прототипа НКМБФ базируется на **минимизации среднеквадратичной ошибки** между АЧХ БГФ ($|H_k^g(e^{j\omega})|$) и НКМБФ ($|H_k^c(e^{j\theta(\omega)})|$) в каждом канале:

$$MSE = \frac{1}{M-2} \sum_{k=1}^{M-2} (|H_k^g(e^{j\omega})| - |H_k^c(e^{j\theta(\omega)})|)^2.$$

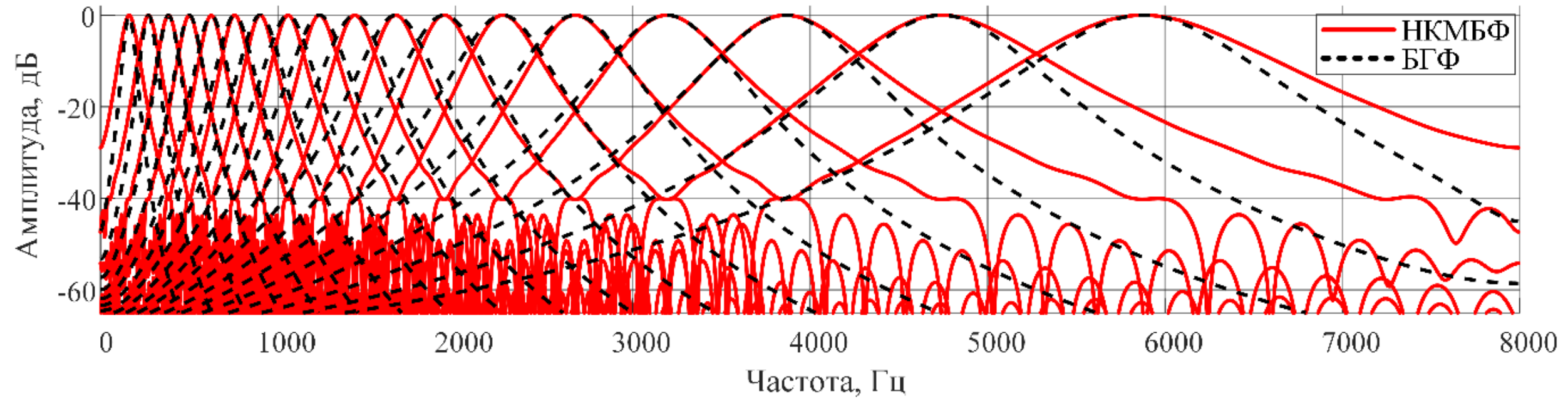
- При расчёте ошибки предлагается **не учитывать первый** ($k = 0$) **и последний каналы** ($k = M - 1$), поскольку у НКМБФ они соответствуют фильтру нижних и верхних частот, а у БГФ – полосовым фильтрам.
- Минимизация MSE выполняется относительно параметров A , k_r , b_r мультипликативной сигмоидной функции фильтра-прототипа.

