Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра Вычислительные методы и программирование

Математическое моделирование динамики твердого тела

Лекции по курсу «Математическое моделирование динамики твердого тела» для студентов по направлению 1-40 05 01-12 специальности «информационные системы и технологии» факультета информационных и управления

Минск БГУИР 2018

Оглавление

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ГЛАВА I. КИНЕМАТИКА

1.1. Механическое движение

Простейшей формой движения материи является механическое движение, которое состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга. Перемещения тел мы наблюдаем повседневно в обыденной жизни. Отсюда следует наглядность механических представлений. Этим же объясняется то, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие. Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется ***механической системой.*** Какие тела следует включить в систему, зависит от характера решаемой задачи. В частном случае система может состоять из одного единственного тела. Выше было указано, что движением в механике называется изменение взаимного расположения тел. Если вообразить себе отдельное изолированное тело, находящееся в пространстве, где нет никаких других тел, то мы не сможем говорить о движении такого тела, потому что нет ничего, по отношению к чему это тело могло бы изменять свое положение. Отсюда следует, что если мы собираемся изучать движение какого-либо тела, то обязательно нужно указать, по отношению к каким другим телам происходит данное движение. Движение происходит как в пространстве, так и во времени (пространство и время – неотъемлемые формы существования материи). Поэтому для описания движения необходимо также определять время. Это делается с помощью часов. Совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов образует ***систему отсчета.*** Движение одного и того же тела относительно различных систем отсчета может иметь разный характер. Для примера представим себе набирающий скорость поезд. Пусть по коридору одного из вагонов этого поезда идет с постоянной скоростью пассажир. Тогда движение пассажира относительно вагона будет равномерным, а относительно поверхности Земли ускоренным. Описать движение тела означает указать для каждого момента времени положение в пространстве и скорость тела. Для того чтобы задать состояние механической системы, нужно указать положения и скорости всех тел, образующих систему. Типичная задача механики заключается в том, чтобы, зная состояние системы в некоторый начальный момент времени t_0, а также законы, управляющие движением, определить состояния системы во все последующие моменты времени t. Отметим, что ни одна физическая задача не может быть решена абсолютно точно. Всегда получают приближенное решение. Степень приближения определяется характером задачи, целью, которой хотят достичь. Решая, задачу приближенно, пренебрегают некоторыми факторами, которые в данном случае не существенны. Например, часто можно бывает пренебречь размерами тела, движение которого изучается. Скажем, при рассмотрении движения Земли вокруг Солнца вполне можно пренебречь размерами Земли. При этом описание движения значительно упрощается – положение Земли в пространстве можно определить одной точкой. Тело, размерами которого в условиях данной задачи, можно пренебречь, называется ***материальной точкой.*** Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров этого тела, а от условий задачи. Одно и то же тело в одних случаях может быть сочтено за материальную точку, в других же должно рассматриваться как протяженное тело. Говоря о каком-то теле как о материальной точке, мы абстрагируемся от его размеров. Вторая абстракция, с которой приходится иметь дело в механике, – это ***абсолютно твердое тело***. В природе нет совершенно недеформируемых тел. Всякое тело под действием приложенных к нему сил в большей или меньшей степени деформируется, т.е. изменяет свою форму и размеры. Однако во многих случаях деформациями тел при рассмотрении их движений можно пренебречь. Если это имеет место, то тело называют абсолютно твердым. Таким образом, ***абсолютно твердым телом*** называется тело, деформациями которого можно в условиях данной задачи пренебречь. Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – ***поступательное*** и ***вращательное***.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе (рис. 1.1). При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения*** (рис. 1.2). Ось вращения может находиться вне тела (см. рис. 1.2, б). Поскольку, говоря о каком-либо теле как о материальной точке, мы отвлекаемся от его протяженности, понятие вращательного движения вокруг проходящей через него оси к такому телу неприменимо.

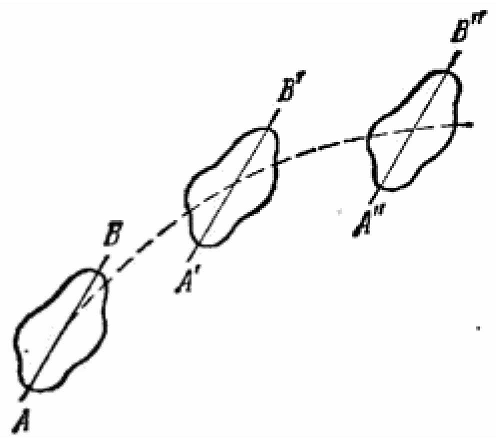


Рис. 1.1.

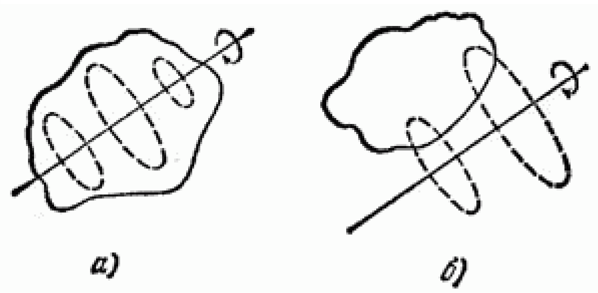


Рис. 1.2.

Для того чтобы получить возможность описывать движение количественно, приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо систему координат, например, декартову. Тогда положение материальной точки можно определить, задав три числа *x, y, z* – декартовы координаты этой точки. Систему координат можно реализовать, набрав из одинаковых масштабных стержней или линеек прямоугольную решетку (рис. 1.3). В узлах этой решетки нужно разместить одинаковые синхронизированные друг с другом часы. Положение материальной точки и соответствующий ему момент времени регистрируются по ближайшим к материальной точке масштабам и часам. Иметь дело с материальной точкой проще, чем с протяженным телом. Поэтому мы сначала будем изучать механику материальной точки, а потом перейдем к механике твердого тела.

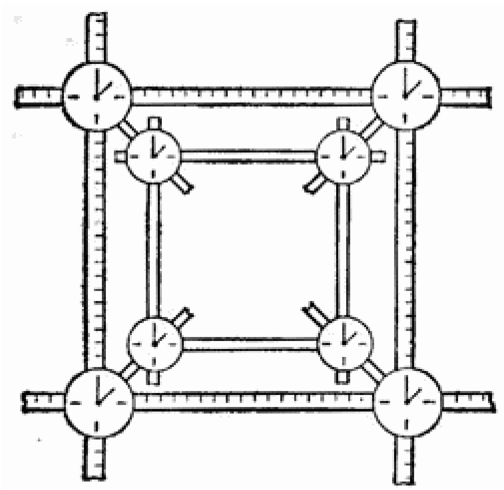


Рис. 1.3.

Изложение мы начнем с кинематики, а затем займемся динамикой. Напомним, что кинематика изучает движение тел, не интересуясь причинами, обусловливающими это движение. Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения.

1.2. Некоторые сведения о векторах

Определение вектора. Векторами называются величины, характеризующиеся численным значением и направлением и, кроме того, складывающиеся по правилу параллелограмма.

Последнее требование является весьма существенным. Можно указать такие величины, которые характеризуются численным значением и направлением, однако складываются иначе, чем векторы. В качестве примера приведем поворот тела вокруг некоторой оси на конечный угол φ. Такой поворот можно изобразить в виде отрезка длины φ направленного по оси, вокруг которой осуществляется поворот, в сторону, связанную с направлением вращения правилом правого винта. На рис. 1.4 в верхнем ряду показаны два последовательных поворота шара на углы $\pi/2$ изображаемые отрезками φ_1 и φ_2.

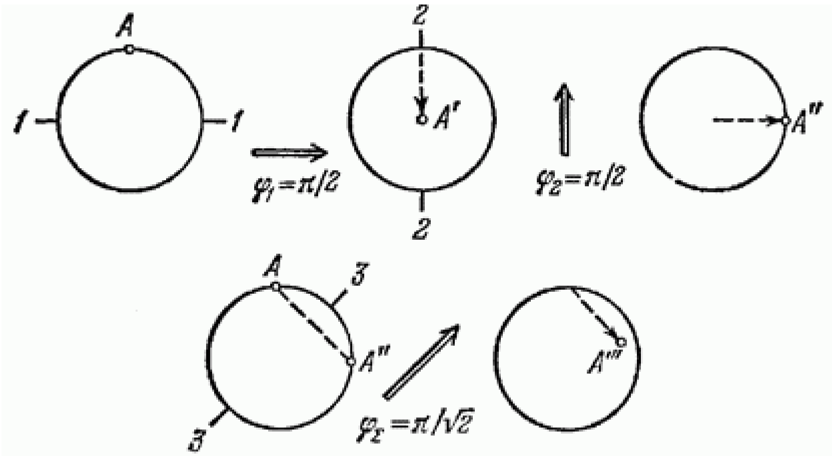


Рис. 1.4.

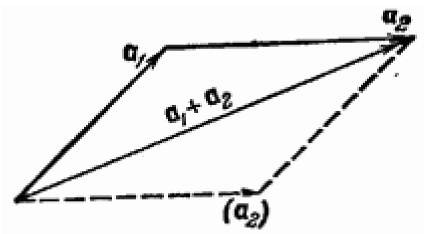
Первый поворот, совершаемый вокруг оси *1–1*, переводит точку A шара в положение A', второй, совершаемый вокруг оси *2–2*, – в положение A''. Такого же результата (т.е. перевода точки A в положение A'') можно достичь, повернув шар вокруг оси *3–3* (см. нижний ряд на рис. 1.4) на угол π. Следовательно, такой поворот следует рассматривать как сумму поворотов φ_1 и φ_2. Однако его нельзя получить из отрезков φ_1 и φ_2 сложив их по правилу параллелограмма. Такое сложение дает отрезок длины $\pi/\sqrt{2}$ вместо требуемой длины π. Поворот на угол $\pi/\sqrt{2}$ переводит точку A в точку A'''. Отсюда вытекает, что изображаемые направленными отрезками повороты на конечные углы не обладают свойствами векторов. Численное значение вектора называется его ***модулем***. Образно говоря, модуль дает длину вектора. Модуль вектора –

скаляр, причем всегда положительный. На чертежах векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце. Длина отрезка определяет в установленном масштабе модуль вектора, а стрелка указывает направление вектора. Векторы принято обозначать буквами жирного шрифта, например, ***a*, *b*, *v*, *F*** и т.д. Такая же буква обычного шрифта используется для обозначения модуля вектора, например, a есть модуль вектора ***a***. Иногда для обозначения модуля приходится пользоваться символом вектора, заключенным между двумя вертикальными черточками: $|a|$=модулю вектора ***a***. Таким способом обозначается, например, модуль суммы векторов $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$:

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| = \text{модуль вектора } (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2).$$

В этом случае символ a_1+a_2 означает сумму модулей складываемых векторов, которая, вообще говоря, не равна модулю суммы векторов (равенство имеет место лишь в том случае, когда складываемые векторы имеют одинаковое направление). Векторы, направленные вдоль параллельных прямых (в одну и ту же или в противоположные стороны), называются ***коллинеарными***. Векторы, которые лежат в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***. Посредством параллельного переноса коллинеарные векторы могут быть расположены вдоль одной и той же прямой, а компланарные векторы могут быть сведены в одну плоскость. Совпадающие по модулю коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, считаются равными друг другу.

Сложение и вычитание векторов. Практически сложение векторов удобнее производить без построения параллелограмма. Как видно из рис. 1.5, такой же результат достигается, если начало второго вектора совместить с концом первого, а затем провести из начала первого в конец второго результирующий вектор. Особенно целесообразен такой прием в том случае, когда приходится складывать большее, чем два количество векторов (рис. 1.6).



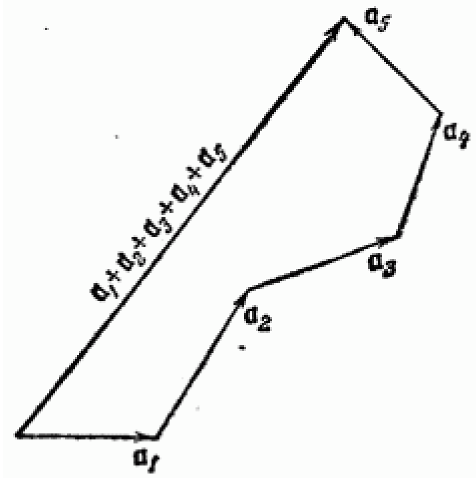


Рис. 1.5. Рис. 1.6.

Разностью двух векторов ***a*** и ***b*** называется такой вектор ***c***, который в сумме с вектором ***b*** дает вектор ***a*** (рис. 1.7; об изображенном пунктиром векторе –***b*** речь идет ниже). Модуль разности двух векторов, как и модуль суммы, можно записать только с помощью вертикальных черточек:

$$|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = \text{модуль вектора } (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2),$$

поскольку символ $a_1 – a_2$ означает разность модулей векторов a_1 и a_2, которая, вообще говоря, не равна модулю разности.

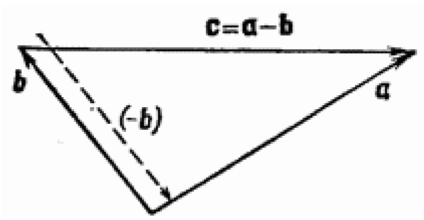


Рис. 1.7. Рис. 1.8.

Умножение вектора на скаляр. В результате умножения вектора ***a*** на скаляр α получается новый вектор ***b***=α***a***, модуль которого в $|\alpha|$ раз больше, чем модуль вектора ***a*** (b=$|\alpha|a$). Направление же вектора ***b*** либо совпадает с направлением вектора ***a*** (если α>0), либо противоположно направлению вектора ***a*** (если α<0). Из сказанного вытекает, что умножение на –1 изменяет направление вектора на обратное. Следовательно, векторы ***a*** и –***a*** имеют одинаковые модули, но противоположны по направлению. С помощью рис. 1.7 легко убедиться в том, что вычитание из вектора ***a*** вектора ***b*** равнозначно прибавлению к вектору ***a*** вектора –***b***. Из определения операции умножения вектора на скаляр следует, что всякий вектор ***a*** можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a,$$

где a – модуль вектора ***a***, $\boldsymbol{e_a}$ – вектор с модулем, равным единице, имеющий такое же направление, как и ***a*** (рис. 1.8). Вектор $\boldsymbol{e_a}$ называется ***единичным вектором*** или ***ортом*** вектора ***a***. Орт можно представить в виде

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{a},$$

откуда следует, что орт является безразмерной величиной. Орты можно сопоставлять не только векторам, но и любым направлениям в пространстве. Например, $\boldsymbol{e_x}$ есть орт координатной оси x, $\boldsymbol{e_n}$ – орт нормали к кривой или поверхности, $\boldsymbol{e_\tau}$ – орт касательной к кривой и т.д.

Линейная зависимость между векторами. Рассмотрим три неколлинеарных вектора ***a, b, c,*** которые лежат в одной плоскости.

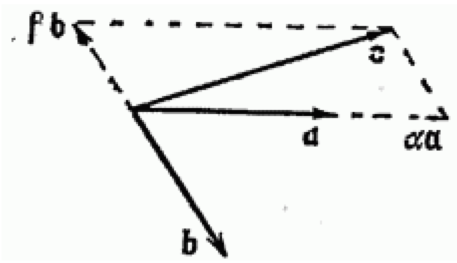


Рис. 1.9.

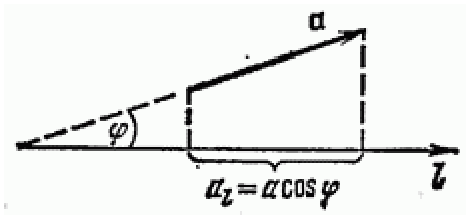


Рис. 1.10.

Из рис. 1.9 видно, что любой из них (например, ***c***) можно выразить через два других с помощью соотношения

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \tag{1.2.1}$$

где α и β – некоторые числа (для изображенного на рисунке случая α>1, –1<β<0). Отсюда заключаем, что любой вектор ***c***, лежащий в одной плоскости с неколлинеарными векторами ***a*** и ***b***, может быть выражен через эти векторы с помощью линейного соотношения (1.2.1). При фиксированных векторах ***a*** и ***b*** всякий третий вектор однозначно определяется двумя величинами α и β. Пусть даны три вектора ***a, b, c,*** каждый из которых некомпланарен с остальными двумя. По аналогии с (1.2.1) легко сообразить, что любой вектор ***d*** можно представить как линейную комбинацию заданных векторов:

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}.$$

При фиксированных векторах ***a, b*** и ***c*** любой вектор ***d*** однозначно определяется тремя величинами α, β, γ, каждая из которых может быть как положительной, так и отрицательной.

Проекция вектора. Рассмотрим некоторое направление в пространстве, которое мы зададим осью *l* (рис. 1.10). Пусть вектор ***a*** образует с осью *l* угол φ. Величина

$$a_l=a\cos\varphi$$

(а – модуль вектора) называется проекцией вектора ***a*** на ось *l*. Проекция обозначается той же буквой, что и вектор, с добавлением индекса, указывающего направление, на которое спроектирован вектор. Проекция вектора есть величина алгебраическая. Если вектор образует с данным направлением острый угол, то $\cos\varphi>0$, так что проекция положительна. Если угол φ тупой, то $\cos\varphi<0$ и, следовательно, проекция отрицательна. Когда вектор перпендикулярен к данной оси, проекция равна нулю. Проекция вектора имеет простой геометрический смысл. Она равна расстоянию между проекциями на ось начала и конца отрезка, изображающего данный вектор. В случае $\varphi<\pi/2$ это расстояние берется со знаком плюс, в случае $\varphi>\pi/2$ – со знаком минус. Пусть $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ (рис. 1.11). Из рисунка легко заключить, что проекция результирующего вектора ***a*** на некоторое направление равна сумме проекций складываемых векторов:

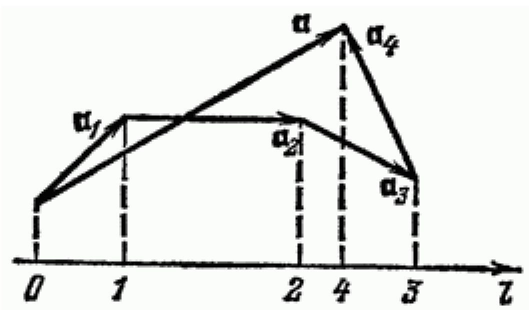
$$a_l=a_{1l}+a_{2l}+a_{3l}+a_{4l}. \qquad (1.2.2)$$

Напомним, что при суммировании проекций, изображенных на рис. 2.8 векторов расстояния *0–1, 1–2* и *2–3* нужно взять со знаком плюс, а расстояние *3–4* – со знаком минус. Формула (1.2.2) справедлива при любом числе слагаемых.

Выражение вектора через его проекции на координатные оси. Возьмем декартовы оси координат и рассмотрим вектор ***a***, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси *z* (рис. 1.12). Введем орты координатных осей, т.е. единичные векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{e}_z$ на рисунке не показан, он перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен на нас). Заметим, что эта тройка ортов полностью определяет систему координат и поэтому называется ***базисом координатной системы***. Из рис. 1.12 видно, что вектор ***a*** можно представить в виде линейной комбинации ортов $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$ (см. (1.2.1)):

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y.$$

Роль коэффициентов α и β играют проекции вектора на оси координат. В рассматриваемом примере проекция a_x отрицательна, поэтому вектор $a_x\boldsymbol{e}_x$ имеет направление, противоположное направлению орта $\boldsymbol{e}_x$.



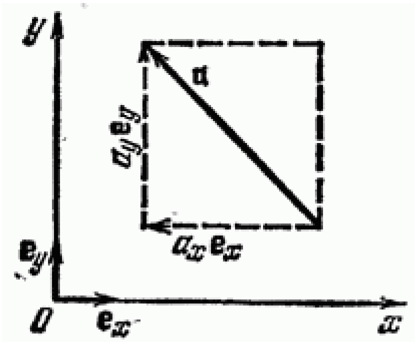


Рис. 1.11. Рис. 1.12.

Мы взяли вектор ***a***, перпендикулярный к оси *z*, вследствие чего $a_z=0$. В общем случае, когда все три проекции вектора отличны от нуля,

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z. \qquad (1.2.3)$$

Таким образом, любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и орты этих осей. В связи с этим проекции на координатные оси называются ***компонентами вектора***. Величины a_x, a_y, a_z равны (с точностью до знака) сторонам прямоугольного параллелепипеда, большой диагональю которого служит вектор ***a*** (рис. 1.13). Поэтому имеет место соотношение

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Пусть ***c***=***a***+***b***. Представив каждый из векторов в соответствии с формулой (1.2.3), получим:

$$c_x\mathbf{e}_x + c_y\mathbf{e}_y + c_z\mathbf{e}_z = (a_x + b_x)\,\mathbf{e}_x + (a_y + b_y)\,\mathbf{e}_y + (a_z + b_z)\,\mathbf{e}_z$$

(мы вынесли за скобки общие множители $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$). Равные векторы имеют одинаковые проекции на координатные оси. На этом основании можно написать, что

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z \qquad (1.2.5)$$

Формулы (1.2.5) являются аналитическим выражением правила сложения векторов. Они справедливы при любом числе слагаемых.

Радиус-вектор. Радиусом-вектором ***r*** некоторой точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку (рис. 1.14). Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

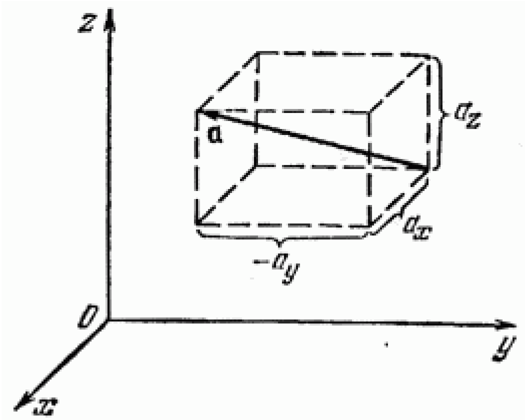
Следовательно, в соответствии с (1.2.3) радиус-вектор можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Согласно (1.2.4)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Скалярное произведение векторов. Два вектора ***a*** и **b** можно умножить друг на друга двумя способами; один способ приводит к скалярной величине, другой дает в результате некоторый новый вектор.



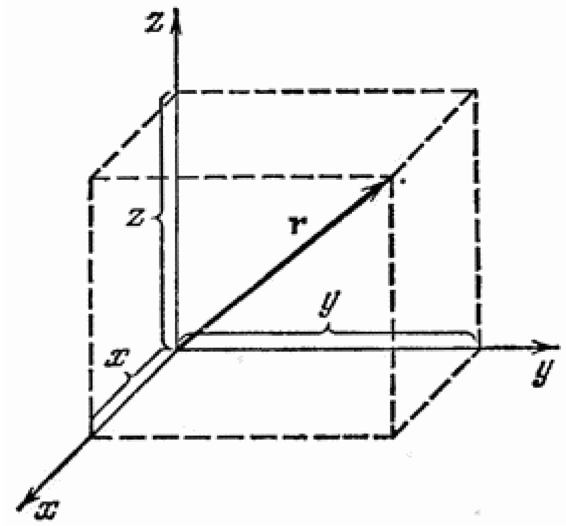


Рис. 1.13. Рис. 1.14.

В соответствии с этим существует два произведения векторов – скалярное и векторное. Отметим, что операции деления вектора на вектор не существует. Скалярным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними (рис. 1.15):

$$\mathbf{ab} = ab\cos\alpha \qquad (1.2.6)$$

При записи скалярного произведения символы перемножаемых векторов пишутся рядом без какого-либо знака между ними. Выражение (1.2.6) есть алгебраическая величина: при α остром ***ab***>0, при α тупом ***ab***<0. Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов (α=π/2) равно нулю. Заметим, что под квадратом вектора всегда подразумевают скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = aa\cos\alpha = a^2.$$

Таким образом, квадрат вектора равен квадрату его модуля. В частности, квадрат любого орта равен единице:

$$\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1.$$

Попутно отметим, что вследствие взаимной перпендикулярности ортов скалярные произведения вида $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k$ равны нулю, если $i \neq k$. Очень удобен ***символ Кронекера*** $\boldsymbol{\delta_{ik}}$, который определяется следующим образом:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = k, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq k. \end{cases}$$

С использованием этого символа, установленные выше свойства скалярных произведений ортов координатных осей можно выразить одной формулой:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (i,\ k = x,\ y,\ z) \tag{1.2.7}$$

(индексы *i* и *k* могут принимать независимо друг от друга значения *x, y, z*). Из определения (1.2.6) следует, что скалярное произведение коммутативно, т.е. не зависит от порядка сомножителей:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

Выражение (1.2.6) можно записать несколькими способами:

$$\mathbf{ab} = ab \cos\alpha = (a \cos\alpha)\, b = a(b \cos\alpha).$$

Из рис. 1.15 видно, что $a{\cdot}cos\alpha$ равно a_b – проекции вектора ***a*** на направление вектора ***b***. Аналогично $b{\cdot}cos\alpha{=}b_a$ – проекции вектора ***b*** на направление вектора ***a***. Поэтому можно сказать, что скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модуля одного из перемножаемых векторов на проекцию второго вектора на направление первого:

$$\mathbf{ab} = a_b b = ab_a.$$

Приняв во внимание, что проекция суммы векторовравна сумме проекций складываемых векторов, можно написать:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots) = a(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)_{\text{пр. }\mathbf{a}} = a(b_a + c_a + \ldots) = \\ = ab_a + ac_a + \ldots = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \ldots$$

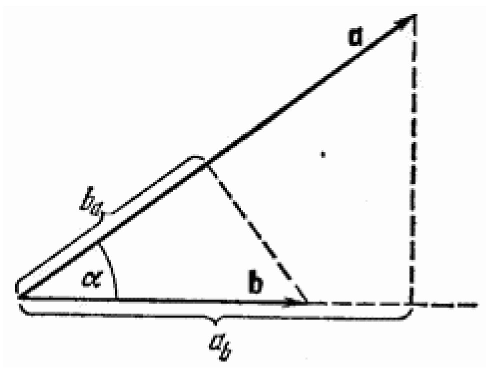


Рис. 1.15.

Отсюда следует, что скалярное произведение векторов дистрибутивно – произведение вектора ***a*** на сумму нескольких векторов равно сумме произведений вектора ***a*** на каждый из складываемых векторов, взятый в отдельности. Представив перемножаемые векторы в виде (1.2.3) и воспользовавшись дистрибутивностью скалярного произведения, получим:

$$\mathbf{ab}=(a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z)(b_x\mathbf{e}_x+b_y\mathbf{e}_y+b_z\mathbf{e}_z)=$$
$$=a_xb_x\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x+a_xb_y\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y+a_xb_z\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z+a_yb_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x+$$
$$+a_yb_y\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y+a_yb_z\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z+a_zb_x\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x+a_zb_y\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y+a_zb_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Теперь учтем (1.2.7). В итоге получим выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов:

$$\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (1.2.8)$$

Заметим, что при поворотах координатных осей проекции векторов на эти оси меняются. Однако величина *ab·cosα* от выбора осей не зависит. Отсюда заключаем, что изменения проекций векторов ***a*** и ***b*** при поворотах осей носят такой характер, что их комбинация вида (1.2.8) остается инвариантной (неизменной):

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=\mathrm{inv}.$$

Легко сообразить, что проекцию вектора ***a*** на направление *l* можно представить в виде

$$a_l=\mathbf{ae}_l,$$

где $\boldsymbol{e}_l$ – орт направления *l*. Аналогично

$$a_x=\mathbf{ae}_x,\quad a_y=\mathbf{ae}_y,\quad a_z=\mathbf{ae}_z.$$

Векторное произведение. Векторным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется вектор ***c***, определяемый формулой

$$\mathbf{c}=ab\sin\alpha\cdot\mathbf{n}, \qquad (1.2.9)$$

где *a* и *b* – модули перемножаемых векторов, α – угол между векторами, ***n*** – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы ***a*** и ***b*** (рис. 1.16). Направление ***n*** выбирается так, чтобы последовательность векторов ***a***, ***b***, ***n*** образовывала правовинтовую систему. Это означает, что, если смотреть вслед вектору ***n***, то совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке.

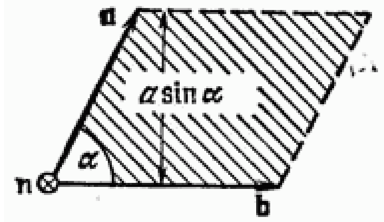


Рис. 1.16.

На рис. 1.16 вектор ***n*** направлен за чертеж и поэтому изображен кружком с крестиком. Направление вектора ***c*** совпадает с направлением ***n***. Символически векторное произведение можно записать двумя способами:

$$[\mathbf{ab}] \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Мы будем пользоваться первым из них, причем иногда во избежание путаницы будем ставить запятую между сомножителями. Итак, согласно (1.2.9)

$$[\mathbf{ab}]=ab\sin\alpha\cdot\mathbf{n}. \qquad (1.2.10)$$

Из рис. 1.16 видно, что модуль векторного произведения имеет простой геометрический смысл – выражение $ab\cdot sin\alpha$ численно равно площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах. Направление вектора [***a,b***] мы определили, связав его с направлением вращения от первого сомножителя ко второму. При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор ***r***, скорость ***v***, сила ***F*** и т.п., вопрос о выборе их направления не возникает – оно вытекает естественным образом из природы самих величин. Подобные векторы называются ***истинными*** (или ***полярными***). Векторы типа [***a,b***], направление которых связывается с направлением вращения, называются ***псевдовекторами*** (или ***аксиальными векторами***). При изменении условия, например, при переходе от правой системы координат к левой, направления псевдовекторов изменяются на обратные, истинные же векторы при этом остаются без изменений. Следует иметь в виду, что векторное произведение будет псевдовектором только в том случае, когда оба перемножаемых вектора являются истинными (или оба – псевдовекторами). Векторное же произведение истинного вектора на псевдовектор будет истинным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов, на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед одним из сомножителей. В итоге величина, выражаемая векторным произведением, останется без изменений. Поскольку направление векторного произведения определяется направлением вращения от первого сомножителя ко второму, результат векторного перемножения зависит от порядка сомножителей. Перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное. Таким образом, векторное произведение не обладает свойством коммутативности:

$$[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}].$$

Можно доказать, что векторное произведение дистрибутивно, т.е. что

$$[\mathbf{a},\ (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots)] = [\mathbf{ab}_1] + [\mathbf{ab}_2] + \ldots$$

Рассмотрим векторные произведения ортов координатных осей (рис. 1.17). В соответствии с определением (1.2.10)

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] = [\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] = [\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z] = 0,\\
&[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] = -[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_z,\\
&[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] = -[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_x,\\
&[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] = -[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_y.
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Представив перемножаемые векторы в виде (1.2.3) и воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения, получим:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{ab}] &= [(a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z),\ (b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z)] =\\
&= a_xb_x[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] + a_xb_y[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] + a_xb_z[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] + a_yb_x[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] + a_yb_y[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] +\\
&\quad + a_yb_z[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] + a_zb_x[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] + a_zb_y[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] + a_zb_z[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z].
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (1.2.11), придем к следующему выражению:

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{e}_x(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{e}_y(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{e}_z(a_xb_y - a_yb_x).$$

Полученное выражение можно представить в виде определителя:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение.

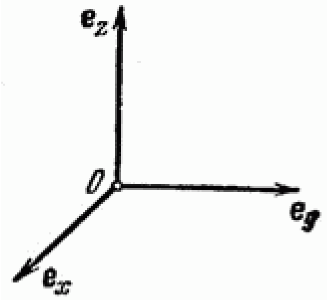


Рис. 1.17.

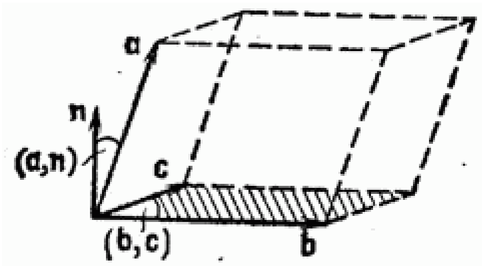


Рис. 1.18.

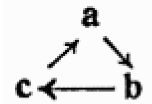
Смешанным (или ***скалярно-векторным***) произведением трех векторов называется выражение $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$, т.е. скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Согласно определениям (1.2.6) и (1.2.10)

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = a\{bc \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}).$$

Здесь $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – угол между $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$ – угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и ортом $\boldsymbol{n}$, определяющим направление вектора $[\boldsymbol{bc}]$. Из рис. 1.18 видно, что выражение $bc \cdot sin(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ численно равно площади основания параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, а выражение $a \cdot cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$ численно равно высоте этого параллелепипеда, взятой со знаком плюс, если угол $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$ острый, и со знаком минус, если этот угол тупой. Следовательно, выражение $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$ имеет простой геометрический смысл – оно численно равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах (взятому со знаком плюс или минус в зависимости от величины угла $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$). При вычислении объема параллелепипеда результат не может зависеть от того, какая из его граней взята в качестве основания. Отсюда следует, что

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}].$$

Таким образом, смешанное произведение допускает циклическую перестановку сомножителей, т.е. замену каждого из сомножителей следующим за ним в цикле:



Двойное векторное произведение. Рассмотрим двойное векторное произведение трех векторов ***a, b, c***

$$\mathbf{d}=[\mathbf{a},\ [\mathbf{bc}]].$$

Всякое векторное произведение перпендикулярно к обоим сомножителям. Поэтому вектор ***d*** перпендикулярен к орту ***n***, определяющему направление вектора [***bc***]. Отсюда вытекает, что вектор ***d*** лежит в плоскости, образованной векторами ***b*** и ***c***, следовательно, может быть представлен как линейная комбинация этих векторов:

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$$

(см. (1.2.1)). Соответствующий расчет дает, что $\alpha=\boldsymbol{ac}$, $\beta=-\boldsymbol{ab}$. Таким образом,

$$[\mathbf{a},\ [\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Запоминание этой формулы облегчается тем, что ее можно прочесть как «бац минус цаб».

Производная вектора. Рассмотрим вектор, который изменяется со временем по известному закону ***a****(t)*. Проекции этого вектора на координатные оси представляют собой заданные функции времени. Следовательно,

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{e}_x a_x(t)+\mathbf{e}_y a_y(t)+\mathbf{e}_z a_z(t)$$

(мы предполагаем, что координатные оси не поворачиваются в пространстве, так что орты осей со временем не изменяются). Пусть за промежуток времени Δt проекции вектора получают приращения Δa_x, Δa_y, Δa_z. Тогда вектор получит приращение $\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_x\Delta a_x+\boldsymbol{e}_y\Delta a_y+\boldsymbol{e}_z\Delta a_z$. Скорость изменения вектора ***a*** со временем можно охарактеризовать отношением $\Delta\boldsymbol{a}$ к Δt:

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}=\mathbf{e}_x\frac{\Delta a_x}{\Delta t}+\mathbf{e}_y\frac{\Delta a_y}{\Delta t}+\mathbf{e}_z\frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \qquad (1.2.12)$$

Это отношение дает среднюю скорость изменения ***a*** в течение промежутка времени Δt. Допустим, что ***a*** изменяется со временем непрерывно, без скачков. Тогда чем меньше промежуток Δt, тем точнее величина (1.2.12) характеризует скорость изменения $\boldsymbol{a}$ в момент времени t, предшествующий интервалу Δt. Следовательно, скорость изменения вектора $\boldsymbol{a}$ в момент времени t равна пределу отношения (1.2.12), получающемуся при неограниченном уменьшении Δt, скорость изменения $\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t} =$

$$= \mathbf{e}_x \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \mathbf{e}_y \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \mathbf{e}_z \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \qquad (1.2.13)$$

Если есть некоторая функция $f(t)$ аргумента t, то предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δt получающийся при стремлении Δt к нулю, называется производной функции $f(t)$ по t и обозначается символом $\frac{df}{dt}$. Поэтому выражение (1.2.13) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{e}_x \frac{da_x}{dt} + \mathbf{e}_y \frac{da_y}{dt} + \mathbf{e}_z \frac{da_z}{dt}. \qquad (1.2.14)$$

Полученный результат означает, что проекции вектора $d\boldsymbol{a}/dt$ на координатные оси равны производным по времени проекций вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр. } x} = \frac{da_x}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр. } y} = \frac{da_y}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр. } z} = \frac{da_z}{dt}.$$

В физике принято производные по времени обозначать символом соответствующей величины с точкой над ним, например,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}, \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{a}}.$$

Воспользовавшись таким обозначением, формуле (1.2.14) можно придать вид

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{e}_x \dot{a}_x + \mathbf{e}_y \dot{a}_y + \mathbf{e}_z \dot{a}_z. \qquad (1.2.15)$$

Если в качестве $\boldsymbol{a}(t)$ взять радиус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ движущейся точки, то согласно (1.2.15)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} + \mathbf{e}_z \dot{z},$$

где x, y, z суть функции от t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Дифференциалом («приращением») функции $f(t)$ называется выражение

$$df = f'\,dt, \tag{1.2.16}$$

где f' – производная f по t. Согласно (1.2.14) дифференциал («приращение») вектора $\boldsymbol{a}$ определяется формулой

$$d\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\,da_x + \mathbf{e}_y\,da_y + \mathbf{e}_z\,da_z.$$

В частности,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\,dx + \mathbf{e}_y\,dy + \mathbf{e}_z\,dz.$$

Заметим, что приращение функции за очень малый, но конечный промежуток времени Δt приближенно равно

$$\Delta f \approx f'\,\Delta t = \frac{df}{dt}\,\Delta t. \tag{1.2.17}$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ это приближенное равенство переходит в точное равенство (1.2.16). Формулу, аналогичную (1.2.17), можно написать и для векторной функции:

$$\Delta\mathbf{a} \approx \frac{d\mathbf{a}}{dt}\,\Delta t. \tag{1.2.18}$$

Производная произведения функций. Рассмотрим функцию $\boldsymbol{b}(t)$ которая равна произведению скалярной функции $\varphi(t)$ на векторную функцию $\boldsymbol{a}(t)$: $\boldsymbol{b}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)$, или сокращенно: $\boldsymbol{b}=\varphi\boldsymbol{a}$. Найдем приращение функции $\boldsymbol{b}$:

$$\Delta\mathbf{b} = \Delta(\varphi\mathbf{a}) = (\varphi+\Delta\varphi)(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}) - \varphi\mathbf{a} = \varphi\,\Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\Delta\varphi + \Delta\varphi\,\Delta\mathbf{a}.$$

Представив приращения функций в виде (1.2.17) и (1.2.18), получим:

$$\Delta\mathbf{b} \approx \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt}\Delta t + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}(\Delta t)^2,$$

откуда

$$\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} \approx \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ это приближенное равенство превращается в точное. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t\right).$$

Первые два слагаемых не зависят от Δt и поэтому при переходе к пределу не изменяются. Предел третьего слагаемого равен нулю. Следовательно, заменив $\boldsymbol{b}$ на $\varphi\boldsymbol{a}$ получим:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} = \varphi\dot{\mathbf{a}} + \dot{\varphi}\mathbf{a}.$$

Теперь рассмотрим скалярное произведение двух векторных функций ***a****(t)* и ***b****(t).* Приращение этого произведения равно:

$$\Delta(\mathbf{ab}) = (\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) - \mathbf{ab} = \mathbf{a}\,\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}\,\Delta\mathbf{b} \approx$$
$$\approx \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}\,\Delta t + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}\,\Delta t + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}\,(\Delta t)^2.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{ab})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}\,\Delta t),$$

или окончательно

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \qquad (1.2.19)$$

Умножив (1.2.19) на *dt* получим дифференциал:

$$d(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\,d\mathbf{b} + \mathbf{b}\,d\mathbf{a}. \qquad (1.2.20)$$

Вычислим производную и дифференциал квадрата векторной функции. Согласно (1.2.19) и (1.2.20)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{a}\dot{\mathbf{a}},$$
$$d(\mathbf{a}^2) = 2\mathbf{a}\,d\mathbf{a}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{a}^2$=а^2, можно написать:

$$2\mathbf{a}\,d\mathbf{a} = d(a^2) \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\,d\mathbf{a} = d(a^2/2).$$

Наконец, рассмотрим производную векторного произведения функций ***a****(t)* и ***b****(t).* Приращение рассматриваемой функции равно

$$\Delta[\mathbf{ab}] = [(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}),\ (\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})] - [\mathbf{ab}] =$$
$$= [\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a},\ \mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{b}] \approx [\mathbf{a},\ \dot{\mathbf{b}}\,\Delta t] + [\dot{\mathbf{a}}\,\Delta t,\ \mathbf{b}] + [\dot{\mathbf{a}}\,\Delta t,\ \dot{\mathbf{b}}\,\Delta t].$$

Соответственно

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = \lim_{\Delta t\to 0}\{[\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}] + [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}] + [\dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}]\,\Delta t\}.$$

Осуществив предельный переход, придем к формуле

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}] + [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}].$$

Производная единичного вектора. Рассмотрим орт $\boldsymbol{e}_a$ вектора ***a***. Очевидно, что вектор $\boldsymbol{e}_a$ может изменяться только по направлению. Пусть за очень малый промежуток времени Δ*t* вектор ***a*** и вместе с ним орт $\boldsymbol{e}_a$ поворачивается на угол Δφ (рис. 2.16). При малом $\Delta\varphi$ модуль вектора $\Delta\boldsymbol{e}_a$ приближенно равен углу $\Delta\varphi$: $|\Delta\boldsymbol{e}_a| \approx \Delta\varphi$ (отрезок, изображающий $\Delta\boldsymbol{e}_a$ является основанием равнобедренного треугольника со сторонами, равными единице). Заметим, что чем меньше $\Delta\varphi$, тем точнее соблюдается написанное нами приближенное равенство.

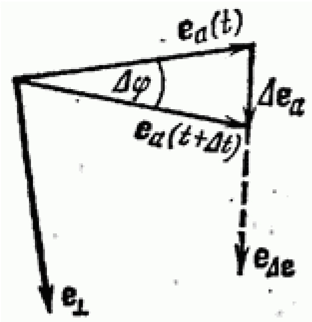


Рис. 1.19.

Сам вектор $\Delta\boldsymbol{e}_a$ можно представить в виде

$$\Delta\mathbf{e}_a = |\Delta\mathbf{e}_a| \cdot \mathbf{e}_{\Delta e} \approx \Delta\varphi \cdot \mathbf{e}_{\Delta e},$$

где $\mathbf{e}_{\Delta e}$ – орт вектора $\Delta\boldsymbol{e}_a$. При стремлении $\Delta\varphi$ к нулю орт $\mathbf{e}_{\Delta e}$ будет поворачиваться и в пределе совпадет с перпендикулярным к $\boldsymbol{e}_a$ единичным вектором $\boldsymbol{e}_\perp$ (см. рис. 1.19). Производная $\boldsymbol{e}_a$ по t по определению равна

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\, \mathbf{e}_{\Delta e} = \frac{d\varphi}{dt}\, \mathbf{e}_\perp.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\perp.$$

Величина $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ есть угловая скорость вращения вектора $\boldsymbol{a}$. Орт $\boldsymbol{e}_\perp$ лежит в той плоскости, в которой поворачивается в данный момент вектор $\boldsymbol{a}$, причем направлен в ту сторону, в которую происходит вращение.

1.3. Компланарные векторы, исследование системы векторов на компланарность

Векторы называются ***компланарными***, если они принадлежат одной или параллельным плоскостям. Два вектора $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b}$ трехмерного пространства всегда компланарны. Это утверждение легко доказать. Пусть a и b – прямые, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Проведем через начало вектора $\vec{a}$ прямую b_1, параллельную прямой b, а через начало вектора $\vec{b}$ прямую a_1, параллельную прямой a. Плоскости, образуемые прямыми a и b_1, а также прямыми b и a_1, параллельны по построению, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат им. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны.

1.3.1. *Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов в пространстве*

Оно основано на понятии смешанного произведения векторов. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема

Для компланарности трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ трехмерного пространства необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство

Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$, докажем что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ компланарны. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = \left(\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{d}\right) = 0$, то векторы $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ и $\vec{d}$ перпендикулярны в силу необходимого и достаточного условия перпендикулярности двух векторов. С другой стороны, по определению векторного произведения вектор $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$. Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ компланарны, так как перпендикулярны одному вектору $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$. Пусть теперь векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ компланарны, докажем равенство нулю смешанного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ компланарны, то вектор $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ перпендикулярен каждому из них, следовательно, скалярное произведение вектора $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ на $\overrightarrow{d}$ равно нулю, что означает равенство нулю смешанного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$. Итак, теорема полностью доказана. Покажем применение доказанного условия компланарности трех векторов к решению задач.

Пример. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, -1,2)$, $\vec{b} = (1,2, -3)$, $\vec{d} = (3, -4,7)$,, заданные в прямоугольной системе координат.

Решение. Вычислим их смешанное произведение по координатам:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-4) -$$

$$-2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) \cdot (-4) = 0$$

Так как мы получили ноль, то условие компланарности выполнено, следовательно, заданные векторы компланарны.

***Ответ*:*векторы компланарны*.**

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов можно использовать для проверки принадлежности четырех точек пространства A, B, C и D одной плоскости. Для этого находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ и вычисляем их смешанное произведение. Если оно равно нулю, то точки лежат в одной плоскости, в противном случае – не лежат в одной плоскости.

Пример. Принадлежат ли точки *A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8)* одной плоскости?

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (при необходимости смотрите раздел нахождение координат вектора по координатам точек его начала и конца):

$$\overrightarrow{AB} = (4-2, 1-3, -2-1) = (2, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (6-2, 3-3, 7-1) = (4, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-5-2, -4-3, 8-1) = (-7, -7, 7)$$

Теперь вычисляем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=2\cdot 0\cdot 7+(-2)\cdot 6\cdot(-7)+(-3)\cdot 4\cdot(-7)-$$

$$-(-3)\cdot 0\cdot(-7)-(-2)\cdot 4\cdot 7-2\cdot 6\cdot(-7)=308$$

Так как смешанное произведение векторов отлично от нуля, то векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ не компланарны, следовательно, точки $A,\ B,\ C$ и D не лежат в одной плоскости.

***Ответ*:*не принадлежат*.**

1.3.2. Исследование системы векторов на компланарность. Примеры и решения

А как же быть, если требуется установить компланарность системы векторов, число векторов которой больше трех? Давайте ответим на этот вопрос и получим условие компланарности системы из n векторов трехмерного пространства. В предыдущем пункте мы показали, что для компланарности трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ необходимо и достаточно равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}=0$. Так как смешанное произведение трех векторов в координатной форме представляет собой определитель матрицы, строками которой являются координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$, то условие компланарности можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ d_x & d_y & d_z\end{vmatrix}=0.$$

Вспомнив понятие ранга матрицы, последнее равенство можно интерпретировать следующим образом: ранг матрицы, строками которой являются координаты компланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$, меньше трех. Обобщив последнее утверждение, мы получим ***необходимое и достаточное условие компланарности системы***

***из n векторов трехмерного пространства*:** для компланарности системы из n векторов трехмерного пространства необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, строками которой являются координаты векторов системы, был меньше трех.

Пример. Компланарны ли векторы

$$\vec{a} = (1, 3, -2), \quad \vec{b} = (2, 1, 4), \quad \vec{c} = (1, -2, 6),$$

$$\vec{d} = (2, 6, -4), \quad \vec{e} = (4, 7, 0)$$

Решение. Составим матрицу, строками которой примем координаты данных векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ранг этой матрицы методом окаймляющих миноров. Сразу легко отыскать минор второго порядка, отличный от нуля,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Переберем окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot (-2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot 6 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 4 \cdot 6 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \cdot 7 - (-2) \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 7 = 0$$

Все они равны нулю, следовательно, ранг матрицы равен двум, поэтому, векторы заданной системы векторов компланарны в силу выполнения необходимого и достаточного условия компланарности.

Ответ*:*компланарны.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1.1 Векторный способ задания движения

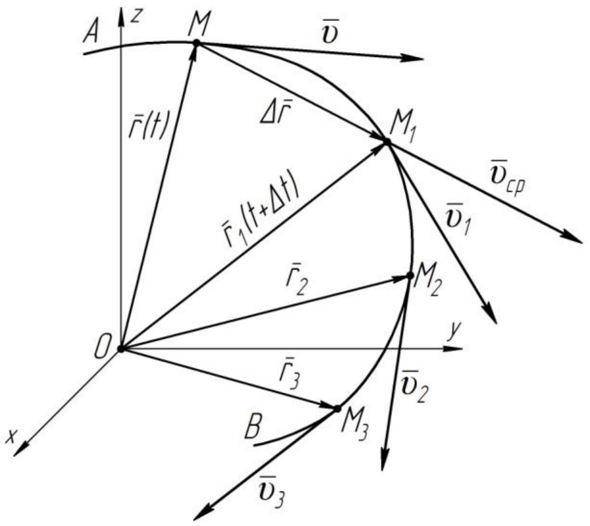


Рисунок 1.1

Положение точки M в пространстве определяется радиус-вектором $\bar{r}$, проведенным из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рисунок 1.1).

Для определения движения точки задается вектор-функция $\bar{r}$ аргумента t, которая должна быть однозначной, непрерывной и дважды дифференцируемой:

$$\bar{r} = f\left(t\right). \tag{1.1}$$

Кривая AB – траектория точки.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется ***годографом*** этого вектора.

Следовательно, траектория точки M является годографом ее радиус-вектора $\bar{r}$.

Скорость – векторная величина, характеризующая изменение положения точки в единицу времени.

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения M в положение M_1 (рисунок 1.1). Отношение вектора перемещения $\Delta\bar{r}$ к промежутку времени Δt представляет собой вектор средней скорости $\bar{\upsilon}_{cp}$ воображаемого движения точки по хорде MM_1:

$$\bar{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Вектор средней скорости $\bar{\upsilon}_{cp}$ направлен так же, как вектор $\Delta\bar{r}$. При $\Delta t \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону движения точки.

Для определения вектора скорости точки в момент времени t переходим к пределу:

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'. \qquad (1.2)$$

Таки образом, вектор скорости $\bar{\upsilon}$ определяется как первая производная от радиус-вектора $\bar{r}$ по времени t.

Вектор скорости $\bar{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

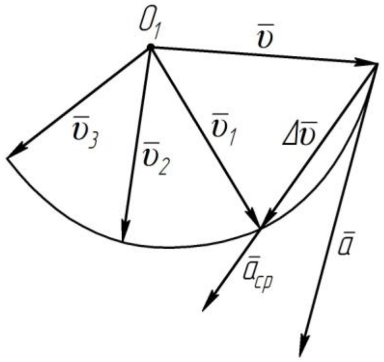


Рисунок 1.2

Годограф скорости. Ускорение

Годограф скорости – линия, которую описывают точки концов векторов скорости, отложенных из одного центра O_1 (рисунок 1.2).

Уравнения годографа скорости показаны в пункте 1.2.

Ускорение – векторная величина, характеризующая изменение скорости по величине и направлению в единицу времени.

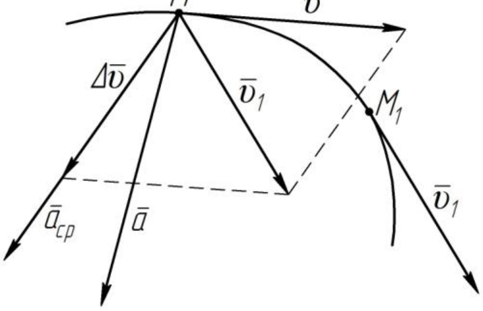


Рисунок 1.3

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения M в положение M_1, и вектор скорости изменился на величину $\Delta\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 - \bar{\upsilon}$ (рисунок 1.3).

Разделив приращение вектора скорости $\Delta\bar{\upsilon}$ на промежуток времени Δt, получим вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Вектор среднего ускорения будет сонаправлен с направлением приращения вектора скорости $\Delta\bar{\upsilon}$. Покажем это на годографе скорости.

Предел, к которому стремится вектор среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$, когда $\Delta t \to 0$, является вектором ускорения точки в данный момент времени t:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt};$$

Учитывая, что скорость является вектор-функцией от времени $\bar{\upsilon} = f\left(t\right)$ и что $\bar{\upsilon} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{r}''. \qquad (1.3)$$

Вектор ускорения в данный момент равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора по времени.

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен по касательной к годографу скорости в сторону вогнутости траектории.

1.2 Координатный способ задания движения

Положение точки в пространстве определяется координатами x, y, z, являющиеся функциями времени (рисунок 1.4):

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\left(t\right) \\ y &= f_2\left(t\right) \\ z &= f_3\left(t\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (1.4)$$

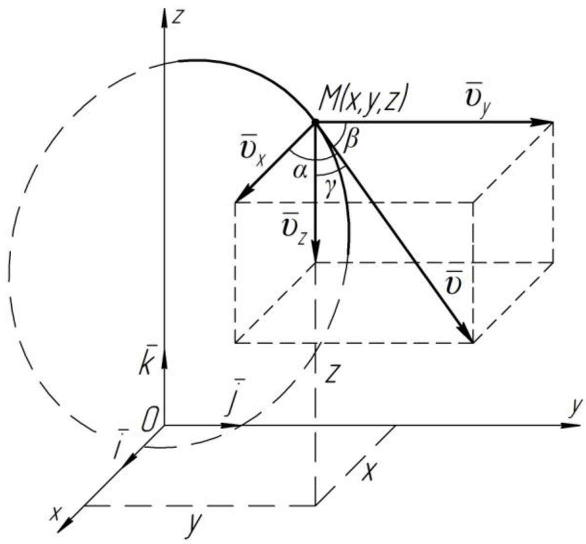


Рисунок 1.4

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ должны быть однозначными, непрерывными и дважды дифференцируемыми.

Уравнения (1.4) являются уравнениями движения точки, а так же уравнениями траектории точки в параметрической форме, так как зависят от параметра t. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, необходимо из уравнений (1.4) исключить параметр t:

$$t = f(x) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} y &= f_2\left[f(x) \right] \\ z &= f_3\left[f(x) \right] \end{aligned}\right\}.$$

Пример. Определить уравнение траектории точки, если она движется в плоскости xy по закону: $x = 4t^2$; $y = 10t^2$.

Тогда уравнение траектории определим разделив уравнения друг на друга:

$$\frac{y}{x} = \frac{10t^2}{4t^2} \quad \Rightarrow \quad y = 2{,}5x,$$

или подстановкой, выраженного из уравнения $x = 4t^2$ значения t^2, в уравнение $y = 10t^2$:

$$x = 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{x}{4};$$

$$y = 10\left(\frac{x}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2{,}5x.$$

Координатный и векторный способы взаимосвязаны: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$,

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль соответствующих осей x, y, z;

x, y, z – проекции радиус-вектора $\bar{r}$ на неподвижные координатные оси.