Экспериментальные исследования

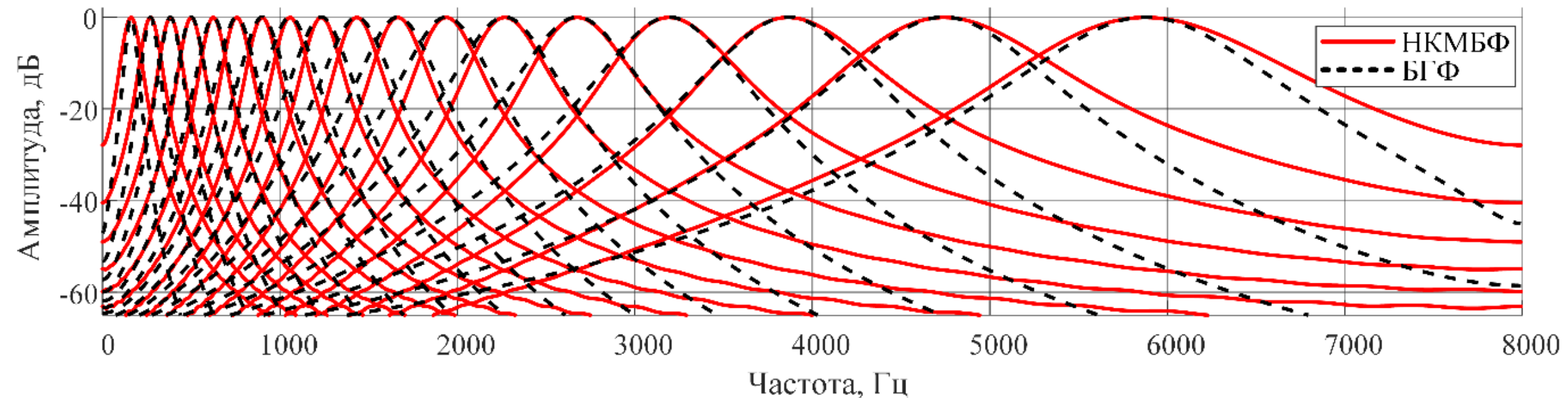
- Для экспериментального исследования эффективности предложенного метода оптимизации **разработана его программная реализация на Python с использованием библиотеки PyTorch.**
- В качестве примера синтезировался **20-канальный НКМБФ.**
- Центральные частоты БФ выбраны в **соответствии с психоакустической шкалой Барков.**
- Итоговый частотный диапазон составил 100...4400 Гц.
- Порядок фильтра-прототипа $N = 2mM = 2 \cdot 5 \cdot 20 = 200$, частота дискретизации $f_s = 16$ кГц, количество сигмoids для синтеза фильтра-прототипа – 12.

Экспериментальные исследования

Результат из предыдущей работы [1]



Полученный результат



¹ Порхун, М.И. *Моделирование частотной характеристики банка гамматон-фильтров при помощи неравнополосного косинусно-модулированного банка фильтров* / М. И. Порхун, М. И. Вашкевич // Цифровая обработка сигналов и её применение: труды 24-й междунар. конф., Россия, Москва, 2022 г. – Т. 1. – С. 53–57.

Результаты экспериментальных исследований

- Для сравнения полученного результата с предыдущим, *вычислена среднеквадратичная ошибка для обеих моделей.*
- В предыдущей работе $MSE = 0.320$, а для предложенной модели $MSE = 0.324$. По величине MSE **модели сопоставимы.**

Результаты экспериментальных исследований

- Для сравнения полученного результата с предыдущим, *вычислена среднеквадратичная ошибка для обеих моделей.*
- В предыдущей работе $MSE = 0.320$, а для предложенной модели $MSE = 0.324$. По величине MSE **модели сопоставимы.**
- По виду АЧХ можно сделать вывод, что предложенный метод позволяет получить аппроксимацию БГФ **с монотонными спадами частотных характеристик.**

Результаты экспериментальных исследований

- Для сравнения полученного результата с предыдущим, *вычислена среднеквадратичная ошибка для обеих моделей.*
- В предыдущей работе $MSE = 0.320$, а для предложенной модели $MSE = 0.324$. По величине MSE **модели сопоставимы.**
- По виду АЧХ можно сделать вывод, что предложенный метод позволяет получить аппроксимацию БГФ **с монотонными спадами частотных характеристик.**
- Фильтры, полученные в предыдущей работе, **имеют колебания в полосе ослабления на уровне -43 дБ**, что является негативным фактором с точки зрения последующего использования банка фильтров для частотного анализа в модели потери слуха.

Заключение

- В работе рассмотрен оптимизационный метод проектирования фильтра-прототипа для аппроксимации частотных характеристик гамматон-фильтров при помощи НКМБФ.
- Предложено «конструировать» фильтр-прототип **на основе мультипликативной сигмоидной функции.**
- Оптимизация фильтра-прототипа выполнена **путём минимизации среднеквадратичной ошибки** между АЧХ БГФ и НКМБФ в каждом канале.
- Эксперимент показал, что **полученные АЧХ достаточно точно аппроксимируют АЧХ БГФ.**
- Разработанный метод, в отличие от существующих подходов, **позволяет получать монотонные спады частотных характеристик банка фильтров.**