Скорость точки

Согласно теореме: *проекция производной от вектора на ось, неподвижную в данной системе отсчета, равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось,* – запишем:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \upsilon_x\bar{i} + \upsilon_y\bar{j} + \upsilon_z\bar{k};$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{1.5}$$

Проекции скорости точки на неподвижные декартовые оси координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

По модулю скорость будет равна:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{1.6}$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами (рисунок 1.4):

$$\cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{\upsilon}_x\right) = \cos\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon};$$

$$\cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{\upsilon}_y\right) = \cos\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon};$$

$$\cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{\upsilon}_z\right) = \cos\gamma = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}.$$

Уравнения годографа скорости (рисунок 1.2) в параметрической форме можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_Г = \upsilon_x(t) = \dot{x}(t); \\ y_Г = \upsilon_y(t) = \dot{y}(t); \\ z_Г = \upsilon_z(t) = \dot{z}(t). \end{cases}$$

Исключив параметр t, получим уравнения годографа скорости:

$$\left.\begin{matrix} \upsilon_x = f_1(t) \\ \upsilon_y = f_2(t) \\ \upsilon_z = f_3(t) \end{matrix}\right\}; \quad t = f(\upsilon_x) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \upsilon_y = f_2\left[f(\upsilon_x)\right] \\ \upsilon_z = f_3\left[f(\upsilon_x)\right] \end{matrix}\right\}.$$

Пример. Определить уравнение годографа скорости, если точка движется в плоскости xy по закону: $x = 5t^2 + 2t$; $y = 2t^3 - 1$.

Определим проекции скорости на координатные оси:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \left(5t^2 + 2t\right)' = 10t + 2;$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \left(2t^3 - 1\right)' = 6t^2.$$

Таким образом, получили уравнения годографа скорости в параметрической форме:

$$\begin{cases} \upsilon_x = 10t + 2; \\ \upsilon_y = 6t^2. \end{cases}$$

Исключив параметр t, получим уравнение годографа скорости, т.е. уравнение вида $\upsilon_y = f(\upsilon_x)$:

$$t = \frac{\upsilon_x - 2}{10} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_y = 6\left(\frac{\upsilon_x - 2}{10}\right)^2;$$

$$\upsilon_y = \frac{3(\upsilon_x - 2)^2}{50}.$$

Ускорение точки

Так как $\bar{a}=\dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt}$, а $\bar{\upsilon}=\upsilon_x\bar{i}+\upsilon_y\bar{j}+\upsilon_z\bar{k}$, тогда

$$\bar{a}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\bar{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\bar{j}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\bar{k}.$$

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\ddot{x};\quad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=\ddot{y};\quad a_z=\frac{d\upsilon_z}{dt}=\ddot{z}. \tag{1.7}$$

Проекции ускорения точки на неподвижные декартовые оси координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

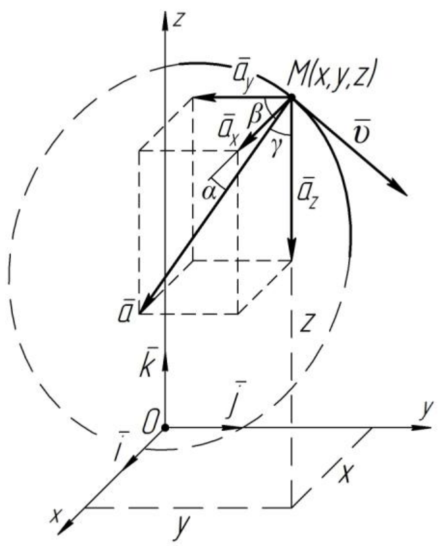


Рисунок 1.5

По модулю ускорение будет равно:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}. \tag{1.8}$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами (рисунок 1.5):

$$\cos\left(\bar{a},\bar{a}_x\right)=\cos\alpha=\frac{a_x}{a};$$

$$\cos\left(\bar{a},\bar{a}_y\right)=\cos\beta=\frac{a_y}{a};$$

$$\cos\left(\bar{a},\bar{a}_z\right)=\cos\gamma=\frac{a_z}{a}.$$

1.3 Естественный способ задания движения

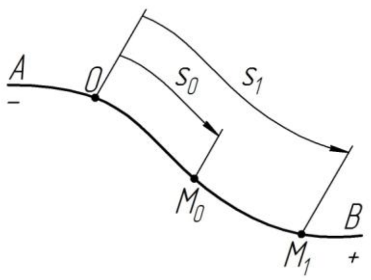


Рисунок 1.6

Для задания движения естественным способом необходимо знать (рисунок 1.6):

1) траекторию точки (AB), т.е. уравнение траектории $x=f\left(y,z\right)$;

2) начало отсчета (точка O) с указанием направления движения («+» и «$-$»);

3) закон движения $s = f(t)$ – дуговая координата в функции времени, которая должна быть однозначна, непрерывна и дважды дифференцируема.

Следует различать путь и дуговую координату.

Дуговая координата определяет положение точки на траектории относительно начала отсчета (точки O, см. рисунок 1.6).

Путь – расстояние пройденное точкой за некоторый промежуток времени вдоль траектории.

Допустим, за время t_1 точка переместилась из начального положения M_0 в положение M_1 (рисунок 1.5), а за время t_2 из M_1 в точку O (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Отличие дуговой координаты от пути

Время	Перемещение	Путь	Дуговая координата
t_0	0	0	$s = s_0 = OM_0$
t_1	$M_0 \to M_1$	M_0M_1	$s = s_1 = OM_1$
t_2	$M_1 \to O$	M_1O	$s = 0$
$t_1 + t_2$	$M_0 \to M_1 \to O$	$M_0M_1 + M_1O$	$s = 0$

При естественном способе задания движения вводится система взаимно перпендикулярных осей (τ, n, b), движущихся вместе с точкой и меняющих свое положение в пространстве – *естественная система координат* (рисунок 1.7).

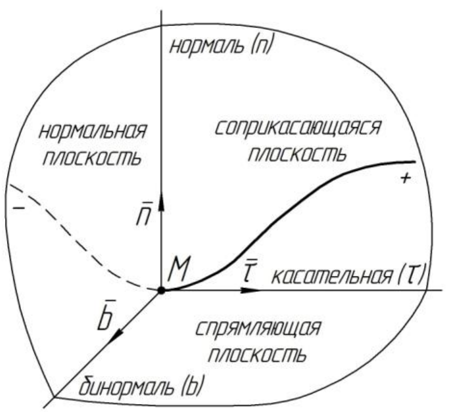


Рисунок 1.7

Совокупность взаимно перпендикулярных плоскостей, определяемых осями этой системы, называют *подвижным трехгранником*.

$\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ – единичные векторы (орты) соответствующих осей:

$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}.$$

Орт $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты.

Орт $\bar{n}$ направлен перпендикулярно касательной оси τ во внутрь вогнутой части траектории.

Орт $\bar{b}$ перпендикулярен $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$, и направлен в ту сторону, откуда виден кратчайший переход от $\bar{\tau}$ к $\bar{n}$ против хода часовой стрелки.

При движении точки, траектория всегда находится в соприкасающейся плоскости, образованной осями τ и n.

Скорость точки

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}. \tag{1.9}$$

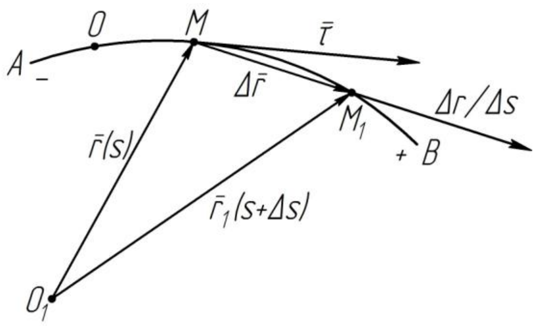


Рисунок 1.8

Вектор $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$ направлен также, как вектор $\Delta\bar{r}$ (рисунок 1.8). При $\Delta s \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону увеличения дуговой координаты s. Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\overline{MM_1}}{MM_1} = 1.$$

Таким образом, вектор $\dfrac{d\bar{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты. Вектор $\dfrac{d\bar{r}}{ds}$ является ортом $\bar{\tau}$ этого направления:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}.$$

Тогда уравнение (1.9) примет вид:

$$\bar{\upsilon} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau} .$$

Производная $\frac{ds}{dt}$ есть проекция вектора скорости на касательную ось τ, т.е. определяет алгебраическую величину скорости:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} . \qquad (1.10)$$

Ускорение точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\bar{\tau}\right) = \frac{d}{dt}\left(\upsilon\bar{\tau}\right) = \frac{d\upsilon}{dt}\bar{\tau} + \upsilon\frac{d\bar{\tau}}{dt} .$$

Производная $\frac{d\upsilon}{dt}$ есть проекция вектора ускорения на касательную ось τ:

$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}}$ – касательное (тангенциальное) ускорение, м/с^2.

$$\upsilon\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \upsilon\frac{d\bar{\tau}}{dt}\frac{ds}{ds} = \upsilon\frac{ds}{dt}\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \upsilon^2\frac{d\bar{\tau}}{ds}; \qquad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{K} = \frac{1}{\rho}\bar{n} ,$$

где $\bar{K}$ – вектор кривизны траектории;

ρ – мгновенный радиус кривизны траектории, м.

$$\upsilon\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\bar{n} .$$

Отношение $\frac{\upsilon^2}{\rho}$ есть проекция вектора ускорения на нормальную ось n:

$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}}$ – нормальное (центростремительное) ускорение, м/с^2.

Проекция вектора ускорения $\bar{a}$ на бинормальную ось b равна нулю, так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости.

Тогда вектор полного ускорения будет равен:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n}.$$

По модулю ускорение равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (1.11)$$

На рисунке 1.9 показаны векторы касательного $\overline{a}_\tau$, нормального $\overline{a}_n$ и полного $\overline{a}$ ускорений движущейся точки M.

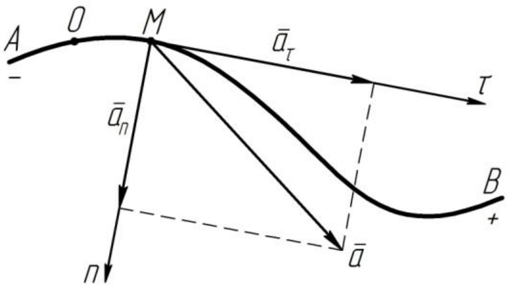


Рисунок 1.9

Касательное ускорение существует только при неравномерном движении точки и характеризует изменение скорости по величине.

Нормальное ускорение существует только при криволинейном движении точки и характеризует изменение скорости по направлению.

<u>Касательное ускорение равно нулю, когда:</u>

1) скорость постоянна по модулю;

2) скорость достигает экстремальных значений.

<u>Нормальное ускорение равно нулю, когда:</u>

1) скорость равна нулю;

2) траектория движения точки – прямая;

3) движущаяся точка совпадает с точкой перегиба траектории.

1.4 Взаимосвязь естественного и координатного способов

Скорость при естественном способе задания движения определяется уравнением:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt},$$

из которого, выразив дуговую координату s (при $s_0 = 0$), получим:

$$\int ds = \int \upsilon dt;$$

$$s = \int \upsilon dt.$$

Так как скорость в координатном способе задания движения равна:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Тогда дуговая координата определится выражением:

$$s = \int \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} dt. \quad (1.12)$$

Пример. Точка движется в плоскости xy по закону: $x = 2t^2$; $y = 1{,}5t^2$. Определить уравнение дуговой координаты $s = f(t)$.

$$\upsilon_x = \left(2t^2\right)' = 4t;$$

$$\upsilon_y = \left(1{,}5t^2\right)' = 3t.$$

$$s = \int \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} dt;$$

$$s = \int \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} dt;$$

$$s = 5\int t dt.$$

После интегрирования получим уравнение дуговой координаты в функции времени:

$$s = 2{,}5t^2 + C.$$

Вычисление a_τ в заданный момент времени t

Так как касательное ускорение есть производная от скорости по времени, то подставив выражение для определения скорости в координатном способе задания движения, получим:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\right);$$

$$a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}}\frac{d}{dt}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right);$$

$$a_\tau = \frac{1}{2\upsilon}\frac{d}{dt}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right);$$

$$a_\tau = \frac{1}{2\upsilon}\left(2\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt} + 2\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt} + 2\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dt}\right);$$

$$a_\tau = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{\upsilon}. \qquad (1.13)$$

Вычисление a_n в заданный момент времени t

Ускорение материальной точки $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, откуда $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

С учетом того, что $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $a_\tau = \dfrac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{\upsilon}$, получим:

$$a_n = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - \frac{\left(\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z\right)^2}{\upsilon^2}}.$$

Приведя к общему знаменателю подкоренное выражение, расписав квадрат суммы $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ и заменив в числителе υ^2 на $\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$, получим девять слагаемых, которые можно представить в виде трех выражений вида $a^2 - 2ab + b^2$ и заменить на $(a-b)^2$:

$$a_n = \frac{\sqrt{(v_x a_y - v_y a_x)^2 + (v_x a_z - v_z a_x)^2 + (v_y a_z - v_z a_y)^2}}{v}.$$

Если материальная точка движется, например, в плоскости *xy*, то нормальное ускорение будет равно:

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}.$$

ГЛАВА II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Первый закон Ньютона формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Оба названных состояния отличаются тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: скорость любого тела остается постоянной (в частности, равной нулю) пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Мы уже отмечали, что характер движения зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно, очевидно, будет двигаться с ускорением. Следовательно, первый закон Ньютона не может выполняться одновременно в обеих системах. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется ***инерциальной***. Сам закон называют иногда ***законом инерции***. Система отсчета, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется ***неинерциальной системой отсчета***. Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т.е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной. Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является инерциальной. Эта система называется ***гелиоцентрической системой отсчета*** (***гелиос*** – по гречески ***солнце***). Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной. Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной. Но иногда неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно нее механических явлений.

2.2. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т.е. сообщает данному телу ускорение. Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения. Это свойство тел называется ***инертностью***. В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая ***массой тела***. Чтобы определить массу некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за эталон массы. Можно также сравнить массу данного тела с массой некоторого тела с уже известной массой (определенной путем сравнения с эталоном). Операцию сравнения масс m_1 и m_2 двух материальных точек (частиц) можно осуществить следующим образом. Поставим эти частицы в такие условия, чтобы их взаимодействием с другими телами можно было пренебречь. Система тел, взаимодействующих только между собой и не взаимодействующих с другими телами, называется ***замкнутой***. Следовательно, мы рассматриваем замкнутую систему двух частиц. Если заставить эти частицы взаимодействовать (например, посредством столкновения друг, с другом), их скорости получат приращения $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$. Опыт дает, что эти приращения всегда имеют противоположные направления, т.е. отличаются знаком. Отношение же модулей приращений скоростей не зависит от способа и интенсивности взаимодействия данных двух тел. Это отношение принимается равным обратному отношению масс, рассматриваемых тел:

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_1|}{|\Delta\mathbf{v}_2|}=\frac{m_2}{m_1} \qquad (2.2.1)$$

(более инертное тело, т.е. тело с большей массой, претерпевает меньшее изменение скорости). Приняв во внимание относительное направление векторов $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$, соотношение (2.2.1) можно написать в виде

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1=-m_2\Delta\mathbf{v}_2. \qquad (2.2.2)$$

В ньютоновской механике (т.е. механике, в основу которой положены законы Ньютона) масса тела предполагается постоянной величиной, не зависящей от скорости тела. При скоростях, малых по сравнению со скоростью света c (при $v<<c$), это предположение практически выполняется. Воспользовавшись постоянством массы, представим равенство (2.2.2) следующим образом:

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1)=-\Delta(m_2\mathbf{v}_2). \qquad (2.2.3)$$

Произведение массы тела на его скорость называется ***импульсом*** тела. Обозначив импульс буквой p, получим:

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}. \qquad (2.2.4)$$

Определение (2.2.4) справедливо для материальных точек (частиц) и протяженных тел, движущихся поступательно. В случае протяженного тела, движущегося непоступательно, нужно представить тело как совокупность материальных точек с массами Δm_i определить импульсы $\Delta m_i\boldsymbol{v}_i$ этих точек и затем сложить эти импульсы векторно. В результате получится полный импульс тела:

$$\mathbf{p}=\sum_i \Delta m_i\mathbf{v}_i. \qquad (2.2.5)$$

При поступательном движении тела все $\mathbf{v}_i$ одинаковы и формула (2.2.5) переходит в (2.2.4). Заменив в (2.2.3) произведения $m\mathbf{v}$ импульсами $\mathbf{p}$, придем к соотношению $\Delta\mathbf{p}_1=-\Delta\mathbf{p}_2$, откуда $\Delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)=0$. Равенство нулю приращения величины означает, что сама величина остается неизменной. Таким образом, мы пришли к выводу, что ***полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих частиц остается постоянным***.

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathrm{const}. \qquad (2.2.6)$$

Приведенное выше утверждение составляет содержание ***закона сохранения импульса***. Отметим, что в релятивистской механике выражение для импульса имеет по сравнению с (2.2.4) более сложный вид:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (2.2.7)$$

Здесь m – так называемая ***масса покоя*** тела (масса тела при v=0), c – скорость света в вакууме. Выражение (2.2.7) можно истолковать так, что масса тела не остается постоянной (как предполагается в ньютоновской механике), а изменяется со скоростью по закону

$$m(v)=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (2.2.8)$$

Тогда выражение (2.2.7) можно представить в виде

$$\mathbf{p}=m(v)\,\mathbf{v}, \qquad (2.2.9)$$

аналогичном выражению (2.2.4). Определяемая формулой (2.2.8) масса $m(v)$ называется ***релятивистской массой*** или ***массой движения***.

2.3. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона гласит, что скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе **F**:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}. \qquad (2.3.1)$$

Уравнение (2.3.1) называется ***уравнением движения*** тела. Заменив согласно (2.2.4) $\mathbf{p}$ произведением $m\mathbf{v}$ и учитывая, что в ньютоновской механике масса предполагается постоянной, можно представить соотношение (2.3.1) в виде

$$m\mathbf{w}=\mathbf{F}, \tag{2.3.2}$$

где $\mathbf{w}=\dot{\boldsymbol{v}}$. Таким образом, мы пришли к другой формулировке второго закона Ньютона: произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе. Соотношение (2.3.2) вызывало и продолжает вызывать среди физиков много споров. До сих пор нет общепринятого истолкования этого соотношения. Сложность состоит в том, что не существует независимых способов определения величинmи F, входящих в уравнение (2.3.2). Для определения одной из них (m или F) приходится использовать соотношение (2.3.2), связывающее эту величину с другой и с ускорением w. Подчеркнем, что второй закон Ньютона (так же, как и два других закона) является экспериментальным законом. Он возник в результате обобщения данных опытов и наблюдений. В частном случае, когда $F=0$ (т.е. при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел), ускорение, как следует из (2.3.2), также равно нулю. Этот вывод совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Поэтому первый закон входит во второй как его частный случай. Несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как в нем, по сути, заключен постулат (утверждение) о существовании инерциальных систем отсчета. В заключение отметим, что при независимом выборе единиц массы, силы и ускорения выражение второго закона нужно писать в виде

$$m\mathbf{w}=k\mathbf{F}, \tag{2.3.3}$$

где k – коэффициент пропорциональности.

2.4. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер, взаимодействия: если тело *1* действует на тело *2* с силой F_{21}, то и тело *2* в свою очередь действует на тело *1* с силой F_{12}. Третий закон

Ньютона утверждает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.*** Используя приведенные выше обозначения сил, содержание третьего закона можно представить в виде равенства:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \qquad (2.4.1)$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным. Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Он выполняется вполне строго в случае контактных взаимодействий (т.е. взаимодействий, наблюдающихся при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга ***покоящихся тел.*** Ньютоновская механика вообще справедлива лишь для скоростей движения, много меньших скорости света(при $v \ll c$). Поэтому в рамках этой механики скорость распространения возмущений поля считается бесконечной, а третий закон Ньютона выполняющимся всегда.

2.5. Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью v_0. Одну из этих систем, обозначенную на рис. 2.1 буквой K, будем условно считать неподвижной. Тогда вторая система K' будет двигаться прямолинейно и равномерно. Выберем координатные оси x, y, z системы K и оси x', y', z' системы K' так, чтобы, оси x и x' совпадали, а оси y и y', а также z и z' были параллельны друг другу. Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки P в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K'. Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то, как следует из рис. 2.1 $x=x'+v_0t$. Кроме того, очевидно, что $y=y'$ и $z=z'$. Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, т.е. что получим совокупность четырех уравнений:

$$x=x'+v_0t', \quad y=y', \quad z=z', \quad t=t', \qquad (2.5.1)$$

называемых преобразованиями Галилея. Первое и последнее из соотношений (2.5.1) оказываются справедливыми лишь при значениях v_0 малых по сравнению со скоростью света в пустоте, которую мы будем обозначать буквой c ($v_0<<c$). При v_0 сравнимых с c, преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца. В рамках ньютоновской механики формулы (2.5.1) предполагаются точными.

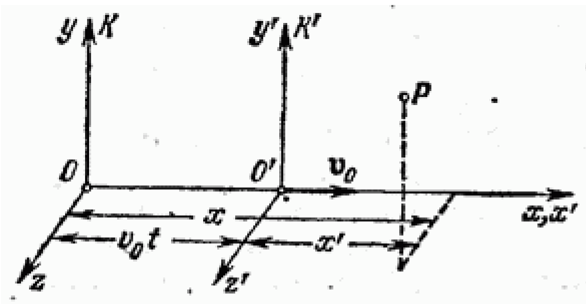


Рис. 2.1.

Продифференцировав соотношения (2.5.1) по времени, найдем связь между скоростями точки P по отношению к системам отсчета K и K':

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\dot{x}'+v_0 \quad \text{или} \quad v_x=v'_x+v_0, \\ \dot{y}&=\dot{y}' \quad \text{или} \quad v_y=v'_y, \\ \dot{z}&=\dot{z}' \quad \text{или} \quad v_z=v'_z. \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Три скалярных соотношения (2.5.2) эквивалентны следующему соотношению между вектором скорости v по отношению к системе K и вектором скорости v' по отношению к системе K'

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_0. \qquad (2.5.3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно спроектировать векторное равенство (2.5.3) на оси x, y, z. В результате получатся формулы (2.5.2). Формулы (2.5.2) и (2.5.3) дают правило сложения скоростей в классической механике. Следует иметь в виду, что соотношение (2.5.3), как и любое другое векторное соотношение, остается справедливым при произвольном выборе взаимных, направлений координатных осей систем K и K'. Соотношения же (2.5.2) выполняются только при выборе осей, показанном на рис. 2.1. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможность доказать это утверждение. Для этого продифференцируем по времени соотношение (2.5.3). Учитывая, что v_0 постоянна, получим:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \tag{2.5.4}$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому, если одна из этих систем инерциальна (это значит, что при отсутствии сил $\boldsymbol{w}$=0), то и остальные будут инерциальными ($\boldsymbol{w}'$ также равно нулю). Основное уравнение механики (2.3.2) характерно тем, что из кинематических величин оно содержит только ускорение, скорость же в него не входит. Однако, как мы установили выше, ускорение какого-либо тела в двух произвольно выбранных инерциальных системах отсчета K и K' одинаково. Отсюда согласно второму закону Ньютона вытекает что силы, действующие на тело в системах K и K', также будут одинаковыми. Следовательно, уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е., как говорят, инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Находясь, например, в вагоне поезда, движущегося без толчков прямолинейно и равномерно, мы, не выглянув в окно, не сможем определить, движется вагон или покоится. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы вагон был неподвижен. Указанные обстоятельства были выяснены еще Галилеем. Положение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно, носит название ***принципа относительности Галилея.***

2.6. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним; трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название ***внутреннего трения***. Силу трения, возникающую придвижении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения, поскольку в этом случае слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело, и на движение тела оказывает влияние трение между этими и внешними по отношению к ним слоями среды. Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки между ними, называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется ***вязким*** (или

жидким). Применительно к сухому трению различают ***трение скольжения*** и ***трение качения.*** Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев). Если, например, два слоя жидкости скользят друг по другу, двигаясь с различной скоростью, то сила, приложенная к более быстро движущемуся слою, направлена в сторону, противоположную движению, а сила, действующая на слой, движущийся медленнее, направлена в сторону движения слоя.

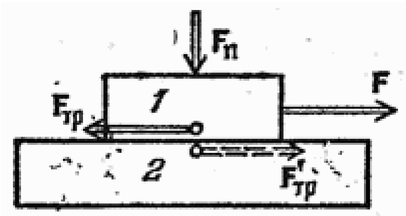


Рис. 2.2.

Сухое трение. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется силой трения покоя. Рассмотрим два соприкасающихся тела *1* и *2*, из которых последнее закреплено неподвижно (рис. 2.2). Тело *1* прижимается к телу *2* с силой $\boldsymbol{F_n}$ направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Она называется силой нормального давления и может быть обусловлена весом тела или другими причинами. Попытаемся переместить тело *1* подействовав на него внешней силой $\boldsymbol{F}$. При этом обнаружится, что для каждой конкретной пары тел и каждого значения силы нормального давления имеется определенное минимальное значение $\boldsymbol{F_0}$ силы $\boldsymbol{F}$, при котором тело *1* удается сдвинуть с места. При значениях внешней силы, заключенных в пределах $0<\boldsymbol{F}<\boldsymbol{F_0}$, тело остается в покое. По второму закону Ньютона это возможно в том случае, если сила $\boldsymbol{F}$ уравновешивается равной ей по величине и противоположно направленной силой, которая и есть сила трения покоя $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 2.2). Она автоматически принимает значение, равное величине внешней силы $\boldsymbol{F}$ (при условии, что последняя не превосходит $\boldsymbol{F}_0$). Величина $\boldsymbol{F}_0$ представляет собой наибольшее значение силы трения покоя. Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона на тело *2* также действует сила трения покоя $\boldsymbol{F}'_{\text{тр}}$ (на рис. 2.2 она показана пунктиром), равная по величине силе $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, но имеющая противоположное ей направление. Если внешняя сила $\boldsymbol{F}$ превзойдет по модулю $\boldsymbol{F}_0$, тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней $\boldsymbol{F}$ и силы трения скольжения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, величина которой в той или иной мере зависит от скорости скольжения. Характер этой зависимости определяется природой и состоянием, трущихся поверхностей. Чаще всего встречающийся вид зависимости силы трения от скорости показан на рис. 2.3. График охватывает как случай покоя, так и случай скольжения. Сила трения покоя, как уже отмечалось, может иметь значения от нуля до $\boldsymbol{F}_0$, что отражено на графике вертикальным отрезком. В соответствии с рис. 2.3 сила трения скольжения с увеличением скорости вначале несколько убывает, а затем начинает возрастать. При специальной обработке соприкасающихся поверхностей сила трения скольжения может оказаться практически не зависящей от скорости. В этом случае криволинейный участок графика на рис. 2.3 превращается в отрезок горизонтальной прямой, начинающейся в точке $\boldsymbol{F}_0$. Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальна сила трения покоя, а так же сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = k\boldsymbol{F}_n. \qquad (2.6.1)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности *k* называется коэффициентом трения (соответственно покоя или скольжения). Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности от их шероховатости. В случае скольжения коэффициент трения являйся функцией скорости.

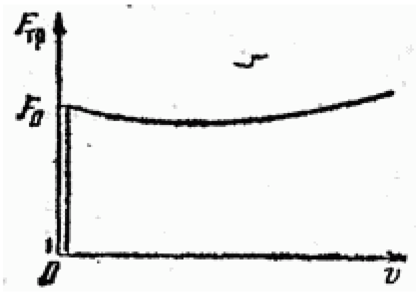


Рис. 2.3.

Силы трения играют очень большую роль в природе. В нашей повседневной жизни трение нередко оказывается полезным. Вспомним огромные затруднения, которые испытывают пешеходы и транспорт во время гололедицы, когда трение между покрытием дороги и подошвами пешеходов или колесами транспорта значительно уменьшается. Не будь сил трения, мебель пришлось бы прикреплять к полу, как на судне во время качки, ибо она при малейшей негоризонтальности пола сползала бы в направлении покатости. Во многих случаях роль трения крайне отрицательна, и приходится принимать меры к тому, чтобы по возможности его ослабить. Так обстоит, например, дело с трением в подшипниках или с трением между втулкой колеса и осью. Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Трение качения подчиняется формально тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим.

Вязкое трение и сопротивление среды. В отличие от сухого вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды.

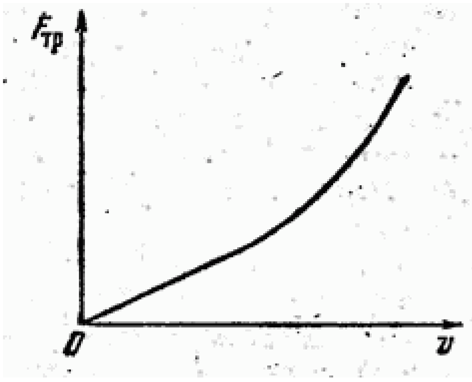


Рис. 2.4.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением сил трения между твердым телом и вязкой (жидкой или газообразной) средой. Следует иметь в виду, что, помимо собственно сил трения, при движении тел в жидкой или газообразной среде возникают так называемые силы сопротивления среды, которые, могут быть горазд, значительнее, чем силы трения. Не имея, возможности рассматривать подробно причины возникновения этих сил, мы ограничимся изложением закономерностей, которым подчиняются силы трения и сопротивления среды совместно, причем условно будем называть суммарную силу силой трения. Зависимость этой силы от скорости показана на рис. 2.4. При небольших скоростях сила растет линейно со скоростью:

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_1\mathbf{v} \tag{2.6.2}$$

(знак минус означает, что эта сила направлена противоположно скорости). Величина коэффициента k_1 зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от свойства среды, называемого вязкостью. Например, для глицерина этот коэффициент оказывается гораздо большим, чем для воды. При больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, т.е. сила начинает расти пропорционально квадрату скорости:

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v \tag{2.6.3}$$

($\boldsymbol{e}_v$ – орт скорости). Величина коэффициента k_2 зависит от размеров и формы тела. Значение скорости, при котором закон (2.6.2) переходит в (2.6.3), зависит от формы и размеров тела, а также от вязких свойств и плотности среды.

2.7. Практическое применение законов Ньютона

Для того чтобы составить уравнение движения, нужно прежде всего установить, какие силы действуют на рассматриваемое тело. При этом необходимо выяснить, действие каких других тел на данное тело следует принять во внимание. Так, например, для тела, сползающего по наклонной плоскости (рис. 2.5), существенно воздействие со стороны Земли (оно характеризуется силой mg) и воздействие со стороны плоскости (оно характеризуется силой реакции $\boldsymbol{F}_{\text{r}}$). Ни в коем случае не следует вводить в рассмотрение «движущие», «скатывающие», «центростремительные», «центробежные» и тому подобные силы. Чтобы не впасть в ошибку, нужно характеризовать силы не по вызываемому ими действию, а по «источнику», вызвавшему появление силы. Это означает, что за каждой силой нужно видеть тело, воздействием которого обусловлена сила. Тогда станет невозможной типичная ошибка, заключающаяся в том, что одна и та же сила учитывается под различными названиями дважды. В рассматриваемом примере (см. рис. 2.5) целесообразно силу реакции $\boldsymbol{F}_{\text{r}}$ разложить на две составляющие – силу нормального давления $\boldsymbol{F}_{\text{n}}$ и силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. Это, в частности, полезно в связи с тем, что сила трения пропорциональна модулю силы $\boldsymbol{F}_{\text{n}}$. Определив силы, действующие на тело, составляют второго закона Ньютона. В нашем примере оно имеет вид:

$$m\mathbf{w} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{\text{тр}}. \qquad (2.7.1)$$

Чтобы осуществить вычисления, нужно перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. При этом пользуются следующими свойствами проекций:

1) равные векторы имеют одинаковые проекции;

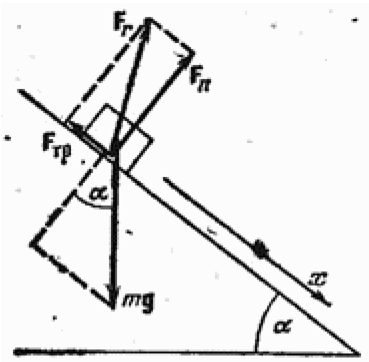


Рис. 2.5.

2) проекция вектора, получающегося умножением какого-то другого вектора на скаляр, равна произведению проекции этого второго вектора на скаляр;

3) проекция суммы векторов равна сумме проекций складываемых векторов.

Спроектируем векторы, входящие в уравнение (2.7.1), на направление x, указанное на рис. 2.5. Проекции векторов равны: $\omega_x=\omega$ (ω – модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$), $g_x=g\cdot sin\alpha$, $F_{nx}=0$, $F_{mpx}=-kF_n=-kmg\cdot cos\alpha$. Следовательно, мы приходим к уравнению

$$m\omega=mg\sin\alpha-kmg\cos\alpha,$$

из которого легко найти ω. В более сложных случаях приходится проектировать векторы на несколько направлений и решать получившуюся систему алгебраических или дифференциальных уравнений.

ГЛАВА III. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Сохраняющиеся величины

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на ***внутренние*** и ***внешние***. ***Внутренними*** мы будем называть силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, ***внешними*** – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется замкнутой. Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей образующих систему частиц, которые сохраняют при движении постоянные значения. Эти функции носят название ***интегралов движения***. Для системы из N частиц, между которыми нет жестких связей, можно образовать $6N—1$ интегралов движения. Однако интерес представляют только те из них, которые обладают свойством ***аддитивности.*** Это свойство заключается в том, что значение интеграла движения для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Аддитивных интегралов движения имеется три. Один из них называется ***энергией***, второй – ***импульсом***, третий – ***моментом импульса***. Итак, для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физические величины: энергия, импульс и момент импульса. В соответствии с этим имеют место три закона сохранения – ***закон сохранения энергии***, ***закон сохранения импульса*** и ***закон сохранения момента импульса***. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени. В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 моментом t_2 без изменения значений координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает, что после указанной замены координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени t_2+t такие же значения, какие они имели бы до замены в момент t_1+t. В основе сохранения импульса лежит однородность пространства, т.е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы (предполагается, что на новом месте замкнутость системы не нарушается). Наконец, в основе сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т.е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах. Законы сохранения представляют собой мощное орудие исследования. Часто бывает, что точное решение уравнений движения оказывается крайне сложным. В этих случаях с помощью законов сохранения можно и без решения уравнений движения получить ряд важных данных о протекании механических явлений. Законы сохранения не зависят от характера действующих сил. Поэтому с их, помощью можно получить ряд важных сведений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы оказываются неизвестными. В последующих параграфах мы получим законы сохранения, исходя из уравнений Ньютона. Однако следует иметь в виду, что законы сохранения обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона. Законы сохранения остаются строго справедливыми даже тогда, когда законы Ньютона (в частности, третий закон) претерпевают нарушения. Подчеркнем, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются точными законами, строго выполняющимися также и в релятивистской области.

3.2. Кинетическая энергия

Приступим к нахождению аддитивных интегралов движения. Для начала рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной частицы (материальной точки). Напишем уравнение движения частицы:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \qquad (3.2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{F}$ – результирующая сил, действующих на частицу. Умножив уравнение (3.2.1) на перемещение частицы $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}dt$ получим:

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\, dt = \mathbf{F}\, d\mathbf{s}. \qquad (3.2.2)$$

Произведение $\dot{\boldsymbol{v}}dt$ представляет собой приращение скорости частицы $d\boldsymbol{v}$ за время dt. Соответственно

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\, dt = m\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad (3.2.3)$$

Произведя такую замену в (3.2.2), придем к соотношению

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\, d\mathbf{s}. \qquad (3.2.4)$$

Если система замкнута, т. е. $\boldsymbol{F}=0$, то $d(mv^2/2)=0$, а сама величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (3.2.5)$$

остается постоянной. Эта величина называется ***кинетической энергией частицы.*** В случае изолированной частицы кинетическая энергия является интегралом движения. Умножив на m числитель и знаменатель выражения (3.2.5) и приняв во внимание, что произведение mv равно импульсу тела p, выражению для кинетической энергии можно придать вид:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \qquad (3.2.6)$$

Если на частицу действует сила $\boldsymbol{F}$, кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно (3.2.4) приращение кинетической энергии частицы за время dt равно скалярному произведению $\mathbf{F}d\mathbf{s}$ ($d\mathbf{s}$ – перемещение частицы за время dt). Величина

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} \qquad (3.2.7)$$

называется ***работой***, совершаемой силой $\mathbf{F}$ на пути $d\mathbf{s}$ (ds есть модуль перемещения $d\mathbf{s}$). Скалярное произведение (3.2.7) можно представить в виде произведения проекции силы на направление перемещения F_s и элементарного пути ds. Следовательно, можно написать, что

$$dA = F_s\,ds. \qquad (3.2.8)$$

Из сказанного ясно, что работа характеризует изменение энергии, обусловленное действием силы на движущуюся частицу. Проинтегрируем соотношение (3.2.4) вдоль некоторой траектории от точки *1* до точки *2*:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}.$$

Левая часть представляет собой разность значений кинетической энергии в точках *2* и *1*, т.е. приращение кинетической энергии на пути *1–2*. Учитывая это, получим:

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \qquad (3.2.9)$$

Величина

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \int_1^2 F_s\,ds \qquad (3.2.10)$$

есть работа силы $\mathbf{F}$ на пути *1–2*. Иногда мы будем обозначать эту работу символом A_{12} вместо A. Итак, ***работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы.***

$$A_{12} = T_2 - T_1. \qquad (3.2.11)$$

Из (3.2.11) следует, что энергия имеет такую же размерность, как и работа.

3.3. Работа

Рассмотрим величину, называемую работой, более подробно. Выражение (3.2.7) можно представить в виде:

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = F\cos\alpha\cdot ds, \qquad (3.3.1)$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения точки приложения силы. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha>0$) работа положительна. Если угол α – тупой ($\cos\alpha<0$) работа отрицательна. При $\alpha=\pi/2$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно, а тем более для того, чтобы перенести этот груз по горизонтальному пути, носильщик затрачивает много усилий, т.е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю. Пусть на тело действуют одновременно несколько сил, результирующая которых равна $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i$. Из дистрибутивности скалярного произведения векторов вытекает, что работа $d\boldsymbol{A}$ совершаемая результирующей силой на пути $d\boldsymbol{s}$ может быть представлена в виде

$$dA = \left(\sum_i \mathbf{F}_i\right) d\mathbf{s} = \sum_i \mathbf{F}_i\,d\mathbf{s} = \sum_i dA_i. \qquad (3.3.2)$$

Это означает, что работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности. Элементарное перемещение $d\boldsymbol{s}$ может быть представлено как $\boldsymbol{v}dt$. Поэтому выражению для элементарной работы можно придать вид

$$dA = \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt. \qquad (3.3.3)$$

Тогда работа, совершаемая за промежуток времени от t_1 до t_2, может быть вычислена по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt. \qquad (3.3.4)$$

$\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = Fds_F$, где ds_F – проекция элементарного перемещения $d\boldsymbol{s}$ на направление силы $\boldsymbol{F}$. Поэтому формулу для работы можно написать следующим образом:

$$dA = F\,ds_F. \qquad (3.3.5)$$

Если сила имеет постоянные величину и направление, вектор $\boldsymbol{F}$ в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула

$$A = \mathbf{F}\int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{s} = Fs_F, \qquad (3.3.6)$$

где $\boldsymbol{s}$ – вектор перемещения из точки *1* в точку *2*, а s_F – его проекция на направление силы. Работа, совершаемая в единицу времени, называется ***мощностью***. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt}. \qquad (3.3.7)$$

Взяв dA в виде (3.3.3), получим для мощности выражение

$$P = \mathbf{F}\mathbf{v}, \qquad (3.3.8)$$

Согласно которому мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

3.4. Введение в динамику

Статика и ее уравнения служат для исследования равновесия твердых тел. Если силы, приложенные к твердому телу, не удовлетворяют условиям равновесия, тело совершает ускоренное движение. Это последнее служит предметом рассмотрения в динамике. Динамикой, таким образом, называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под воздействием приложенных сил. В теоретической (общей) механике материальные тела – это материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело и система абсолютно твердых тел.

Материальной точкой называется тело или частица тела, размерами которых можно пренебречь (в данных конкретных условиях).

Системой материальных точек, или ***механической системой*** называется выделенная некоторым образом совокупность материальных точек.

Абсолютно твердое тело допускает два различных представления. Во-первых, абсолютно твердое тело можно рассматривать как частный случай механической системы, когда взаимное положение ее точек остается неизменным (расстояния между точками не могут изменяться). С другой стороны, его можно рассматривать как некоторый замкнутый объем, сплошь заполненный веществом с сохраняющимися расстояниями между его частицами. Такие модели материальных тел, как газ, жидкость, деформируемое твердое тело, плазма в теоретической механике непосредственно не рассматриваются. Однако методы и модели теоретической механики широко используются и в этих случаях, образуя необходимую базу для изучения механики сплошной среды и ее более специальных направлений – механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, магнитогидродинамики и др. В основе динамики лежат законы Ньютона. Сегодня, благодаря школьному курсу физики, законы Ньютона известны каждому выпускнику средней школы. Поэтому ограничимся кратким напоминанием этих законов (в современных терминах).

Первый закон Ньютона. Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Второй закон Ньютона. Если на материальную точку массы m действует сила, точка совершает ускоренное движение. При этом сила и ускорение связаны равенством (векторным)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Второй закон Ньютона называют основным законом динамики, а его математическое выражение – основным уравнением динамики. Первый и второй законы Ньютона выполняются не во всякой системе отсчета (системе координат). Системы отсчета, в которых выполняются первый и второй законы Ньютона, называются ***инерциальными системами отсчета***.

Третий закон Ньютона. Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и прямо противоположны по направлению.

Кроме трех законов Ньютона в основании динамики лежат еще два принципа – принцип независимости действия сил, также связанный с именем Ньютона, и принцип освобождаемости от связей, установленный уже в посленьютоновское время в связи с изучением несвободного движения.

Принцип независимости действия сил. Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, ей сообщается ускорение, равное геометрической сумме ускорений от действия каждой силы в отдельности. Принцип независимости действия сил эквивалентен правилу, согласно которому силы, приложенные к ускоренно движущейся материальной точке, преобразуются (складываются) точно так же, как преобразуются (складываются) сходящиеся силы в статике. Это дает возможность написать основное уравнение динамики для точки, на которую одновременно действуют несколько сил – $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \quad \vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

Принцип освобождаемости от связей. Несвободную материальную точку и несвободное твердое тело можно рассматривать как свободные, для чего связи следует мысленно отбросить, а их действие заменить реакциями отброшенных связей. Принцип освобождаемости дает правило составления основного уравнения динамики для несвободной материальной точки. Это правило остается таким же, как для свободной точки, только в число действующих сил требуется включить также реакции наложенных связей.

О задании сил в динамике. В динамике, в отличие от статики, действующие силы, как правило, переменны. Сила $\vec{F}$, приложенная к материальной точке, может зависеть от положения точки (радиуса-вектора точки $\vec{r}$), ее скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, а также от времени t. Поэтому задать силу в динамике означает указать закон, выражающий зависимость силы от своих аргументов

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

В проекциях на координатные оси эта функциональная зависимость выражается тремя скалярными функциями (по числу проекций силы), зависящими в общем случае от семи скалярных аргументов трех проекций радиуса-вектора $\vec{\boldsymbol{r}}$ на выбранные координатные оси, трех проекций скорости на эти же оси и времени t.

$$F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t);$$
$$F_y = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t);$$
$$F_z = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

В частных случаях сила может зависеть только от части указанных переменных. Например, сила может зависеть только от положения точки, т.е. иметь вид $F_x=F_x(x,y,z)$, $F_y=F_y(x,y,z)$, $F_z=F_z(x,y,z)$; только от скорости: $F_x=F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $F_y=F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $F_z=F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и т.д.

3.5. Динамика точки

3.5.1. Задачи и уравнения динамики материальной точки

В динамике точки решаются две основные задачи.

Первая (***прямая***) задача динамики. По заданному движению, совершаемому точкой данной массы, требуется найти неизвестную действующую силу.

Вторая (***обратная***) задача динамики. По заданным силам, действующим на точку данной массы, и заданным начальным условиям движения требуется найти закон движения точки.

Это основные (классические) задачи динамики точки, сформулированные самим основоположником динамики И. Ньютоном. С последующим развитием динамики появились новые задачи, сочетающие в себе черты обеих названных задач. Например, при несвободном движении точки реакции связей заранее неизвестны, и вторая задача приобретает смешанный характер – требуется найти как закон движения точки, так и реакции связей. Появились задачи об оптимальном движении, о движении точки с переменной массой и много других задач, тесно связанных с потребностями развивающейся техники. Основным математическим инструментом для решения задач динамики точки служат основное уравнение динамики и вытекающие из него дифференциальные уравнения движения.

3.5.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть $Oxyz$ – инерциальная система координат, M – движущая точка массы m, $\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ – равнодействующая всех сил, приложенных к точке, $\vec{a}$ – ускорение точки (рис. 3.1). В любой момент времени для движущейся точки выполняется основное уравнение динамики:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

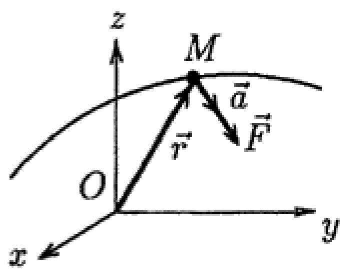


Рис. 3.1.

Вспоминая из кинематики формулу

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}},$$

Выражающую ускорение через радиус-вектор точки, представим основное уравнение динамики в следующем виде:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Это равенство, выражающее основное уравнение динамики в дифференциальной форме, называется ***векторным дифференциальным уравнением движения*** материальной точки.

Векторное дифференциальное уравнение эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям того же порядка. Они получаются, если основное уравнение динамики спроектировать на координатные оси и записать в координатной форме:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Так как $a_x = \ddot{x},\ a_y = \ddot{y},\ a_z = \ddot{z}$, эти равенства запишутся:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Полученные равенства называются ***дифференциальными уравнениями движения*** материальной точки в декартовой системе координат. В этих уравнениях x, y, z – текущие координаты точки, F_x, F_y, F_z – проекции на координатные оси равнодействующей сил, приложенных к точке. Если для ускорения воспользоваться формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}},$$

то векторное и скалярные дифференциальные уравнения движения точки запишутся в виде дифференциальных уравнений первого порядка: $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$ – векторное дифференциальное уравнение; $m\dot{v}_x = F_x,\ m\dot{v}_y = F_y,\ m\dot{v}_z = F_z$ – скалярные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения движения точки можно записать не только в декартовой, но в любой другой системе координат. Так, проектируя основное уравнение динамики на естественные координатные оси, получаем равенства:

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

где a_τ, a_n, a_b – проекции ускорения на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории в текущем положении точки; F_τ, F_n, F_b – проекции равнодействующей силы на эти же оси. Вспоминая формулы кинематики для проекций ускорения на естественные оси и подставляя их в написанные равенства, получим:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b.$$

Это движения материальной точки в естественной форме. Здесь $v = \pm|\vec{v}|$ – проекция скорости на направление касательной, ρ – радиус кривизны траектории в текущем положении точки. Многие задачи динамики точки решаются более просто, если воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в естественной форме.

Рассмотрим примеры на составление дифференциальных уравнений движения.

Пример 1. Материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту и движется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости: $R=bv$, где b – заданный постоянный коэффициент пропорциональности.

Изображаем движущуюся точку в произвольный (текущий) момент времени t, прикладываем действующие силы – силу сопротивления $\vec{R}$ и вес точки $\vec{P} = m\vec{g}$ (рис. 3.2). Выбираем координатные оси Oxy – начало координат принимаем в начальном положении точки, ось x направляем горизонтально в сторону движения, ось y – вертикально вверх. Определяем проекции равнодействующей $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$ на выбранные оси (φ – угол наклона скорости $\vec{v}$ к горизонту):

$$F_x = -R\cos\varphi = -bv\frac{v_x}{v} =$$
$$= -bv_x = -b\dot{x};$$
$$F_y = -mg - R\sin\varphi = -mg - b\dot{y}.$$

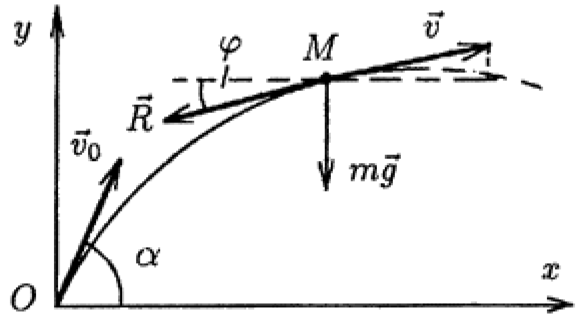


Рис. 3.2.

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения точки в общем виде, получаем дифференциальные уравнения движения, соответствующие нашей задаче:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0;$$
$$m\ddot{y} + b\dot{y} = -mg.$$

Третье уравнение отсутствует, так как движение происходит в плоскости *Oxy*.

Пример 2. Движение математического маятника в пустоте. Математическим маятником называют материальную точку *M*, подвешенную при помощи невесомой нити (или стержня) длиной *l* к неподвижной точке *O* и движущуюся под действием силы тяжести в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис. 3.3).

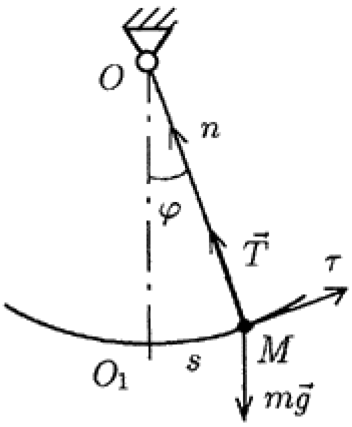


Рис. 3.3.

В данном примере траектория точки известна (это окружность радиуса l с центром в точке O), поэтому целесообразно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в естественной форме. Принимаем за начало отсчета дуговой координаты s наинизшую точку окружности O_1, направление отсчета дуг выберем вправо. Изображаем естественные оси – касательную M_τ, главную нормаль M_n, бинормаль M_b направлена на читателя. Проекции на эти оси равнодействующей приложенных сил – веса $m\vec{g}$, и реакции связи $\vec{T}$ таковы (φ – угол наклона маятника к вертикали):

$$F_\tau = -mg\sin\varphi; \quad F_n = T - mg\cos\varphi; \quad F_b = 0.$$

Подставляя эти значения в общие естественные уравнения движения и учитывая равенство $v = l\dot{\varphi}$ получаем дифференциальные уравнения движения математического маятника в естественной форме:

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi; \quad \frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\varphi.$$

Так как обе действующие силы лежат в соприкасающейся плоскости $M_{\tau n}$, третье уравнение отсутствует.

В заключение приведем последовательность действий при составлении дифференциальных уравнений движения:

1) движущаяся точка изображается в произвольный (текущий) момент времени;

2) изображаются векторы всех действующих сил;

3) выбирается подходящая система координат;

4) проектируя основное уравнение динамики на выбранные оси, записываются дифференциальные уравнения движения.

3.5.3. Способы решения основных задач динамики точки

В ***первой основной задаче*** заданы масса точки m и ее закон движения в той или иной форме – векторной, координатной или естественной. Требуется найти неизвестную силу, действующую на движущуюся точку.

Рассмотрим решение этой задачи при координатном способе задания движения. Пусть $Oxyz$ – система декартовых координатных осей; $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ – заданные уравнения движения точки в этих осях. Неизвестную равнодействующую $\vec{\boldsymbol{F}}$ сил, приложенных к точке, будем искать, определяя ее проекции F_x, F_y, F_z на координатные оси. Запишем дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Видно, что в этих уравнениях уже содержится решение задачи в общем виде (для большей убедительности следует поменять местами правые и левые части написанных равенств). В конкретной задаче, дифференцируя заданные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ два раза по времени и подставляя результат в дифференциальные уравнения движения, определяем проекции F_x, F_y, F_z искомой равнодействующей. Далее, если это необходимо, определяем модуль силы и косинусы углов, образуемых силой с координатными осями.

Пример 3. Материальная точка M массы m падает вертикально в среде с сопротивлением, причем уравнение движения имеет вид (рис. 4):

$$y = \frac{1}{2}g\left[t - \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\right].$$

Определить величину силы сопротивления $\vec{R}$.

Решение. Движение точки происходит под действием двух сил – собственного веса $m\vec{g}$ и силы сопротивления $-\vec{R}$; проекция равнодействующей на направление движения (ось y) будет равна $F_y = mg - R$. Составляем дифференциальное уравнение движения (при прямолинейном движении имеет место одно дифференциальное уравнение движения):

$$m\ddot{y} = mg - R.$$

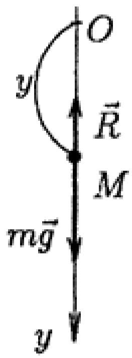


Рис. 2.9.

Находим $\ddot{y}$, для чего дважды дифференцируем по времени заданный закон движения точки:

$$\dot{y} = v = \frac{1}{2}g(1 - e^{-2t}); \quad \ddot{y} = \dot{v} = ge^{-2t}$$

Подставляя $\ddot{y}$ в дифференциальное уравнение движения и разрешая его относительно неизвестной R, получаем:

$$R = mg(1 - e^{-2t}) = 2mv.$$

Таким образом, сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости с коэффициентом $2m$. Векторная формула для силы будет иметь вид

$$\vec{R} = -2m\vec{v}.$$

Во ***второй основной задаче*** задаются масса материальной точки и действующая сила (силы), а определению подлежат уравнения движения точки. В дифференциальных уравнениях движения точки

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});\\
m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});\\
m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})
\end{aligned}
$$

в этом случае правые части заданы, а искомыми являются функции времени $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, определяющие закон движения точки. Для того чтобы найти эти функции, требуется выполнить интегрирование дифференциальных уравнений движения при определенных, заданных начальных условиях:

$$
\text{при } t = t_0: \quad
\begin{aligned}
x &= x(t_0) = x_0; \quad & \dot{x} &= \dot{x}(t_0) = v_{0x}\\
y &= y(t_0) = y_0; \quad & \dot{y} &= \dot{y}(t_0) = v_{0y};\\
z &= z(t_0) = z_0; \quad & \dot{z} &= \dot{z}(t_0) = v_{0z}.
\end{aligned}
$$

Обычно принимается $t_0=0$.

Пример 4. Найти решение уравнений движения материальной точки в примере 1.

Решение. Дифференциальные уравнения движения, которые были получены выше, запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0;\\
&\ddot{y} + \mu\dot{y} = -g
\end{aligned}
\qquad \left(\mu = \frac{b}{m} = \text{const}\right).
$$

Точка движется, оставаясь, все время в плоскости Oxy, поэтому имеем не три, а только два дифференциальных уравнения движения. Для решения задачи требуется проинтегрировать эти уравнения при следующих начальных условиях:

$$
\text{при } t = 0: \quad
\begin{aligned}
x &= x(0) = 0; \quad & \dot{x} &= \dot{x}(0) = v_{0x};\\
y &= y(0) = 0; \quad & \dot{y} &= \dot{y}(0) = v_{0y}.
\end{aligned}
$$

Уравнения оказались независимыми, поэтому могут интегрироваться отдельно. Решим вначале первое уравнение, которое в переменной $v_x = \dot{x}$ можно представить в следующем виде:

$$
\frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x.
$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После разделения переменных уравнение запишется так:

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\mu dt.$$

Теперь можно брать интегралы от обеих частей:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\mu \int dt,$$

после чего, учитывая, что $v_x > 0$, получаем:

$$\ln v_x = -\mu t + C_*,$$

где C_* – произвольная постоянная интегрирования. Решаем это логарифмическое уравнение относительно v_x:

$$v_x = \mathrm{e}^{-\mu t + C_*} = C_1 \mathrm{e}^{-\mu t} \quad (C_1 = \mathrm{e}^{C_*}).$$

Далее, заменяя v_x выражением dx/dt, снова приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Снова разделяя переменные и интегрируя, получаем выражение

$$x = -\frac{C_1}{\mu} \mathrm{e}^{-\mu t} + C_2,$$

в котором C_2 – новая (вторая) постоянная интегрирования (заметим, что C_* и $C_1 = expC_*$ представляют собой разные формы записи одной и той же (первой) постоянной интегрирования). Это и есть общее решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$. Для того чтобы найти уравнение движения точки, требуется найти постоянные интегрирования C_1 и C_2 и подставить в это общее решение. Постоянные интегрирования определяем по начальным условиям движения. Для этого начальные условия $t=0$, $x(0)=0$, $\dot{x}(0) = v_{0x} = v_0 cos\alpha$ подставляем в выражения для x и $v = \dot{x}$, что дает нам два уравнения (конечных, не дифференциальных) для определения C_1 и C_2:

$$0 = -\frac{C_1}{\mu} + C_2; \quad v_0 \cos\alpha = C_1.$$

Из них находим:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha; \quad C_2 = \frac{C_1}{\mu} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}.$$

Теперь все готово и остается лишь записать уравнение движения

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}).$$

Второе дифференциальное уравнение движения интегрируется по той же общей схеме, что и первое. После интегрирования, которое предлагаем выполнить самостоятельно, получаем второе уравнение движения

$$y = \frac{g + \mu v_0 \sin\alpha}{\mu^2}(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu}t.$$

Примечания.

1. При интегрировании дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно пользоваться определенным интегрированием на интервале $[t_0,\ t]$. Тогда начальные условия будут учитываться в пределах определенных интегралов, и постоянные интегрирования вводить не требуется. Например, интегрирование уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$. тогда свелось бы к следующим последовательным действиям:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0; \quad \frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x; \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\mu dt;$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\mu \int_0^t dt; \quad \ln v_x \big|_{v_{0x}}^{v_x} = -\mu t\big|_0^t; \quad \ln v_x - \ln v_{0x} = -\mu t;$$

$$\ln\frac{v_x}{v_{0x}} = -\mu t; \quad \frac{v_x}{v_{0x}} = \mathrm{e}^{-\mu t}; \quad v_x = v_{0x}\mathrm{e}^{-\mu t} = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-\mu t};$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-\mu t} \text{ и т.д.}$$

2. Дифференциальные уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$, $\ddot{y} + \mu\dot{y} = -g$, приводимые, как это было показано выше, к уравнениям с разделяющимися переменными, одновременно являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и могут интегрироваться методами, установленными для этого типа уравнений. Покажем это на примере уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$. Это – линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \mu\lambda = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\mu$. По найденным корням выписываем общее решение: $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2 e^{-\mu t}$, далее находим выражение для проекции скорости на ось x: $v_x = \dot{x} = -\mu C_2 e^{-\mu t}$. Для получения кинематического уравнения движения $x=x(t)$ остается найти произвольные постоянные C_1 и C_2, что делается обычным порядком.

Вопросы для самопроверки

1. Какая система отсчета (система координат) называется инерциальной?

2. В чем заключаются две основные задачи динамики материальной точки?

3. Приведите общий вид дифференциальных уравнений движения материальной точки в декартовой и естественной системах координат.

4. Что называется начальными условиями движения? Приведите примеры задания начальных условий.

5. Приведите пример решения первой основной задачи динамики точки.

6. В чем состоит вторая основная задачи динамики точки и как она решается?

7. Как определяются постоянные интегрирования при решении второй основной задачи динамики?

Упражнения

В примере 4 получить закон движения точки вдоль оси *Oy*.

3.6. Способы интегрирования дифференциального уравнения прямолинейного движения материальной точки

3.6.1. Дифференциальное уравнение и начальные условия прямолинейного движения

Если действующая сила и начальная скорость материальной точки направлены по одной прямой, точка будет двигаться прямолинейно вдоль той же прямой. Приняв эту прямую за ось *x*, запишем общий вид дифференциального уравнения прямолинейного движения:

$$m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t).$$

Для того чтобы найти закон движения точки *x=x(t),* требуется проинтегрировать это уравнение при определенных, заданных начальных условиях:

$$\text{при } t = 0: \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = v_{0x}.$$

Выполнить интегрирование этого уравнения при произвольной силе $F_x(x, \dot{x}, t)$ не представляется возможным. Это можно сделать только в более простых случаях, когда действующая сила зависит:

1) только от времени: $F_x = f(t)$;

2) только от положения: $F_x = f(x)$;

3) только от скорости: $F_x = f(\dot{x})$;

4) является постоянной;

5) является линейной функцией своих аргументов вида $F_x = cx + b\dot{x} + \varphi(t)$, где *c, b* – постоянные коэффициенты, $\varphi(t)$ – заданная функция времени.

Рассмотрим некоторые из этих случаев.

3.6.2. Определение закона движения точки под действием силы, зависящей только от времени

Дифференциальное уравнение движения имеет следующий общий вид:

$$m\ddot{x} = f(t).$$

Переходим к переменной $v_x = \dot{x}$ и рассматриваем уравнение первого порядка

$$m\frac{dv_x}{dt} = f(t).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$mdv_x = f(t)\,dt,$$

после чего берем интегралы от обеих частей. Воспользовавшись определенным интегрированием, запишем:

$$m\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t f(t)\,dt.$$

Если интеграл в правой части берется, отсюда находим

$$v_x = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t f(t)\,dt = V(t),$$

где *V(t)* – известная функция времени. Заменяем v_x его выражением *dx/dt:*

$$\frac{dx}{dt} = V(t),$$

снова разделяем переменные и интегрируем в соответствующих пределах:

$$dx = V(t)\,dt; \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V(t)\,dt; \quad x = x_0 + \int_0^t V(t)\,dt.$$

Последнее равенство определяет искомый закон движения точки. Задачу можно решать и при помощи неопределенных интегралов. В этом случае при каждом интегрировании не нужно забывать вводить произвольную постоянную интегрирования.

Пример 5. На тело массы *m*, расположенное на неподвижной горизонтальной плоскости, начинает действовать постоянная по направлению горизонтальная сила $F=\alpha t$, где *t* – время в секундах, а α – заданный постоянный коэффициент. Одновременно с приложением силы телу сообщается в направлении силы скорость v_0. Принимая тело за материальную точку и пренебрегая трением, определить закон движения тела.

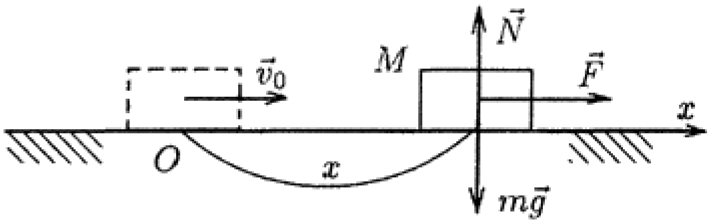


Рис. 3.4.

Решение. Выберем начало координат в начальном положении точки, ось x совместим с общим направлением силы $\vec{F}$ и начальной скорости $\vec{v}_0$. Движение начинается в момент $t=0$. В текущий момент $t>0$ тело находится в некотором положении M, определяемом координатой x (рис. 3.4). На тело действуют сила $\vec{F}$, оговоренная в условии задачи, а также сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ плоскости. Так как силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны оси x, их проекции на эту ось равны нулю. Сила $\vec{F}$ проектируется в натуральную величину с положительным знаком: $F_x = \alpha t$. Так же в натуральную величину с положительным знаком проектируется и текущая скорость тела: $v_x = v$. Составляем дифференциальное уравнение движения, которое сразу записываем в виде уравнения первого порядка

$$m\frac{dv}{dt} = \alpha t.$$

После разделения переменных и интегрирования будем иметь

$$v = \frac{\alpha t^2}{2m} + C_1.$$

Полагаем $v=dx/dt$, снова разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t^2}{2m} + C_1; \quad dx = \frac{\alpha t^2}{2m}\,dt + C_1\,dt; \quad x = \frac{\alpha t^3}{6m} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования определяем по начальным условиям, которые имеют вид:

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Для этого подставляем начальные условия в результат первого и второго интегрирования и находим:

$$C_1 = v_0; \quad C_2 = 0.$$

Теперь можем записать искомое уравнение движения тела

$$x = v_0 t + \frac{\alpha t^3}{6m}.$$

3.6.3. Определение закона движения точки под действием силы, зависящей только от положения

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = f(x)$$

или, в виде уравнения первого порядка:

$$m\frac{dv_x}{dt} = f(x).$$

Здесь содержатся три переменные *t*, *x*, v_x, поэтому для применения метода разделения переменных требуется исключить одну из них. Это делается при помощи следующего преобразования левой части уравнения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dt}\frac{dx}{dx} = m\frac{dx}{dt}\frac{dv_x}{dx} = mv_x\frac{dv_x}{dx},$$

после чего уравнение принимает типичный вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$mv_x\frac{dv_x}{dx} = f(x).$$

Разделяя переменные и интегрируя, например, вычисляя от обеих частей неопределенные интегралы, будем иметь:

$$mv_x\,dv_x = f(x)\,dx; \quad m\int v_x\,dv_x = \int f(x)\,dx; \quad \frac{mv_x^2}{2} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Если интеграл справа берется, то его переменная часть будет функцией от *x*, и для первой степени скорости мы можем написать выражение

$$v_x = \Phi(x, C_1), \qquad (3.6.1)$$

где $\Phi(x, C_1)$ – известная функция. Далее следует:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, C_1); \quad \frac{dx}{\Phi(x, C_1)} = dt; \quad \int\frac{dx}{\Phi(x, C_1)} = t + C_2.$$

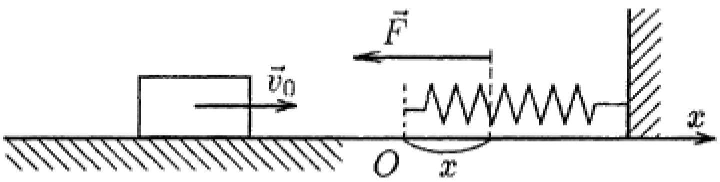


Рис. 3.5.

Если неопределенный интеграл слева берется, то его переменная часть суть некоторая известная функция $\varphi(x, C_1)$, и последнее равенство принимает вид

$$\varphi(x, C_1) = t + C_2. \qquad (3.6.2)$$

Дальнейшее решение состоит в определении постоянных C_1 и C_2 из уравнений, которые получаются подстановкой начальных условий в выражения (3.6.1) и (3.6.2). Если теперь равенство (3.6.2), в которое подставлены найденные значения C_1 и C_2, разрешить относительно x, то мы получим зависимость $x=x(t)$ – искомое уравнение движения точки. (Однако это не всегда возможно, так как зависимость (3.6.2) может оказаться алгебраическим уравнением высокого порядка либо сложным трансцендентным уравнением).

Пример 6. Тело массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0. В некоторый момент оно наталкивается на пружину и далее движется, сжимая пружину. Найти максимальное сжатие пружины, если упругая сила может быть выражена равенством $F = k\Delta l + k_1(\Delta l)^3$, где Δl – деформация (сжатие) пружины, а k, k_1 – заданные постоянные коэффициенты. Для числовых значений коэффициентов принять для простоты $k_1=2k$.

Решение. Тело принимаем за материальную точку, момент начала контакта тела с пружиной принимаем за начальный ($t=0$), движение отнесем к оси x с началом, совпадающим с начальным положением тела (рис. 3.5). Тогда задача сведется к решению дифференциального уравнения $x=\Delta l$:

$$m\ddot{x} = -F(x) = -kx - k_1x^3$$

с начальными условиями

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Действующая сила является функцией координаты (положения), поэтому левую часть уравнения следует представить в виде $m\ddot{x} = mv_x dv_x/dx$. Тогда дифференциальное уравнение движения перепишется так:

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = -kx - k_1 x^3.$$

Для решения задачи здесь не требуется находить уравнение движения тела (такое подробное описание движения было бы излишним). Достаточно рассмотреть интервал от начала движения ($t=0$, $x=0$, $v_x=v_0$) до момента остановки ($t=t_{ост}$, $v_x=0$, $x=x_{max}=h$). Разделяем переменные в уравнении движения и интегрируем в соответствующих пределах:

$$mv_x\, dv_x = -kx\, dx - k_1 x^3\, dx;$$

$$m \int_{v_0}^{0} v_x\, dv_x = -k \int_0^h x\, dx - k_1 \int_0^h x^3\, dx$$

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -k\frac{h^2}{2} - k_1 \frac{h^4}{4} = -\frac{k}{2}(h^2 + h^4).$$

Последнее выражение представляет собой биквадратное уравнение для определения максимального сжатия $h=x_{max}=\Delta l_{max}$:

$$h^4 + h^2 - \frac{mv_0^2}{k} = 0.$$

Из него находим

$$h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4mv_0^2}{k}} - 1\right).$$

3.6.4. О нахождении закона движения при постоянной силе и силе, зависящей только от скорости

В случаях, когда действующая сила зависит только от скорости ($F_x=f(v)$) или является постоянной, можно применять оба рассмотренных способа разделения переменных.

Пример 7. Тело массы m, лежащее на наклонной плоскости, получает начальную скорость v_0, направленную вдоль плоскости вверх. Найти уравнение движения тела, если коэффициент трения равен f, а плоскость составляет с горизонтом угол α.

Решение. Тело рассматриваем как материальную точку. Выбираем систему координатных осей с началом в начальном положении тела (рис. 3.6).

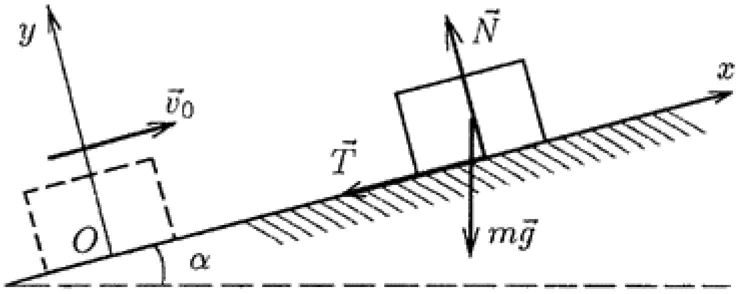


Рис. 3.6.

После полученного толчка тело первое время движется вверх. Изображаем его в некоторый момент t, прикладываем действующие силы – вес $m\vec{g}$, нормальную реакцию плоскости $\vec{N}$, силу трения скольжения $\vec{T}$, составляем дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - T;$$
$$m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N.$$

Так как $\ddot{y} = 0$ (тело движется вдоль оси x) из второго уравнения находим: $N = mg \cdot cos\alpha$. Это позволяет определить силу трения: $T = fN = f \cdot mg \cdot cos\alpha$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Видно, что имеет место случай, когда действующая сила является постоянной. Делим обе части уравнения на массу, вводим для краткости обозначение

$$g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = w = \text{const} \quad (w > 0)$$

и записываем уравнение в виде

$$\frac{dv_x}{dt} = -w.$$

Для определения закона движения тела требуется проинтегрировать это уравнение при начальных условиях:

$$\text{при } t=0: \quad x=0; \quad \dot{x}=v_0.$$

Решение задачи при первом способе разделения переменных (в переменных v_x, t) сводится к следующим действиям:

$$dv_x = -w dt; \quad \int_{v_0}^{v_x} dv_x = -w\int_0^t dt; \quad v_x - v_0 = -wt;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - wt; \quad dx = v_0\,dt - wt\,dt; \quad \int_0^x dx = v_0\int_0^t dt - w\int_0^t t\,dt;$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}wt^2 \text{ — уравнение движения тела.}$$

Решение задачи при втором способе разделения переменных (в переменных v_x, x) таково:

$$v_x\frac{dv_x}{dx} = -w; \quad v_x\,dv_x = -w\,dx; \quad \int_{v_0}^{v_x} v_x\,dv_x = -w\int_0^x dx;$$

$$\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -wx; \quad v_x = \sqrt{v_0^2 - 2wx}; \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2wx};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2-2wx}} = dt; \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2-2wx}} = \int_0^t dt; \quad -\frac{1}{w}\sqrt{v_0^2-2wx}\Big|_0^x = t;$$

$$-\frac{1}{w}\sqrt{v_0^2-2wx} + \frac{v_0}{w} = t.$$

Из последнего равенства, разрешая его относительно x, находим

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}wt^2.$$

В данном примере решение первым способом предпочтительнее, так как приводит к более простым выражениям. Однако это не всегда так – иногда задача решается проще при втором способе разделения переменных.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите общий вид дифференциального уравнения и начальных условий при прямолинейном движении материальной точки.

2. Изложите последовательность действий при интегрировании дифференциального уравнения прямолинейного

движения материальной точки под действием силы, зависящей только от времени.

3. Сделайте то же самое в следующих случаях:

3.1. Сила зависит только от положения точки;

3.2. Сила зависит только от скорости точки;

3.3. Является постоянной.

Упражнения

В последнем примере определить время движения точки до остановки и пройденный путь. Что будет происходить с точкой после остановки?

3.7. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела под углом к горизонту, как и движение тела, брошенного горизонтально – это сложное криволинейное движение, которое можно представить в виде суммы двух независимых движений – равномерного прямолинейного движения в горизонтальном направлении и свободного падения по вертикали.

3.7.1. Основные характеристики и формулы

Выберем систему координат, как показано на рис. 3.7, и запишем законы изменения основных кинематических величин для обоих направлений.

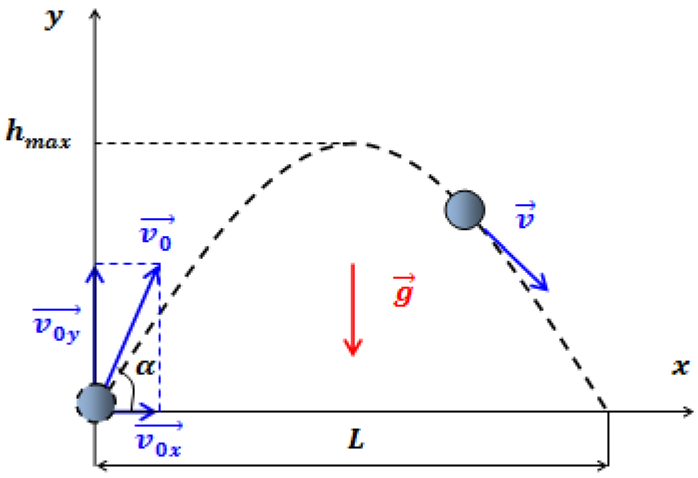


Рис.3.7. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

По горизонтали (вдоль оси x): начальное положение $x_0=0$, начальная скорость $v_{0x}=v_0\cdot cos\alpha$, скорость $v_x=v_{0x}=v_0\cdot cos\alpha$, ускорение $a_x=0$, закон движения $x=v_0\cdot cos\alpha\cdot t$.

По вертикали (вдоль оси y): начальное положение $y_0=0$, начальная скорость $v_{0y}=v_0\cdot sin\alpha$, скорость $v_y=v_{0y}-gt=v_0\cdot sin\alpha-gt$, ускорение $a_y=-g$, закон движения $y=v_0\cdot sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$.

Приведенные выше кинематические характеристики движения позволяют определить максимальную высоту подъема тела, время и дальность полета. При достижении максимальной высоты подъема y–составляющая скорости тела обращается в нуль: $v_0\cdot sin\alpha-gt=0$. Откуда время подъема тела

$$t_0=\frac{v_0 sin\alpha}{g}.$$

Найдем время полета тела от начальной точки до точки падения. В точке падения координата по вертикальной оси y=0. Следовательно, для решения этой задачи необходимо решить уравнение

$$v_0\cdot sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}=0.$$

Оно будет иметь решение при t=0 (начало движения) и

$$t_p=\frac{2v_0 sin\alpha}{g}=2t_0. \quad \text{(время полета тела)}$$

В верхней точке траектории *y*–координата тела равна максимальной высоте подъема:

$$h_{max} = v_0 \cdot sin\alpha \cdot t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}.$$

В момент падения *x*–координата тела равна дальности полета, поэтому:

$$L = v_0 \cdot cos\alpha \cdot t_p = v_0 \cdot cos\alpha \cdot \frac{2v_0 sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}.$$

Из этой формулы следует, что максимальная дальность полета будет наблюдаться при бросании тела (при стрельбе, например) под углом 45^0. Траекторией движения тела, брошенного под углом к горизонту, является парабола. Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории движения (параболе) и равна

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2} = \sqrt{\mathbf{v}_0^2 \cos^2\alpha + (\mathbf{v}_0 \sin\alpha - \mathbf{g}\mathbf{t})^2}$$

Угол, под которым направлен вектор скорости в любой момент времени:

$$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x}.$$

Примеры решения задач

Пример 8. Бросив камень под углом $\alpha=45^0$ к горизонту, необходимо попасть в цель, находящуюся на расстоянии *L=12м* от места бросания и на высоте *h=2м*. С какой скоростью необходимо бросить камень?

Решение. Направим координатные оси, как показано на рисунке

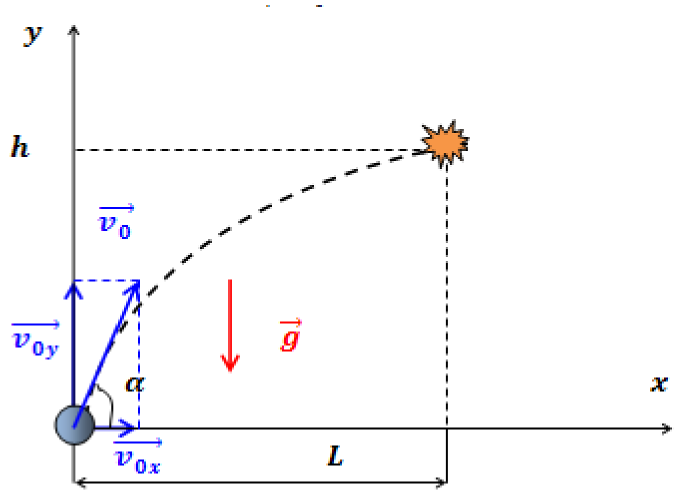


Рис. 3.8.

Представим сложное криволинейное движение в виде суммы независимых движений в горизонтальном и вертикальном направлениях и запишем законы изменения координат камня со временем:

$$x = v_0 \cdot cos\alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 . sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент попадания в цель камень будет иметь координаты (L, h), поэтому система уравнений запишется в виде:

$$v_0 \cdot cos\alpha \cdot t = L,$$

$$v_0 \cdot sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h,$$

откуда, решая систему методом подстановки, будем искать начальную скорость камня v_0. Выразим время из первого уравнения:

$$t = \frac{L}{v_0 cos\alpha}$$

и подставим это соотношение во втрое уравнение:

$$v_0 sin\alpha \cdot \frac{L}{v_0 cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{L}{v_0 cos\alpha}\right)^2 = h$$

$$\frac{2v_0^2 sin\alpha cos\alpha L - gL^2}{2(v_0 cos\alpha)^2} = h$$

$$\frac{v_0^2 L sin2\alpha - gL^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = h$$

$$v_0^2 L sin2\alpha - 2v_0^2 h cos^2\alpha = gL^2$$

$$v_0^2 (L sin2\alpha - 2h cos^2\alpha) = gL^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL^2}{L sin2\alpha - 2h cos^2\alpha}}$$

Ускорение свободного падения g=9,8 м/с^2. Подставив в формулу численные значения физических величин, вычислим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 12^2}{12 \cdot sin90^0 - 2 \cdot 2 \cdot cos^2 45^0}} = 12\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: Камень необходимо бросить со скоростью 12 м/с.

Пример 9. Под углом α=60^0 к горизонту брошено тело с начальной скоростью 20 м/с. Через сколько времени оно будет двигаться под углом 45^0 к горизонту?

Решение. Выберем систему координат, как показано на рисунке.

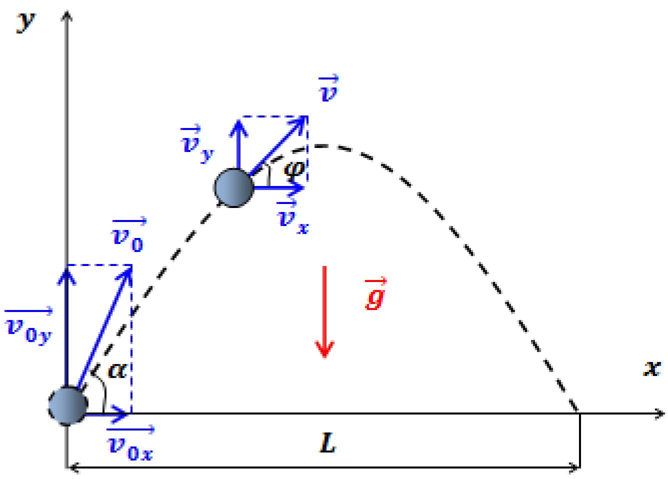


Рис. 3.9.

Из рисунка видно, что

$$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

Запишем зависимости от времени x– и y– составляющих скорости тела:

$$v_x = v_0 \cdot cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$$

Подставив эти соотношения в формулу для тангенса угла, который составляет траектория полета тела с горизонтом, а также учитывая, что в данном случае $tg\varphi = tg45^0 = 1$, получим:

$$\frac{v_0 sin\alpha - gt}{v_0 cos\alpha} = 1$$

откуда

$$v_0 \sin\alpha - gt = v_0 \cos\alpha$$

$$gt = v_0 (\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$t = \frac{v_0(sin\alpha - cos\alpha)}{g}$$

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ *м/с*. Подставив в формулу численные значения физических величин, вычислим:

$$t = \frac{20(sin60^0 - cos60^0)}{9{,}8} = 0{,}75c.$$

Ответ: Тело будет двигаться под углом 45^0 к горизонту через *0,75 с*.

3.8. Движение тела, брошенного горизонтально

Это движение в плоскости, поэтому для описания движения необходимо 2 координаты. Считаем, что движение происходит вблизи поверхности Земли, поэтому ускорение тела – ускорение свободного падения (a=g). Так как мы пренебрегаем сопротивлением воздуха, то ускорение направлено только к поверхности Земли (g) – вдоль вертикальной оси (y), вдоль оси x движение равномерное и прямолинейное. Выразим проекции скорости и координаты через модули векторов.

$$x = v_0 t,\ \ y = y_0 - \frac{gt^2}{2},\ \ v_x = v_0,\ \ v_y = -gt.$$

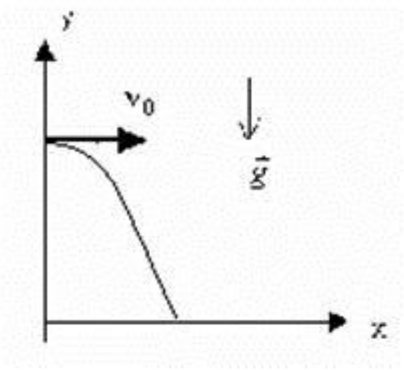


Рис. 3.10.

Для того чтобы получить уравнение траектории, выразим время t из уравнения координаты x и подставим в уравнение для y:

$$t=\frac{x}{v_0},\quad y=y_0-\frac{g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2}{2}=y_0-\frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

между координатами квадратичная зависимость, траектория – парабола

3.9. Столкновение тел. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары

На этой лекции мы продолжаем изучать законы сохранения и рассмотрим различные возможные удары тел. Из своего опыта вы знаете, что накачанный баскетбольный мяч хорошо отскакивает от пола, тогда как сдутый – практически не отскакивает. Из этого вы могли сделать вывод, что удары различных тел могут быть разными. Для того чтобы охарактеризовать удары, вводятся абстрактные понятия ***абсолютно упругого*** и ***абсолютно неупругого*** ударов.

3.10. Столкновение тел

3.10.1. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары

Рассмотрим взаимодействие тел в процессе столкновения, иными словами движение невзаимодействующих тел, которые меняют свое состояние только при соприкосновении, которое мы называем столкновением, или ударом. При столкновении тел, в общем случае, кинетическая энергия сталкивающихся тел не обязана быть равной кинетической энергии разлетающихся тел. Действительно, при столкновении тела взаимодействуют друг с другом, воздействуя друг на друга и совершая работу. Эта работа и может привести к изменению кинетической энергии каждого из тел. Кроме того, работа, которую совершает первое тело над вторым, может оказаться неравной работе, которую второе тело совершает над первым. Это может привести к тому, что механическая энергия может перейти в тепло, электромагнитное излучение, или даже породить новые частицы. Столкновения, при которых не сохраняется кинетическая энергия сталкивающихся тел, называют ***неупругими***. Среди всех возможных неупругих столкновений, есть один исключительный случай, когда сталкивающиеся тела в результате столкновения слипаются и дальше движутся как одно целое. Такой неупругий удар называют ***абсолютно неупругим*** (рис. 3.11).

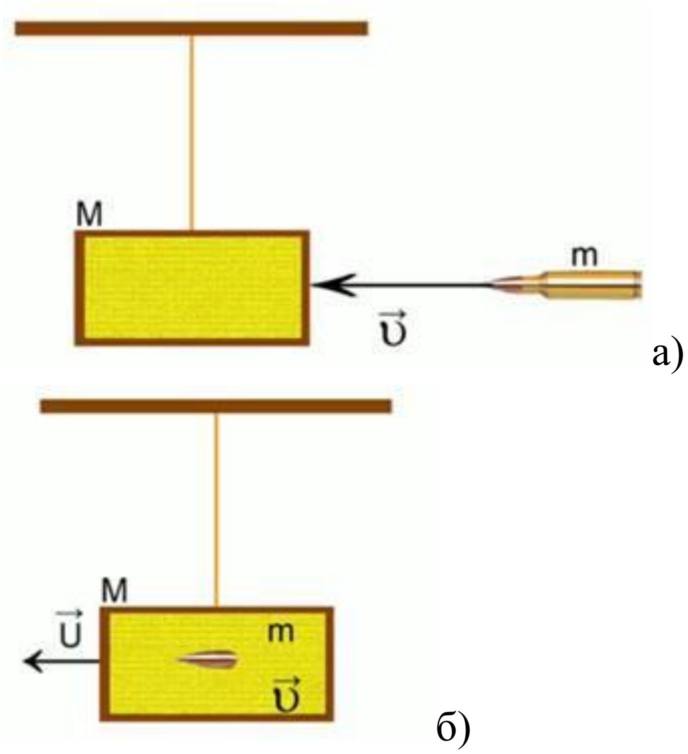


Рис. 3.11. Абсолютное неупругое столкновение

Рассмотрим пример абсолютно неупругого удара. Пусть пуля массой m летела в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}$ и столкнулось с неподвижным ящиком с песком массой M, подвешенным на нити. Пуля застряла в песке, и дальше ящик с пулей пришел в движение. В процессе удара пули и ящика внешние силы, действующие на эту систему, – это сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити, направленная вертикально вверх, если время удара пули было настолько мало, что нить не успела отклониться. Таким образом, можно считать, что импульс сил, действующих на тело во время удара, был равен нулю, что означает, что справедлив закон сохранения импульса:

$$m\vec{v} = (m+M)\overrightarrow{v'}.$$

Условие, что пуля застряла в ящике, и есть признак абсолютно неупругого удара. Проверим, что произошло с кинетической энергией в результате этого удара. Начальная кинетическая энергия пули:

$$E_K^{(1)} = \frac{mv^2}{2},$$

конечная кинетическая энергия пули и ящика:

$$E_K^{(2)} = \frac{(m+M)v'^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(m+M)}$$

простая алгебра показывает нам, что в процессе удара кинетическая энергия изменилась:

$$\Delta E = E_K^{(1)} - E_K^{(2)} = \frac{M}{m+M}\frac{mv^2}{2}.$$

Итак, начальная кинетическая энергия пули меньше конечной на некоторую положительную величину. Как же это произошло? В процессе удара между песком и пулей действовали силы сопротивления. Разность кинетических энергий пули до и после столкновения как раз и равны работе сил сопротивления. Другими словами, кинетическая энергия пули пошла на нагрев пули и песка.

Если в результате столкновения двух тел сохраняется кинетическая энергия, такой удар называется ***абсолютно упругим.*** Примером абсолютно упругих ударов могут быть столкновения бильярдных шаров. Мы рассмотрим простейший случай такого столкновения – центральное столкновение.

Центральным называется столкновение, при котором скорость одного шара проходит через центр масс другого шара. (Рис. 3.12.)

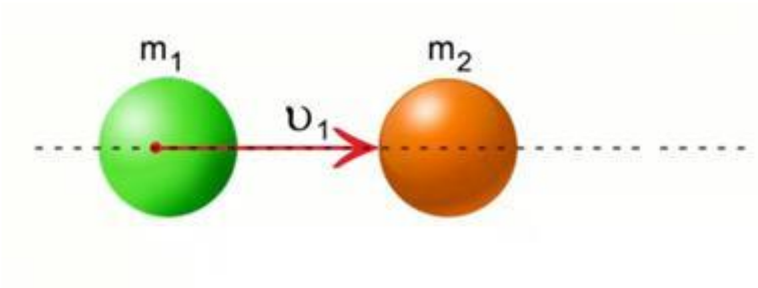


Рис. 3.12. Центральный удар шаров

Пускай один шар покоится, а второй налетает на него с какой-то скоростью $\vec{v}$, которая, согласно нашему определению, проходит через центр второго шара. Если столкновение центральное и упругое, то при столкновении возникают силы упругости, действующие вдоль линии столкновения. Это приводит к изменению горизонтальной составляющей импульса первого шара, и к возникновению горизонтальной составляющей импульса второго шара. После удара второй шар получит импульс, направленный направо, а первый шар может двигаться как направо, так и налево – это будет зависеть от соотношения между массами шаров. В общем случае, рассмотрим ситуацию, когда массы шаров различны. Закон сохранения импульса выполняется при любом столкновении шаров:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v_2.$$

В случае абсолютно упругого удара, также выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными величинами. Решив ее, мы получим ответ. Скорость первого шара после удара равна

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$

заметим, что эта скорость может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от того, масса какого из шаров больше. Кроме того, можно выделить случай, когда шары одинаковые. В этом случае после удара первый шар остановится. Скорость второго шара, как мы ранее отметили, получилась положительной при любом соотношении масс шаров:

$$v_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

Наконец, рассмотрим случай нецентрального удара в упрощенном виде – когда массы шаров равны. Тогда, из закона сохранения импульса мы можем записать:

$$m\vec{v_1} = m\vec{v_1'} + m\vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{v_1'} + \vec{v_2}$$

А из того, что кинетическая энергия сохраняется:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2^2$$

Нецентральным будет удар, при котором скорость налетающего шара не будет проходить через центр неподвижного шара (рис. 3.13). Из закона сохранения импульса, видно, что скорости шаров составят параллелограмм. А из того, что сохраняется кинетическая энергия, видно, что это будет не параллелограмм, а квадрат.

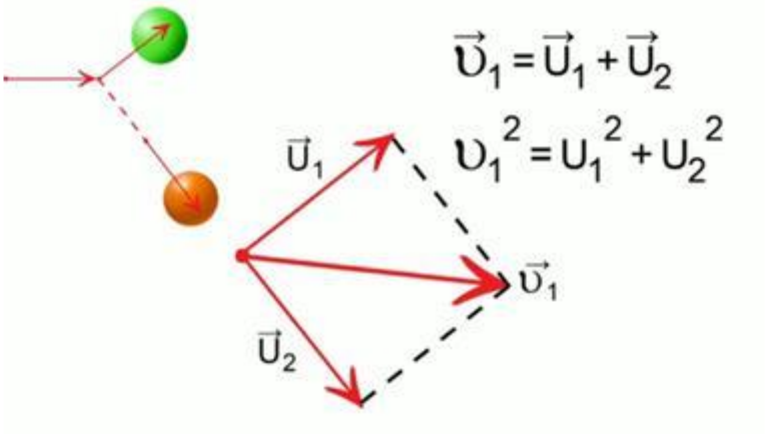


Рис. 3.13. Нецентральный удар при одинаковых массах

Таким образом, при абсолютно упругом нецентральном ударе, когда массы шаров равны, они всегда разлетаются под прямым углом друг к другу.

3.10.2. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно также с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу. Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости до удара v_1и v_2, то, используя закон сохранения импульса, можно записать:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon$$

где v – скорость движения шаров после удара. Тогда

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае – если массы и скорости шаров равны, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (***диссипация энергии***). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2}$$

Отсюда получаем:

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно (υ_2=0), то

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $v << v_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда $m_1 \approx m_2$ тогда $v \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь). Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

3.11. Соударение двух тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры. Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. ***Абсолютно упругим*** называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга; В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление который определяются двумя условиями – сохранением полной энергий и сохранением полного импульса системы тел. Абсолютно неупругий удар, характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается: имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней. Рассмотрим вначале абсолютно неупругий удар двух частиц (материальных точек), образующих замкнутую систему. Пусть массы частиц равны m_1 и m_2, а скорости до удара $\boldsymbol{v}_{10}$ и $\boldsymbol{v}_{20}$. В силу закона сохранения суммарный импульс частиц после удара должен быть таким же, как и до удара:

$$m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20}=m_1\mathbf{v}+m_2\mathbf{v}=(m_1+m_2)\,\mathbf{v} \qquad (3.11.1)$$

($\boldsymbol{v}$ – одинаковая для обеих частиц скорость после удара). Из (3.11.1) следует, что

$$\mathbf{v}=\frac{m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1+m_2}\,. \qquad (3.11.2)$$

Для практических расчетов нужно спроектировать соотношение (3.11.2) на соответствующим образом выбранные направления. Теперь рассмотрим абсолютно упругий удар, причем ограничимся случаем центрального удара двух однородных шаров. Удар называется ***центральным***, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. При центральном ударе соударение может произойти, если: 1) шары движутся навстречу друг другу (рис. 3.14, а) и 2) один из шаров догоняет другой (рис. 3.14, б). Будем предполагать, что шары образуют замкнутую систему или что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Кроме того, будем считать, что вращение шаров отсутствует. Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\boldsymbol{v}_{10}$ и $\boldsymbol{v}_{20}$ и, наконец, скорости после удара $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Напишем уравнения сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \qquad (3.11.3)$$

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \qquad (3.11.4)$$

Учитывая, что $a^2–b^2=(a+b)(a–b)$ приведем (3.11.3) к виду

$$m_1 (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1) = m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20})(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}). \qquad (3.11.5)$$

Соотношение (3.11.4) преобразуем следующим образом:

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \qquad (3.11.6)$$

Из соображений симметрии можно утверждать, что скорости шаров после удара будут направлены вдоль той же прямой, вдоль которой двигались центры шаров перед ударом. Следовательно, все векторы в (3.11.5) и (3.11.6) коллинеарны. Для коллинеарных векторов $\boldsymbol{a,b,c}$ из $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ac}$ следует, что $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. Поэтому, сопоставив (3.11.5) и (3.11.6), можно заключить, что

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \qquad (3.11.7)$$

Умножив (3.11.7) на m_2 и вычтя результат из (3.11.6), а затем, умножив (3.11.7) на m_1 и сложив результат с (3.11.6), получим скорости шаров после удара:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2m_2 \mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{2m_1 \mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \qquad (3.11.8)$$

Для численных расчетов нужно спроектировать соотношения (3.11.8) на ось x, вдоль которой движутся шары (см. рис. 3.14). Отметим, что скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми. В самом деле, приравняв друг другу выражения (3.11.6) для $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ и произведя преобразования, получим

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Следовательно, для того чтобы скорости шаров после удара оказались одинаковыми, – необходимо, чтобы они были одинаковыми и до удара, но, в этом случае соударение не может произойти.

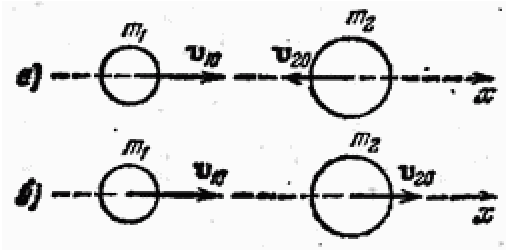


Рис. 3.14.

Отсюда следует, что условие равенства скоростей шаров после удара несовместимо с законом сохранения энергии. Итак, при неупругом ударе механическая энергия не сохраняется – она частично переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, что приводит к их нагреву. Рассмотрим случай, когда массы соударяющихся шаров равны (m_1=m_2). Из (3.11.8) следует, что при этом условии

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{10},$$

т.е. шары при соударении обмениваются скоростями. В частности, если один из шаров одинаковой массы, например, второй, до соударения покоится, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально первый шар, первый же шар после удара оказывается неподвижным. С помощью формул (3.11.8) можно определить скорость шара после упругого удара о неподвижную или движущуюся стенку (которую можно рассматривать как шар бесконечно большой массы m_2 и бесконечно большого радиуса). Разделив числитель и знаменатель выражений (3.11.8) на m_2 и пренебрегая членами, содержащими множитель m_1/m_2 получаем:

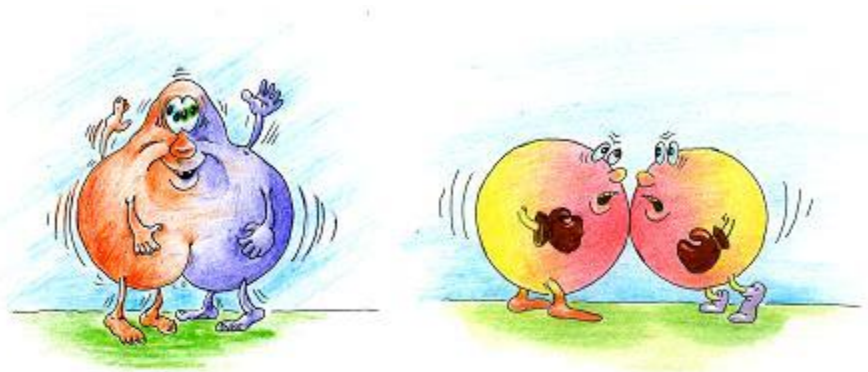
$$\mathbf{v}_1=2\mathbf{v}_{20}-\mathbf{v}_{10}, \quad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{20}.$$

Как следует из полученного результата, скорость стенки остается неизменной. Скорость же шара, если стенка неподвижна ($\mathbf{v}_{20}=0$)

меняет направление на противоположное; в случае движущейся стенки изменяется также величина скорости шара (возрастает на $2v_{20}$ если стенка движется навстречу шару, и убывает на $2v_{20,}$ если стенка «уходит» от догоняющего ее шара).

3.12. Задачи на столкновения и законы сохранения импульса и энергии

В физике под столкновениями понимают процессы взаимодействия между телами (частицами) в широком смысле слова, а не только в буквальном – как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – тела могут соединиться в одно тело (***абсолютно неупругий удар***), могут возникать новые тела и, наконец, может иметь место ***упругое столкновение***, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются ***неупругими***. Тела (частицы), участвующие в столкновении, характеризуются (до и после столкновения) импульсами, энергиями. Процесс столкновения сводится к изменению этих величин в результате взаимодействия. Законы сохранения энергии и импульса позволяют достаточно просто устанавливать соотношения между различными физическими величинами при столкновении тел. Особенно ценным здесь является то обстоятельство, что зачастую законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда действующие силы не известны.



Происходящие в обычных условиях столкновения макроскопических тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль – с такими столкновениями часто приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений, да и обычные столкновения можно часто с достаточной степенью точности считать упругими. Сохранение импульса тел (частиц) при столкновении обусловлено тем, что совокупность тел, участвующих в столкновении, составляет либо изолированную систему, т.е. на тела, входящие в систему, не действуют внешние силы, либо замкнутую: внешние силы отличны от нуля, а сумма внешних сил равна нулю. Несколько сложнее обстоит дело с применением закона сохранения энергии при столкновениях. Обращение к сохранению энергии требует порой учёта различных форм внутренней энергии. Можно сказать, что действие законов сохранения импульса и энергии в процессах столкновения подтверждено широким спектром опытных данных. Переходя к характерным примерам, отметим, что исследование столкновений проводится в лабораторной системе отсчёта (ЛСО), т.е. в инерциальной системе отсчёта, связанной с лабораторией, где проводится опыт. Напомним также, что центральным ударом шаров (шайб), называют удар, при котором скорости шаров (шайб) направлены вдоль прямой, проходящей через их центры.

3.12.1 Неупругие столкновения

Пример 10. Частица массой m с кинетической энергией K сталкивается с неподвижной частицей массой M. Найдите приращение Q внутренней энергии системы частиц в результате абсолютно неупругого столкновения («слипания»).

Решение. Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел в ЛСО. Налетающая частица движется до столкновения в положительном направлении оси *Ox* со скоростью $\vec{\boldsymbol{v}}$, кинетическая энергия частицы $K = \frac{mv^2}{2}$ В результате абсолютно неупругого удара (слипания) частицы движутся с одинаковой скоростью $\vec{\boldsymbol{u}}$. По закону сохранения импульса

$$m\vec{\boldsymbol{v}}=(m+M)\vec{\boldsymbol{u}}.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+M)u^2}{2} + Q.$$

Из приведённых соотношений находим

$$Q = \frac{M}{m + M}K$$

Отметим, что в предельных случаях

$$Q=K, \qquad m<<M,$$

$$Q = \frac{M}{m}K \ll K, \qquad \text{m>>M.}$$

Как видим, при неупругом столкновении лёгкой частицы с массивной (например, электрона с атомом) происходит почти полный переход её кинетической энергии во внутреннюю энергию массивной частицы. При равенстве масс (m=M) Q=$K/2$. Отсюда следует, например, что при столкновении двух одинаковых автомобилей, один из которых неподвижен, а другой движется по направлению к нему, половина кинетической энергии идёт на разрушение.

3.12.2 Упругие столкновения

Пример 11. На гладкой горизонтальной поверхности лежит гладкий шар массой *M*. На него налетает гладкий шар того же радиуса массой m, движущийся со скоростью $\vec{\boldsymbol{v}}$. Происходит упругий центральный удар шаров. Найдите скорости $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ шаров после соударения. При каком условии налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении?

Решение. Задачу рассмотрим в ЛСО, ось *Ox* которой направим по линии центров шаров в момент соударения. Внешние силы, действующие на шары в процессе соударения, это силы тяжести и силы нормальной реакции опоры. Их сумма равна нулю. Следовательно, импульс системы шаров в процессе взаимодействия не изменяется. По закону сохранения импульса $m\vec{\boldsymbol{v}}=\mathrm{m}\vec{\boldsymbol{v}}_1 + M\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Переходя к проекциям на ось *Ox*, получаем $mv=mv_{1x}+Mv_2$, здесь учтено, что направление скорости налетающего шара после соударения не известно. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}.$$

Полученные соотношения перепишем в виде

$$m(v-v_{1x})=Mv_2,$$
$$m(v^2-v_{1x}^2)=Mv_2^2.$$

Разделив второе равенство на первое ($v\neq v_{1x}$), приходим к линейной системе $v_2=v+v_{1x}$, $m(v-v_{1x})=Mv_2$, решение которой имеет вид

$$v_{1x}=\frac{m-M}{m+M}v,$$
$$v_2=\frac{2m}{m+M}v.$$

Налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении ($v_{1x}>0$) при $m>M$, т.е. если масса налетающего шара больше массы покоящегося шара.

Пример 12. Две гладкие упругие круглые шайбы движутся поступательно по гладкой горизонтальной поверхности. Скорости $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ шайб непосредственно перед соударением известны и показаны на рис. 3.15. Найдите скорости $\vec{\boldsymbol{v}}_1'$ и $\vec{\boldsymbol{v}}_2'$ шайб после абсолютно упругого нецентрального соударения. Массы шайб m_1 и m_2.

Решение. Задачу рассмотрим в ИСО, оси координат *Ox* и *Oy* которой лежат в горизонтальной плоскости, при этом ось *Ox* направлена по линии центров шайб в момент соударения.

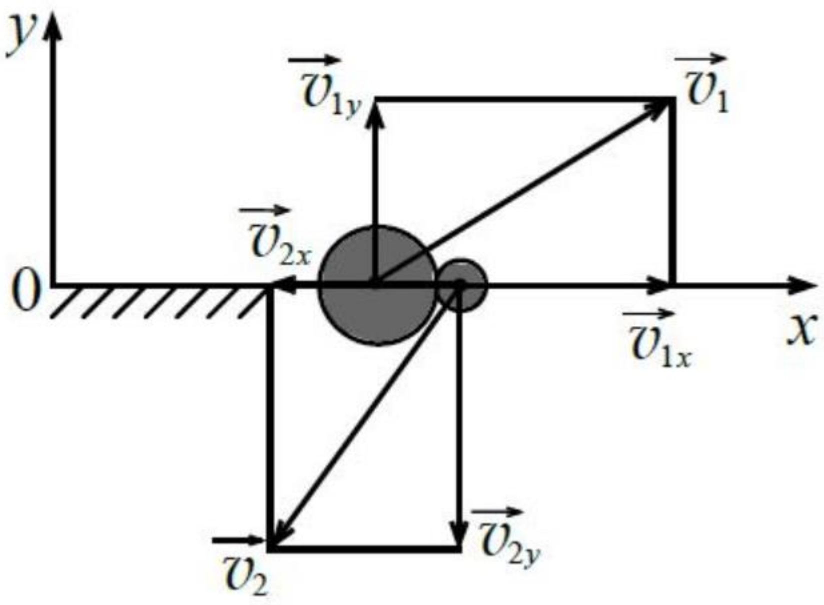


Рис. 3.15.

В течение времени соударения на систему шайб действуют только вертикальные внешние силы: это силы тяжести и силы нормальной реакции. Их сумма равна нулю. Тогда импульс системы шайб в процессе взаимодействия сохраняется:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2',$$

Здесь $\vec{p}_1 = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2$, $\vec{p}_1' = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1'$, $\vec{p}_2' = m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2'$ – импульсы шайб до и после соударения. Так как шайбы идеально гладкие, то в процессе соударения внутренние силы – силы упругого взаимодействия – направлены только по оси *Ox*. Эти силы не изменяют *y*–составляющие импульсов шайб. Тогда из $p_{1y} = p_{1y}'$, $p_{2y} = p_{2y}'$ находим *y*–составляющие скоростей шайб после соударения:

$$v_{1y}' = v_{1y}, v_{2y}' = v_{2y},$$

т.е. в проекции на ось *Oy* скорости шайб в результате соударения не изменились. Найдём *x*–составляющие скоростей шайб после упругого соударения. При таком соударении сохраняется кинетическая энергия

$$\frac{m_1(v_{1x}^2+v_{1y}^2)}{2}+\frac{m_2(v_{2x}^2+v_{2y}^2)}{2}=\frac{m_1(v_{1x}'^2+v_{1y}'^2)}{2}+\frac{m_2(v_{2x}'^2+v_{2y}'^2)}{2}.$$

С учётом равенства *y*–составляющих скоростей шайб до и после соударения последнее равенство принимает вид:

$$\frac{m_1v_{1x}^2}{2}+\frac{m_2v_{2x}^2}{2}=\frac{m_1v_{1x}'^2}{2}+\frac{m_2v_{2x}'^2}{2}.$$

Обратимся к закону сохранения импульса и перейдём к проекциям импульсов шайб на ось *Ox*:

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1v_{1x}'+m_2v_{2x}'.$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче об абсолютно упругом центральном ударе: именно такой вид приняли бы законы сохранения энергии и импульса, если бы скорости шайб были направлены по линии центров. Полученную нелинейную систему уравнений можно свести к линейной. Для этого следует (как и в предыдущей задаче) в обоих уравнениях по одну сторону знака равенства объединить слагаемые, относящиеся к первой шайбе, а по другую – ко второй, и разделить ($v_{1x}\neq v_{1x}'$) полученные соотношения. Это приводит к линейному уравнению

$$v_{1x}+v_{1x}'=v_{2x}+v_{2x}'.$$

Решая систему из двух последних уравнений, находим

$$v_{1x}'=\frac{(m_1-m_2)v_{1x}+2m_2v_{2x}}{m_1+m_2},$$

$$v_{2x}'=\frac{2m_1v_{1x}+(m_2-m_1)v_{2x}}{m_1+m_2}.$$

Полученные соотношения для v_{1x}', v_{1y}' и v_{2x}', v_{2y}' решают вопрос о проекциях и величинах скоростей шайб после соударения

$$v_1'=\sqrt{(v_{1x}')^2+(v_{1y}')^2},\quad v_2'=\sqrt{(v_{2x}')^2+(v_{2y}')^2}$$

а также об углах α_1 и α_2, которые векторы скорости $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ образуют с положительным направлением оси *Ox*,

$$tg\,\alpha_1 = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'}, \qquad tg\,\alpha_2 = \frac{v_{2y}'}{v_{2x}'}$$

Построенное в общем виде решение задач упругого центрального и нецентрального соударений открывает дорогу к анализу целого ряда задач, для которых рассмотренная модель соответствует характеру взаимодействия тел (частиц). Приведём пример.

Пример 13. Гладкая круглая шайба массой m_1 движется со скоростью $\vec{v}$ вдоль хорды, расстояние до которой от центра гладкого тонкого однородного обруча равно *R/2*.

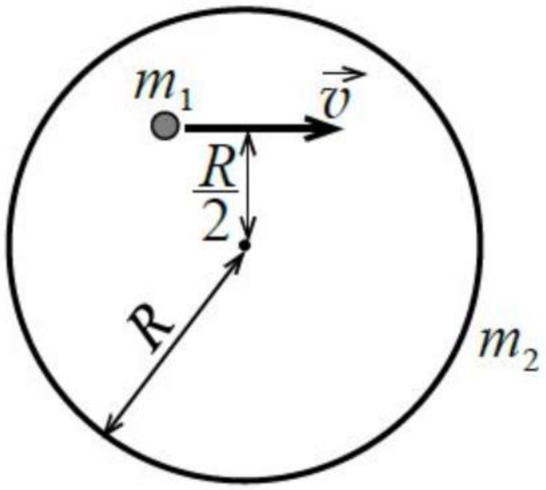


Рис. 3.16.

Обруч массой m_2 и радиусом R лежит на гладком горизонтальном столе. Через какое время τ после первого удара шайба окажется на минимальном расстоянии от центра движущегося обруча? Каково это расстояние? Удар считайте абсолютно упругим.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем примере. В ЛСО, ось *Ox* которой направлена по линии центров шайбы и обруча в момент соударения, проекции скоростей шайбы и центра обруча на ось *Ox* после соударения равны соответственно

$$v'_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2},$$

$$v'_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}.$$

здесь $v_{1x} = v \cdot cos\frac{\pi}{6}$ – проекция скорости шайбы на ось *Ох* до соударения, v_{2x} =0 – обруч до соударения покоился. Из этих соотношений следует, что в системе отсчёта, связанной с обручем, проекция скорости шайбы на линию центров после соударения

$$v_{1x\ \text{отн}} = v'_{1x} - v'_{2x} = -v_{1x} = -v \cdot cos\frac{\pi}{6}$$

просто изменила знак, а перпендикулярная линии центров составляющая, как было показано, в рассматриваемом соударении не изменяется. Следовательно, в системе, связанной с обручем, шайба отразится по закону «угол падения равен углу отражения», и минимальное расстояние от шайбы до центра обруча снова будет равно *R/2*. Искомое время

$$\tau = \frac{R \cdot cos^2\frac{\pi}{6}}{|v_{1x\ \text{отн}}|} = cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{R}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{v}.$$

3.13. Удар тела о неподвижную поверхность

3.13.1. Прямой центральный удар

Центр масс тела до удара лежит на общей нормали *n* тела и неподвижной поверхности, скорость тела до удара направлена по этой нормали (рис. 3.17*, а*).

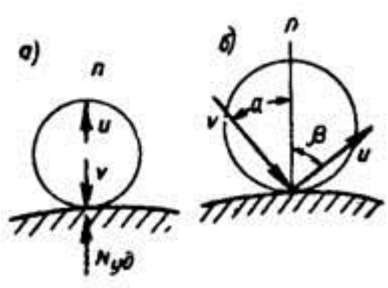


Рис. 3.17.

Ударной силой является мгновенная нормальная реакция поверхности $N_{уд}$. Удар разделяется на две фазы:

первая фаза: от момента прикосновения тела к поверхности до момента полной остановки тела в деформированном состоянии. Ударный импульс за время первой фазы:

$$\vec{S}'_{\text{уд}} = \int_0^{\tau_1} \vec{N}_{\text{уд}} dt = m\vec{v},$$

где m – масса тела; $0 \le t \le \tau_1$ – длительность фазы;

вторая фаза: от конца первой фазы до момента, когда тело, частично восстановившее под действием упругих сил свою форму, отделяется от неподвижной поверхности со скоростью u. Ударный импульс за время второй фазы

$$\vec{S}''_{\text{уд}} = \int_{\tau_1}^{\tau} \vec{N}_{\text{уд}} dt = m\vec{u},$$

где $\tau_1 \le t \le \tau$ – длительность фазы; τ – длительность удара. Для скоростей u и v, а также для импульсов $S''_{уд}$ и $S'_{уд}$ имеет место соотношение

$$\frac{u}{v} = \frac{S''\text{уд}}{S'\text{уд}} = k,$$

где k – коэффициент восстановления (определяется экспериментально для каждой пары веществ, из которых изготовлены соударяющиеся тела).

3.13.2. Экспериментальное определение коэффициента восстановления

Шарик из испытуемого вещества роняют с высоты H без начальной скорости на плиту из того же вещества и замеряют высоту отскока h

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

Предельные случаи: $k=0$ – неупругий удар (вторая фаза удара отсутствует); $k=1$ – абсолютно упругий удар (тело после удара полностью восстанавливает свою скорость и форму). Для реальных веществ $k<1$. Например, для стали $^5/_9$, для слоновой кости $^8/_9$, для стекла $^{15}/_{16}$.

3.13.3. Косой удар о неподвижную поверхность

Скорость тела до удара v направлена под углом падения α к общей нормали n тела и поверхности (рис. 3.17,б). После удара тело отскакивает от неподвижной поверхности со скоростью u под углом отражения β к общей нормали h. Между скоростями u и v и между углами α и β имеет место соотношение:

$$tg\beta = \frac{1-\lambda}{k} tg\alpha;$$

$$u = v\sqrt{k^2 + [(1-\lambda)^2 - k^2]sin^2\alpha}.$$

где λ – коэффициент мгновенного трения, определяемый экспериментально (часто полагают $\lambda=0$).

3.14. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O' остаются неподвижными, называется ***вращательным движением*** вокруг неподвижной оси, а неподвижную прямую OO' называют ***осью вращения***. Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO' (рис. 3.18).

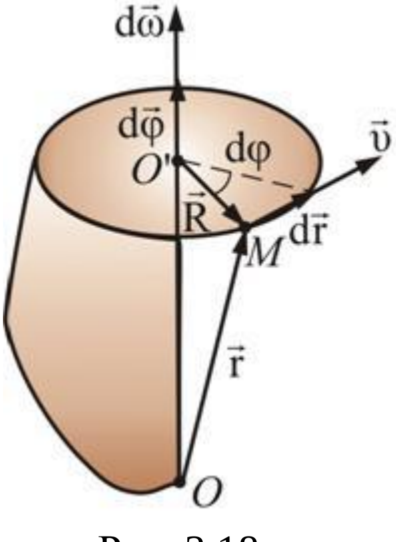


Рис. 3.18.

Проследим за некоторой точкой *M* этого твердого тела. За время *dt* точка *M* совершает элементарное перемещение ***dr***. При том же самом угле поворота $d\varphi$, другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояние, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела, ни первая производная $\frac{dr}{dt}$, ни вторая производная $\frac{d^2r}{dt^2}$ не могут служить характеристикой движения всего твердого тела. За это же время dt радиус-вектор $\vec{R}$, проведенный из точки *O*' в точку *M*, повернется на угол *d*φ. На такой же угол повернется радиус-вектор любой другой точки (т.к. тело абсолютно твердое, в противном случае расстояние между точками должно измениться). Угол поворота *d*φ характеризует перемещение всего тела за время *dt*. Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный *d*φ и направленный вдоль оси вращения *OO*' так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны «правилом буравчика»). Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов: $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$.

Угловой скоростью называется вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Если ω=*const*, то имеет место равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть *v* – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени *dt* точка *M* проходит путь *dr=vdt*. В то же время *dr=Rdφ* (*dφ* – центральный угол). Тогда, можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \omega R.$$

В векторной форме $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$. Вектор $\vec{v}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$. Наряду с угловой скоростью вращения используют понятия периода и частоты вращения.

Период *T* – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот (т.е. поворот на угол $\varphi=2\pi$).

Частота ν – число оборотов тела за 1 секунду. При вращении с угловой скоростью ω имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad v = \frac{1}{T}.$$

Введем вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ для характеристики неравномерного вращения тела:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$, а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$ (рис. 3.19).

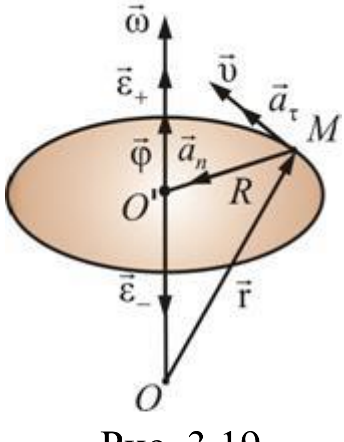


Рис. 3.19.

Как и любая точка твердого тела, точка *M* имеет нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Выразим нормальное и тангенциальное ускорение точки *M* через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Обратите внимание. Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота), направлены вдоль оси вращения. Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

равномерное вращение: $\varepsilon=0$; $\omega=const$; $\varphi=\varphi_0\pm\omega t$;

равнопеременное вращение: $\varphi = \varphi_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

3.15. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение тела называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси***. Прямая, соединяющая две неподвижные точки тела, называется ***осью вращения*** этого тела.

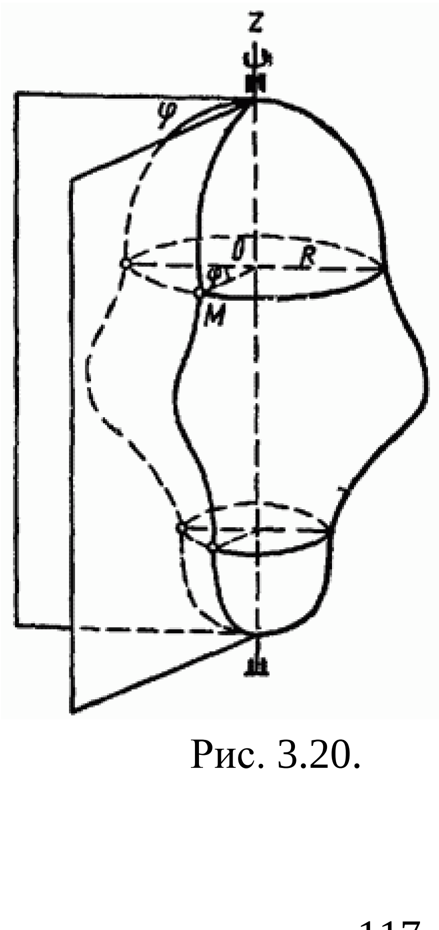


Рис. 3.20.

Если выбраны две плоскости, проходящие через ось вращения, причем одна из них неподвижна, а вторая неизменно связана с вращающимся телом, то угол φ между этими двумя плоскостями, измеряемый в радианах и отсчитываемый в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, определяет положение тела в любой момент времени t и является непрерывной однозначной функцией времени (рис. 3.20), т.е.

$$\varphi = f(t). \tag{3.15.1}$$

Равенство (3.15.1) называется уравнением, или законом, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угол $\varphi-\varphi_0$ называется ***углом поворота***, или ***угловым перемещением*** тела. Первая и вторая производные по времени от угла φ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением тела и обозначаются буквами ω и ε, т.е.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t), \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = f''(t). \tag{3.15.2}$$

При этом

$$[\varepsilon] = \frac{радиан}{сек^2} = \frac{1}{сек^2} = сек^{-2}.$$

Если число оборотов в минуту вращающегося тела равно n, то

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{3.15.3}$$

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основных типа:

1) определение углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения тела,

2) определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела,

3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому.

3.15.1. Определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения вращающего твердого тела

Если $\omega=const$ и, следовательно, $\varepsilon=0$, то вращение тела называется ***равномерным***, в этом случае

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{3.15.4}$$

Если $\varepsilon=const$, то вращение тела называется ***равномерно переменным***; в этом случае

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{3.15.5}$$

Если $\omega_0>0$, то при $\varepsilon>0$ вращение тела – ***равноускоренное***, а при $\varepsilon<0$, вращение тела – ***равнозамедленное***.

Пример 14. С момента выключения мотора пропеллер аэроплана, вращавшийся с угловой скоростью, соответствующей $n=1200$ *об/мин*, сделал до остановки 80 оборотов. Найти, сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки пропеллера, считая его вращение равномерно замедленным.

Решение. Так как вращение пропеллера равномерно замедленное, то по формулам (5), считая $\varphi_0=0$, будем иметь:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2},$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

причем

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \, \frac{1}{сек}.$$

Так как пропеллер сделал 80 оборотов, то угол поворота равен $\varphi=80\cdot2\pi=160\pi$ *рад*. Так как, кроме того, в момент остановки угловая скорость пропеллера равна нулю, то $\omega=0$. Таким образом, получаем два уравнения:

$$40\pi t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 160\pi,$$
$$40\pi + \varepsilon t = 0.$$

Отсюда находим:

$$\varepsilon = -\frac{40\pi}{t}, \qquad 40\pi t - \frac{40\pi}{t}\frac{t^2}{2} = 160\pi;$$

следовательно,

$$t = \frac{160\pi}{20\pi} = 8 \text{ сек.}$$

Пример 15. В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону

$$\varphi = \frac{\pi}{4} t^3.$$

определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в момент, когда он сделает 27 оборотов.

Решение. По формулам (3.15.2) находим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4}\pi t^2,$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{2}\pi t.$$

Далее находим, в какой момент времени t угол поворота φ будет равен $27 \cdot 2\pi = 54\pi$ *рад*:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} t^3 = 54\pi,$$

отсюда

$$t = \sqrt[3]{54 \cdot 4} = 6 \text{ сек.}$$

Угловая скорость и угловое ускорение в этот момент будут равны:

$$\omega = \frac{3}{4}\pi \cdot 6^2 = 27\pi \frac{1}{\text{сек}},$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\pi \cdot 6 = 9\pi \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

3.15.2. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося твердого тела

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то любая его точка, не лежащая на оси вращения, описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к этой оси, а скорость и ускорение точки определяются по формулам:

$$v = R\omega, \quad w_\tau = R\varepsilon, \quad w_n = R\omega^2, \quad w = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad (3.15.6)$$

где R – расстояние движущейся точки от оси вращения. Векторы скорости $\vec{v}$ и касательного ускорения $\vec{\omega}_\tau$ направлены по касательной к окружности, описываемой данной точкой тела, а вектор нормального ускорения $\vec{\omega}_n$ направлен по радиусу этой окружности к ее центру. Если вращение тела ускоренное, то векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}_\tau$ направлены в одну и ту же сторону; в случае же замедленного вращения – в противоположные стороны. Если тело вращается равномерно, то *ω=const*, следовательно, в этом случае *v=const, ε=0,* $\omega_\tau = 0$ и

$$\overline{w} = \overline{w}_n,$$

т.е. вектор ускорения $\vec{\omega}$ совпадает в этом случае с нормальным (центростремительным) ускорением.

Пример 16. Колесо радиуса *R=1* вращается равномерно вокруг своей оси, делая один оборот за 0,25 сек. Найти скорость и ускорение точки, лежащей на ободе колеса.

Решение. Так как колесо вращается равномерно, то согласно формуле (3.15.4)

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

Но за время *t=0,25сек* угол поворота колеса равен

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi \ \textit{рад},$$

поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{0,?5} = 8\pi \frac{1}{\textit{сек}}.$$

Далее по формуле (3.15.6) будем иметь:

$$v = R\omega = 1 \cdot 8\pi \ \textit{м/сек} \approx 25,12 \ \textit{м/сек},$$
$$w = w_n = R \cdot \omega^2 = 1 \ \ 64\pi^2 = 631,04 \ \textit{м/сек}$$

Пример 17. Вал начинает вращаться с угловой скоростью

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{\textit{сек}}$$

равноускоренно и за *10сек* делает *30* оборотов. Найти ускорение точки, отстоящей от оси вращения вала на расстоянии, равном *0,5м*, в тот момент, когда скорость этой точки равна *2π м/сек*.

Решение. Для определения углового ускорения вала воспользуемся формулами (3.15.5), считая φ_0*=0*:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Но при $t=10 сек$ угол поворота равен $\varphi = 30 \cdot 2\pi = 60\pi\, рад$, а потому

$$2\pi 10 + 50\varepsilon = 60\pi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{40\pi}{50} = 0{,}8\pi\,\frac{1}{сек^2}.$$

Далее по формулам (3.15.6) находим:

$$w = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}5\sqrt{0{,}64\pi^2 + \omega^4} \quad \text{и} \quad v = R\omega = 0{,}5\omega.$$

В тот момент, когда $v=2\pi\, м/сек$, имеем:

$$\omega = \frac{v}{0{,}5} = 4\pi\,\frac{1}{сек} \quad \text{и} \quad w = 0{,}5\sqrt{0{,}64\pi^2 + 4^4\pi^4} =$$
$$= 4\pi\sqrt{4\pi^2 + 0{,}01} \cong 8\pi^2 = 79\ м/сек^2.$$

Пример 18. Вал вращается в подшипниках вокруг неподвижной горизонтальном оси по закону $\varphi = \frac{\pi}{16} sin\frac{3}{4}\pi t$, где φ – угол поворота вала в радианах. Определить скорость и ускорение точки *M* вала, отстоящей от оси вращения на расстоянии *r=0,8м* в тот момент, когда угловая скорость вала достигает наибольшего абсолютного значения.

Решение. Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение вала по формулам (3.15.2):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3}{4}\pi\cos\frac{3}{4}\pi t = \frac{3\pi^2}{64}\cos\frac{3}{4}\pi t\ сек^{-1},$$
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{9\pi^3}{256}\sin\frac{3}{4}\pi t\ сек^{-2}.$$

Теперь по формулам (3.15.6) получим:

$$v = r\omega = \frac{3\pi^2}{64} r\cos\frac{3}{4}\pi t,$$
$$w_\tau = r\varepsilon = \frac{-9\pi^3}{256} r\sin\frac{3}{4}\pi t,$$
$$w_n = r\omega^2 = \frac{9\pi^4}{64^2} r\cos^2\frac{3}{4}\pi t.$$

Угловая скорость ω достигает наибольшего абсолютного значения в момент t, когда $\left|cos\frac{3}{4}\pi t\right|$=1, отсюда $\frac{3}{4}\pi t_1 = k\pi$, т.е. $t_1 = \frac{4}{3}k$, где

k=0, 1, 2, 3, …, следовательно, $t_1 = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \ldots, сек$. В эти моменты имеем:

$$v_{\max} = \frac{3\pi^2}{64} r = 0{,}8\,\frac{3\pi^2}{64} = \frac{0{,}3\pi^2}{8} \approx 0{,}37 \text{ м/сек},$$

$$w_{\tau_1} = 0, \quad w_1 = w_{n_1} = \frac{9\pi^4}{64^2}\,0{,}8 = \frac{0{,}9}{8}\,\pi^4 \approx 10.94 \text{ м/сек}^2.$$

3.16. Кинематика вращательного движения

Поворот тела на некоторый угол φ можно задать в виде отрезка, длина которого равна φ, а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот.

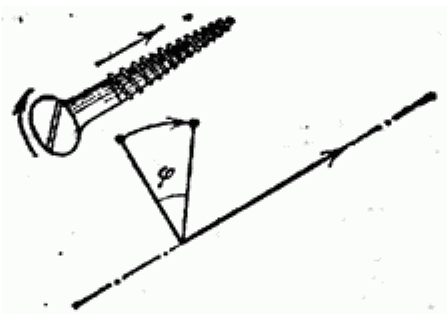


Рис. 3.21.

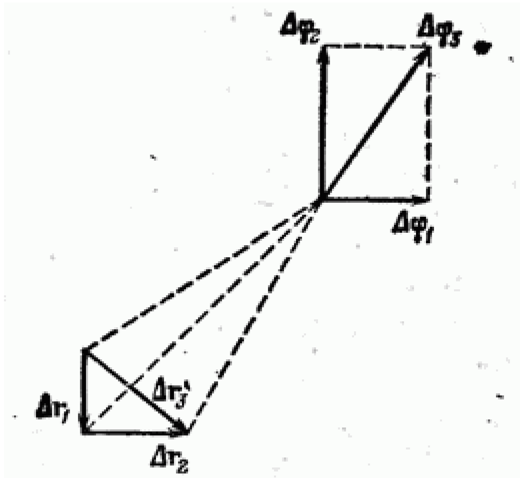


Рис. 3.22.

Для того чтобы указать, в какую сторону совершается поворот вокруг данной оси, связывают направления поворота и изображающего его отрезка ***правилом правого винта***: направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него (рис. 3.21), мы видели поворот совершающимся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя). Ранее было показано, что повороты на конечные углы складываются не по правилу параллелограмма и поэтому не являются векторами. Иначе обстоит дело для поворотов на очень малые углы Δφ. Путь, проходимый любой точкой тела при очень малом повороте, можно считать прямолинейным (рис. 3.22).

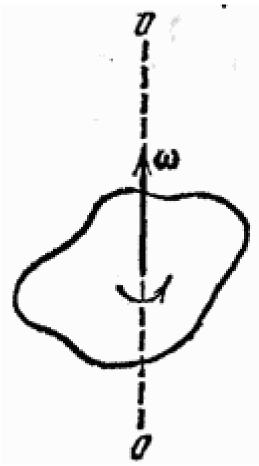


Рис. 3.23.

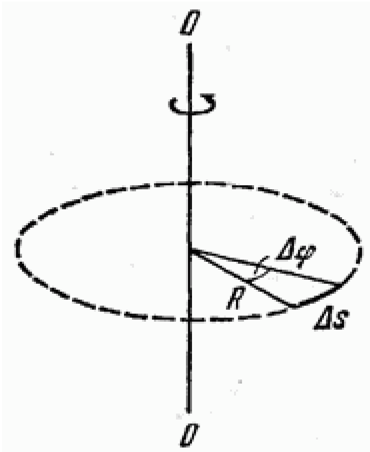


Рис. 3.24.

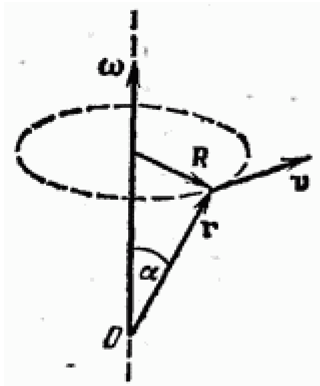


Рис. 3.25.

Поэтому два совершаемых последовательно малых поворота $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ обусловливают, как видно из рисунка, такое же перемещение $\Delta\boldsymbol{r}_3=\Delta\boldsymbol{r}_1+\Delta\boldsymbol{r}_2$ любой точки тела, как и поворот $\Delta\varphi_3$ получаемый из $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ сложением по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что очень малые повороты можно рассматривать как векторы (мы будем эти векторы обозначать символами $\Delta\varphi$ или $d\varphi$). Направление вектора поворота связывается с направлением вращения тела. Следовательно, $d\varphi$ является не истинным вектором, а псевдовектором. Векторная величина

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \qquad (3.16.1)$$

(где Δt – время, за которое совершается поворот $\Delta\varphi$) называется ***угловой скоростью*** тела. Угловая скорость направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 3.23), и представляет собой псевдовектор. Модуль угловой скорости равен $d\varphi/dt$. Вращение с постоянной угловой скоростью называется ***равномерным***. Если вращение является равномерным, то $\omega=\varphi/t$, где φ – конечный угол поворота за время t (ср. с $v=s/t$). Таким образом, при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени. Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T, под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Поскольку промежутку времени $\Delta t=T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi=2\pi$, то

$$\omega=2\pi/T, \tag{3.16.2}$$

откуда

$$T=2\pi/\omega. \tag{3.16.3}$$

Число оборотов в единицу времени ν, очевидно, равно

$$\nu=1/T=\omega/2\pi. \tag{3.16.4}$$

Из (3.16.4) следует, что угловая скорость равна 2π умноженным на число оборотов в единицу времени:

$$\omega=2\pi\nu. \tag{3.16.5}$$

Понятия периода обращения и числа оборотов в единицу времени можно сохранить и для неравномерного вращения, понимая под мгновенным значением T то время, за которое тело совершило бы один оборот, если бы оно вращалось равномерно с данным мгновенным значением угловой скорости, а под ν понимая то число оборотов, которое совершало бы тело за единицу времени при аналогичных условиях. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по величине), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае $\boldsymbol{\omega}$ изменяется по направлению). Пусть за время Δt вектор $\boldsymbol{\omega}$ получает приращение $\Delta\boldsymbol{\omega}$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной

$$\boldsymbol{\beta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \tag{3.16.6}$$

которую называют ***угловым ускорением***. Угловое ускорение, как и угловая скорость, является псевдовектором. Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости v. Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости v определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рис.

3.24). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, проходит при этом путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega R. \qquad (3.16.7)$$

Формула (3.16.7) связывает модули линейной и угловой скоростей. Найдем выражение, связывающее векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Положение рассматриваемой точки тела будем определять радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным из лежащего на оси вращения начала координат O (рис. 3.25). Из рисунка видно, что векторное произведение $[\boldsymbol{\omega r}]$ совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{v}$ и имеет модуль, равный $\omega r \cdot sin\alpha = \omega R$. Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \qquad (3.16.8)$$

Модуль нормального ускорения точек вращающегося тела равен $|\boldsymbol{\omega}_n| = v^2/R$. Подставив сюда значение v из (3.16.7), получим:

$$|\mathbf{w}_n| = \omega^2 R. \qquad (3.16.9)$$

Если ввести перпендикулярный к оси вращения вектор $\boldsymbol{R}$, проведенный в данную точку тела (см. рис. 3.25), соотношению (3.16.9) можно придать векторный вид:

$$\mathbf{w}_n = -\omega^2 \mathbf{R}. \qquad (3.16.10)$$

Минус в этой формуле стоит потому, что векторы $\boldsymbol{\omega}_n$ и $\boldsymbol{R}$ имеют противоположные направления. Предположим, что ось вращения тела не поворачивается в пространстве. Модуль тангенциального ускорения равен $|dv/dt|$. Воспользовавшись соотношением (3.16.7) и учитывая, что расстояние рассматриваемой точки тела от оси вращения $R = const$, можно написать:

$$|\mathbf{w}_\tau| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = R\beta,$$

где β – модуль углового ускорения. Следовательно, модуль тангенциального ускорения связан с модулем углового ускорения соотношением

$$|\mathbf{w}_\tau| = \beta R. \qquad (3.16.11)$$

Таким образом, нормальное и тангенциальное ускорения растут линейно с увеличением расстояния точки от оси вращения.

ГЛАВА IV. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

4.1. Механическая система и ее характеристики. Теорема о движении центра масс

4.1.1 Механическая система

Материальная точка является одной из основных моделей материальных тел в динамике. Однако во многих случаях ее недостаточно, поэтому наряду с материальной точкой в динамике рассматривают более общую модель – систему материальных точек. ***Системой материальных точек*** или ***механической системой*** называется выделенная каким-либо образом совокупность материальных точек.

4.1.2. Масса и центр масс системы

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_N$ – массы материальных точек, входящих в систему. Сумма масс

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

называется ***массой системы***, а геометрическая точка $\vec{r}_C$ радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

– ***центром масс системы***. Здесь $\vec{r}_C, \vec{r}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ радиусы-векторы центра масс и материальных точек системы, проведенные из некоторого общего начала отсчета O. Пусть система находится в однородном поле силы тяжести. Тогда, умножая числитель и знаменатель последней формулы на ускорение g силы тяжести, получим:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{Mg}\sum_{k=1}^{N} m_k g \vec{r}_k = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k \vec{r}_k,$$

где $P_k = m_k g$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ – силы веса материальных точек системы, P – вес всей системы. Мы пришли к формуле, по которой в статике определяется положение центра тяжести. Отсюда следует вывод: если механическая система находится в однородном поле силы тяжести, то существует понятие центра тяжести, и центр масс совпадает с центром тяжести системы. Поэтому все способы определения положения центра тяжести, ранее рассмотренные в статике, могут применяться при определении положения центра масс. Для координат центра масс в некоторой системе координатных осей $Oxyz$, проектируя на эти оси векторную формулу для $\vec{r}_C$, получаем:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k z_k.$$

Здесь x_k, y_k, z_k – координаты материальных точек системы. Масса M и радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C$ являются важными характеристиками инертных свойств системы, но полностью эти свойства не определяют. Для полной характеристики инертных свойств системы требуется указать еще моменты инерции системы.

4.1.3. Момент инерции относительно оси

Пусть m_1, $m_2, \ldots,$ m_N – материальные точки рассматриваемой системы, l – произвольная ось, h_1, $h_2, \ldots,$ h_N – расстояния материальных точек до оси l (рис. 4.1). ***Моментом инерции J_l системы материальных точек относительно оси l называется сумма произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до этой оси***

$$J_l = \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2 = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \ldots + m_N h_N^2.$$

4.1.4. Моменты инерции относительно координатных осей

Пусть *Oxyz* – декартова система координат. Тогда могут быть определены моменты инерции относительно каждой из координатных осей (рис. 4.2):

$$J_x = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{ky}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + z_k^2);$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{kz}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

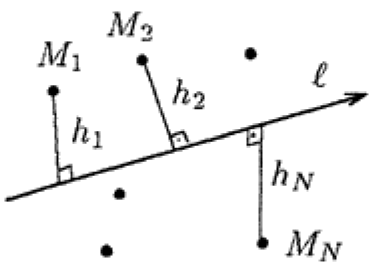


Рис. 4.1.

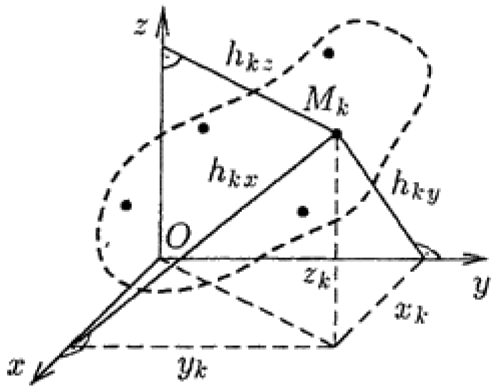


Рис. 4.2.

Кроме осевых моментов инерции в динамике системы возникает потребность еще в центробежных моментах инерции, определяемых формулами

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k; \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k.$$

Масса системы, расположение центра масс *C*, осевые и центробежные моменты инерции дают исчерпывающую характеристику материальных (инертных) свойств механической системы. Если инертные свойства материальной точки характеризуются единственной скалярной величиной – ее массой *m*, то в случае механической системы для этого требуется задать десять скалярных величин – массу системы *M*, три координаты центра масс – x_C, y_C, z_C, три осевых момента инерции – J_x, J_y, J_zи три центробежных момента J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}.

4.1.5. Моменты инерции твердого тела

Твердое тело можно мысленно представить состоящим из бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, которые можно рассматривать как материальные точки. В этом случае, переходя в приведенных формулах к пределам при $N\to\infty$ и заменяя суммирование интегрированием, получаем следующие формулы: для координат центра масс твердого тела

$$x_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} x\,dm;\quad y_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} y\,dm;\quad z_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} z\,dm;$$

для осевых и центробежных моментов инерции

$$J_x = \int_{(M)}(y^2+z^2)\,dm;\quad J_y = \int_{(M)}(x^2+z^2)\,dm;\quad J_z = \int_{(M)}(x^2+y^2)\,dm;$$

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy\,dm;\quad J_{yz} = \int_{(M)} yz\,dm;\quad J_{xz} = \int_{(M)} xz\,dm.$$

Здесь dm – масса выделенного элемента интегрирования; x, y, z – его координаты (координаты какой-либо точки внутри или на границе элемента), знаком (M) условно обозначено, что интегрирование проводится по всему объему тела.

4.1.6. Осевые моменты инерции некоторых твердых тел

Покажем применение приведенных формул на примере вычисления моментов инерции некоторых простых тел.

Моменты инерции стержня (материального отрезка)

Выберем начало координат в одном из концов стержня, ось x совместим с самим стержнем, оси y и z проведем перпендикулярно к нему (рис. 4.3). Пусть М – масса стержня, l – его длина. Полагая стержень однородным, введем линейную плотность $\rho=M/l=const$. Выделяем элемент интегрирования в виде участка стержня длиной

dx на расстоянии x от начала координат и вычисляем моменты инерции. Для момента инерции относительно оси x получаем

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2)\, dm = 0,$$

так как для элемента интегрирования имеем $y=0,\ z=0$. Сразу отметим, что это единственный пример механической системы, когда осевой момент инерции может обращаться в нуль. (Для дискретной механической системы ему соответствует случай, показанный на рис. 4.4.) Для моментов инерции относительно осей y, z находим:

$$J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2)\, dm = \int_{(M)} x^2\, dm = \int_{(M)} x^2 (\rho\, dx) = \rho \int_0^{\ell} x^2\, dx =$$
$$= \frac{M}{\ell} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\ell} = \frac{M\ell^2}{3}; \quad J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(M)} x^2\, dm = J_y.$$

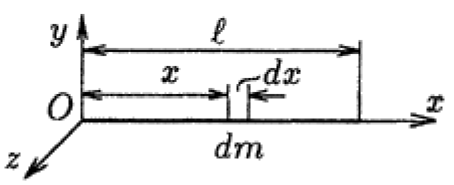


Рис. 4.3.

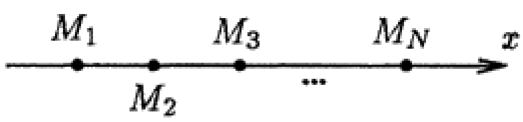


Рис. 4.4.

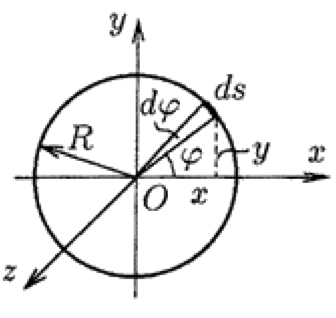


Рис. 4.5.

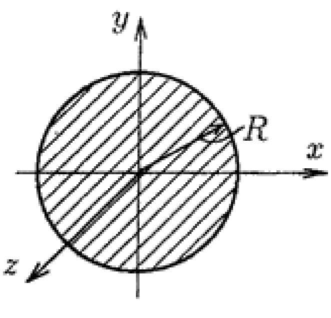


Рис. 4.6.

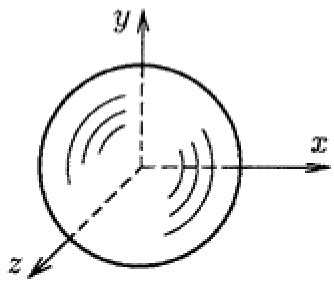


Рис. 4.7.

Момент инерции материальной окружности (тонкого кольца, обода)

Выделяем элемент интегрирования в виде отрезка дуги окружности длиной $ds=Rd\varphi$, вычисляем координаты элемента (рис. 4.5): $x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=0$. Полагая окружность однородной с линейной плотностью ρ ($\rho=M/2\pi R$), вычисляем моменты инерции:

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2)\, dm = \int_{(M)} y^2\, dm = \int_{(M)} (R\sin\varphi)^2 (\rho R\, d\varphi) =$$

$$= \rho R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \rho R^3 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \rho R^3 (\pi - 0) = \frac{M}{2\pi R} R^3 \pi = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2)\, dm = \int_{(M)} x^2\, dm = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(M)} (R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi)\rho R\, d\varphi =$$

$$= \rho R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = MR^2.$$

Приведем (без вычисления) формулы для осевых моментов инерции некоторых других тел.

Однородный круглый диск (рис. 4.6)

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}; \quad J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Однородный шар (рис. 4.7)

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Однородный круглый цилиндр (рис. 4.8)

$$J_x = J_y = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right); \quad J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

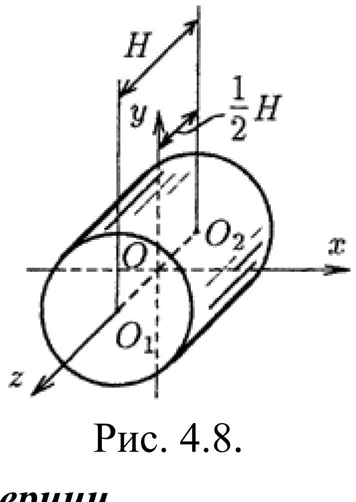


Рис. 4.8.

Радиус инерции

Осевые моменты инерции твердых тел иногда задают, указывая массу и радиус инерции тела. Радиусом инерции тела относительно данной оси l называется такое расстояние i, квадрат которого, умноженный на массу тела, равен моменту инерции тела относительно этой оси: $J_l=Mi^2$. Например, радиус инерции цилиндра относительно его продольной оси равен $R\sqrt{2}/2$, радиус инерции шара относительно любой его оси равен $R\sqrt{2}/\sqrt{5}$ и т.д.

4.1.7. Главные оси инерции

Кроме указанного выше единственного случая, осевые моменты инерции в нуль не обращаются и всегда положительны. Что же касается центробежных моментов инерции, то они могут быть положительными, отрицательными и принимать нулевые значения. Если два центробежных момента инерции, содержащие в обозначениях общий индекс некоторой оси, равны нулю, то эта ось называется ***главной осью инерции*** тела (в точке пересечения осей). Например, если имеем $J_{xz}=J_{yz}=0$, то ось z является главной осью инерции в точке O (начале координат). Если равны нулю все три центробежных момента инерции, то все три оси являются главными. Существует теорема, которая устанавливает, что в каждой точке тела можно найти как минимум три главные оси инерции. Главные оси, построенные в центре масс тела, называются ***главными центральными осями инерции***, а моменты инерции относительно этих осей ***главными центральными моментами инерции***.

4.1.8. Классификация сил, действующих на точки системы

Различают свободную и несвободную механическую систему. Если точки механической системы не ограничены в своих движениях (свободны от связей), то система называется ***свободной***. Если хотя бы на одну точку системы наложена связь, система называется ***несвободной***. Согласно принципу освобождаемости от связей, несвободную синему можно рассматривать как свободную, отбрасывая связи и заменяя их действие реакциями связей. Следовательно, в общем случае на точки механической системы могут действовать два вида сил – ***активные*** (задаваемые) силы и ***реакции связей***. Все действующие силы (активные силы и реакции связей) можно классифицировать и по-другому, разделяя их на силы ***внешние*** и силы ***внутренние***. ***Внешними*** называются силы, которые приложены к точкам системы со стороны материальных точек и тел, не входящих в состав системы. ***Внутренними*** силами называются силы взаимодействия между точками системы. В дальнейшем для равнодействующей внешних сил будем пользоваться обозначениями $\vec{F}_k^e$ $(k = 1, 2, \dots, N)$, для равнодействующей внутренних сил – $\vec{F}_k^i$ $(k = 1, 2, \dots, N)$.

4.1.9. Свойства внутренних сил

Внутренние силы всегда входят попарно и подчиняются третьему закону Ньютона. Если материальная точка M_k действует на материальную точку M_j силой $\vec{F}_{kj}$, то материальная точка M_j, в свою очередь, действует на точку M_k силой $\vec{F}_{jk}$ и имеет место равенство $\vec{F}_{kj}$=–$\vec{F}_{jk}$. Благодаря этому внутренние силы обладают следующими двумя свойствами.

Свойство 1. Главный вектор всех внутренних сил системы в любой момент времени равен нулю ($\vec{R}^i = 0$).

Свойство 2. Главный момент всех внутренних сил системы (относительно всякого выбранного центра O) в любой момент времени равен нулю ($\overrightarrow{M}_O^i$=0).

Однако отсюда вовсе не следует, что внутренние силы не влияют на движение системы. Это было бы так, если внутренние силы были бы уравновешенной системой сил. Однако они таковой не являются, поскольку приложены к разным точкам. Тем не менее, равенства $\vec{R}^i = 0$ и $\overrightarrow{M}_O^i$=0 в динамике системы играют важную конструктивную роль, так как позволяют исключить из уравнений движения системы внутренние силы, которые, как правило, заранее неизвестны.

4.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Для каждой точки механической системы можно составить дифференциальные уравнения движения по правилам динамики точки. Составляя дифференциальные уравнения в векторной форме, получаем

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1; \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2; \ldots; \quad m_N\ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N.$$

Эти уравнения называются векторными дифференциальными уравнениями движения механической системы. Проектируя эти уравнения на координатные оси *Oxyz*, получаем *3N* обычных (скалярных) дифференциальных уравнения движения

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx}; \quad m_k\ddot{y}_k = F_{ky}; \quad m_k\ddot{z}_k = F_{kz} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Если все действующие силы поделены на активные силы и реакции связей, то правые части векторных уравнений (равнодействующие сил, приложенных к отдельным точкам системы), имеют вид

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^a + \vec{R}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\vec{F}_k^a$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных к k–*ой* материальной точке системы, $\vec{R}_k$ – то же самое для реакций связей. При делении сил на внешние и внутренние эти же силы выражаются так:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Как реакции $\vec{R}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, так и внутренние силы $\vec{F}_k^i$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ наперед неизвестны, и с этим связаны большие трудности в определении движения системы посредством интегрирования ее дифференциальных уравнений движения. Лишь если эти силы удается исключить из уравнений движения, появляется возможность сформулировать некоторые общие закономерности, которым подчиняется движение системы.

4.3. Теорема о движении центра масс

Пусть все силы системы поделены на внешние и внутренние. Тогда дифференциальные уравнения движения системы запишутся в виде

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i;$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_N\ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i.$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i. \tag{4.3.1}$$

По свойству внутренних сил последнее слагаемое в этом равенстве равно нулю. Левая часть равенства равна произведению массы системы на ускорение ее центра масс, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{\vec{r}}_k = M\ddot{\vec{r}}_C.$$

В этом легко убедиться, дифференцируя дважды по времени выражение для радиуса-вектора центра масс

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{r}_k$$

и разрешая результат относительно суммы $\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{\vec{r}}_k$. В итоге равенство (4.3.1) принимает вид

$$M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e$$

или, в проекциях на неподвижные координатные оси:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^e; \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad M\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^e.$$

Получены дифференциальные уравнения, определяющие движение центра масс механической системы. Они выражают следующее правило, получившее название ***теоремы о движении центра масс механической системы***: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к точкам системы.

4.4. Законы сохранения движения центра масс

Отметим два важных следствия, вытекающие из теоремы о движении центра масс и называемые ***законами сохранения движения центра масс***.

1. Если на механическую систему не действуют внешние силы или геометрическая сумма внешних сил равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

2. Если сумма проекций внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось остается постоянной.

Из теоремы о движении центра масс также следует, что без участия внешних сил, одними лишь внутренними силами, невозможно изменить положение центра масс механической системы.

Пример 19. Прямолинейный стержень AB длиной l и массой m опирается своим нижним концом на гладкую горизонтальную плоскость и удерживается в равновесии под углом α нитью BD (рис. 4.9). В некоторый момент нить пережигают. Найти траекторию центра масс в возникающем после этого несвободном падении стержня.

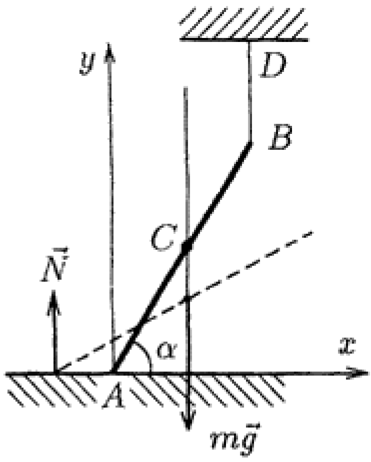


Рис. 4.9.

Решение. Совместим начало координат с начальным положением опорного конца A стержня, ось x направим горизонтально, ось y – вертикально вверх. После нарушения связи на стержень действуют две внешние силы – собственный вес $m\vec{g}$, приложенный в центре масс C, и нормальная реакция $\vec{N}$ опорной плоскости. Составим уравнения движения центра масс:

$$m\ddot{x}_C = 0; \quad m\ddot{y}_C = N - mg.$$

Начальные условия движения таковы:

$$t = 0; \quad x_C = \frac{\ell}{2}\cos\alpha; \quad y_C = \frac{\ell}{2}\sin\alpha;$$
$$\dot{x}_C = \dot{y}_C = 0.$$

Из первого уравнения, которое запишем в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = 0,$$

сразу же следует: $v_{C_x} = C_1 = const$. Подставляя сюда вместо v_{C_x}ее выражение dx_C/dt и снова интегрируя, находим $x_C = C_1t + C_2$. По начальным условиям находим $C_1 = 0,\ C_2 =(l/2)cos\alpha$. Следовательно, $x_C = const =(l/2)cos\alpha$. Это означает, что центр масс при падении стержня движется вдоль вертикальной прямой, проходящей через его начальное положение. Второе уравнение позволяет выразить (но не найти) динамическую реакцию опорной плоскости

$$N = mg + m\ddot{y}_C.$$

Полное решение задачи, для которого требуется еще найти реакцию N и второе уравнение движения центра масс (уравнение $y_C=y_C(t)$), одной теоремой о движении центра масс выполнить невозможно. Для этого следует дополнительно воспользоваться какой-либо из других общих теорем динамики – теоремой об изменении кинетического момента или теоремой об изменении кинетической энергии.

Вопросы для самопроверки

Что называется механической системой? В чем отличие свободных и несвободных механических систем?

Как определяются масса и центр масс механической системы?

Что называется моментом инерции механической системы относительно оси?

Приведите формулы для вычисления моментов инерции твердого тела. Что называется радиусом инерции?

Как классифицируются силы, приложенные к точкам механической системы? Сформулируйте свойства внутренних сил.

Запишите дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы (в векторной и скалярной форме).

Приведите словесную формулировку теоремы о движении центра масс.

В чем состоят законы сохранения движения центра масс?

Упражнение. Определить уравнение траектории конца В стержня в предыдущем примере.

4.5. Общие теоремы динамики

4.5.1. Теорема об изменении количества движения

Основные динамические величины механической системы

Из предыдущей лекции видно, что изучение движения механической системы не может основываться на детальном интегрировании ее дифференциальных уравнений движения. Такая задача слишком сложна и может быть реализована на практике только в исключительных случаях. Однако в той же лекции мы видели, что можно найти такие величины, общие для всей механической системы, изменение которых во времени позволяет сделать важные выводы о движении системы в целом. Одной из таких величин является центр масс системы. Этим же свойством обладают количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия механической системы, называемые ***основными динамическими величинами механической системы***. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$ – скорости точек движущиеся механической системы. Произведение массы материальной точки m_k на ее вектор скорости $\vec{v}_k$ называется количеством движения (импульсом) материальной точки. Для совокупности векторов количеств движения точек системы $m_1\vec{v}_1, m_2\vec{v}_2, \dots, m_N\vec{v}_N$, (рис. 4.10) можно определить главный вектор и главный момент. Главный вектор количеств движения точек механической системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

называется ***количеством движения механической системы***. Главный момент количеств движения точек механической системы относительно некоторого центра O

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$$

называется ***кинетическим моментом механической системы***.

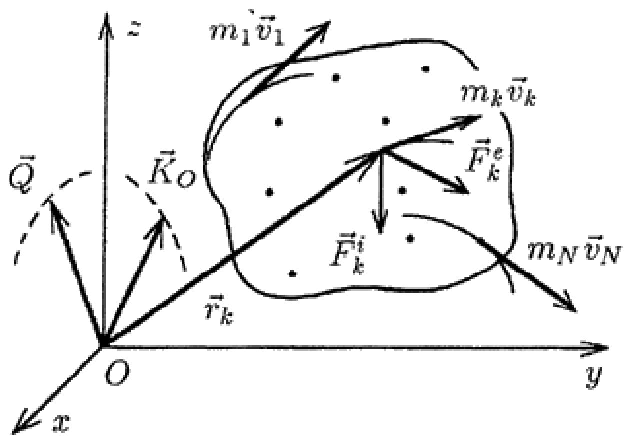


Рис. 4.10.

Скалярная величина

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2},$$

равная сумме кинетических энергий всех материальных точек механической системы, называется ***кинетической энергией системы***. Основные динамические величины называют также мерами механического движения. Количество движения $\vec{Q}$ и кинетический момент $\vec{K}_O$ являются векторными мерами, кинетическая энергия T – скалярной мерой.

4.5.2. Теорема об изменении количества движения

Рассматривается произвольная механическая система, состоящая из материальных точек M_1, $M_2, \ldots,$ M_N движущаяся под действием приложенных сил относительно некоторой инерциальной системы координат *Oxyz*. Если система несвободна, мысленно освобождаемся от связей, добавляя к задаваемым (активным) силам реакции связей. После этого все действующие силы (активные и реакции связей) разделяем на внешние и внутренние. Тогда равнодействующие $\vec{F}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ сил, приложенных к точкам системы, будут складываться из внешней и внутренней сил:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Запишем выражение для количества движения системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

и продифференцируем по времени обе части написанного равенства:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k.$$

Далее преобразуем последний член этого равенства, используя основное уравнение динамики и равенство нулю главного вектора внутренних сил:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i) = \vec{R}^e.$$

В результате для производной количества движения получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e.$$

Полученное равенство в математической форме выражает теорему об изменении количества движения механической системы: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору всех внешних сил. Проектируя это векторное равенство на координатные оси *Oxyz*, получаем математическое выражение теоремы в скалярной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e.$$

В этих формулах

$$Q_x = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kx}; \quad Q_y = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{ky}; \quad Q_z = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kz}$$

– проекции количества движения системы на координатные оси, а

$$R_x^e = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^e; \quad R_y^e = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad R_z^e = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^e$$

– проекции на эти же оси главного вектора внешних сил.

4.5.3. Законы сохранения количества движения

Отметим два следствия из теоремы, чрезвычайно полезные для качественных рассуждений и решения задач.

1. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то количество движения системы остается постоянным ($\vec{R}^e = 0 \to \dot{Q} = 0 \ \to \vec{Q} = \overrightarrow{const}$).

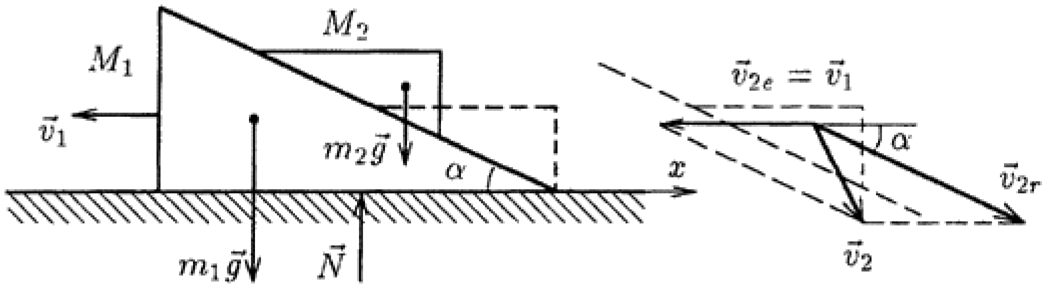


Рис. 4.11.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось не изменяется. (Пусть, например, R_x^e=0, тогда из теоремы, записанной в проекциях, следует $\dot{Q}_x$=0 и, далее, $Q_x = const$)

Следствия называются ***законами сохранения количества движения.*** Из теоремы следует также, что внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения.

Пример 20. На гладкой призме M_1 массой m_1 и углом α при вершине покоится призма M_2, масса которой равна m_2 (рис. 4.11). Предоставленные себе, призмы приходят в движение под действием сил тяжести. Найти скорость призмы M_2 относительно призмы M_1 в момент касания основания, если m_1=5*кг*, m_2=1*кг*, α=30^0, а скорость призмы M_1 в этот момент составляет 0,2*м/с*.

Решение. Примем за систему совокупность обеих призм. На систему действуют три внешние силы – веса призм $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и нормальная реакция основания $\vec{N}$. Силы перпендикулярны к опорной плоскости, поэтому их проекции на ось x равны нулю. Будет равна нулю и проекция главного вектора внешних сил на эту ось: $R_x^e = 0$. Следовательно, проекция количества движения на ось x остается при движении системы постоянной. Так как в начале движения обе призмы неподвижны, то это постоянное значение равно нулю:

$$Q_x = \text{const} = Q_{x0} = 0.$$

Получим выражение для определения Q_x. Прежде всего заметим, что в теореме об изменении количества движения участвуют абсолютные скорости точек системы. Рассматривая движение призмы M_2 как сложное, состоящее из переносного (движение призмы M_1) и относительного (движение призмы M_2 относительно призмы M_1), и применяя теорему сложения скоростей, для абсолютной скорости $\vec{v}_2$ призмы M_2 будем иметь выражение

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2e} + \vec{v}_{2r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2r},$$

где $\vec{v}_1$ – скорость призмы M_1 (абсолютная); v_{2r} – относительная скорость призмы M_2. Проектируя это векторное равенство на ось x, находим проекцию абсолютной скорости призмы M_2

$$v_{2x} = v_{1x} + v_{2rx} = -v_1 + v_{2r}\cos\alpha,$$

а далее и проекцию количества движения системы (при поступательном движении можно рассматривать тела как материальные точки)

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = -m_1 v_1 + m_2(-v_1 + v_{2r}\cos\alpha).$$

Отсюда, приравнивая Q_x нулю, находим

$$v_{2r} = \frac{(m_1 + m_2)v_1}{m_2\cos\alpha} = \frac{(5+1)\cdot 0{,}2}{1\cdot 0{,}866} = 1{,}38 \text{ м/с}.$$

4.5.4. О вычислении количества движения

Вычисление количества движения системы непосредственно по определяющей формуле

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$

становится затруднительным, если в системе содержится большое количество материальных точек. Получим более удобную формулу для вычисления $\vec{Q}$. Запишем формулу для радиуса-вектора центра масс системы

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k.$$

Продифференцируем это равенство по времени, умножим обе части на M. Так как $\dot{\vec{r}}_C = \vec{v}_C$, $\dot{\vec{r}}_k = \vec{v}_k$, ($k=1,2,\ldots, N$), в результате получаем:

$$M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k.$$

Откуда следует:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C,$$

т.е. количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость центра масс.

4.5.5. *Интегральная форма теоремы об изменении количества движения*

Теорему об изменении количества движения можно записать также в интегральной (конечной) форме. Пусть в начале и конце некоторого рассматриваемого интервала времени $[t_1,t_2]$, количество движения равно соответственно $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$. Умножим обе части равенства $\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e$ на dt и проинтегрируем на этом интервале:

$$\int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} d\vec{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^e\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e\,dt = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e\,dt.$$

Произведение вектора силы на бесконечно малый промежуток времени ее действия $\vec{F}_k dt$ называется ***элементарным импульсом силы*** $\vec{F}_k$. Интеграл от элементарного импульса на интервале $[t_1,t_2]$,

$$\vec{S}_k = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k\,dt$$

называется ***импульсом (полным импульсом) силы*** $\vec{F}_k$ на этом интервале. С использованием этого понятия теорема запишется в виде

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^e$$

и читается так: изменение механической системы за некоторый (конечный) промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени. Теорема в такой форме применяется при изучении удара твердых тел. Подставим в равенство

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e,$$

выражающее теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме, формулу

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C = M\frac{d\vec{r}_C}{dt},$$

служащую для вычисления количества движения, и расшифруем обозначение $\vec{R}^e$. В результате придем к равенству

$$M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e,$$

в точности совпадающему с математическим выражением теоремы о движении центра масс. Откуда следует, что теоремы об изменении количества движения системы и о движении центра масс вполне тождественны. Однако по способу выражения общего объективного содержания эти теоремы настолько отличаются, что считаются вполне самостоятельными теоремами динамики. Каждая из теорем имеет свою преимущественную область применения. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме применяется в механике сплошной среды, в интегральной форме – в теории удара твердых тел. Теорема о движении центра масс применяется в динамике твердого тела и системы твердых тел.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется основными динамическими величинами механической системы?

2. Как вычисляется количество движения механической системы? Его проекция на координатную ось?

3. Сформулируйте теорему об изменении количества движения (в векторной и координатной форме).

4. Какие следствия вытекают из этой теоремы?

5. Что называется элементарным и полным импульсом силы?

6. Приведите теорему об изменении количества движения в интегральной форме.

Упражнения

1. Найти количество движения диска массы $m=2кг$ в момент $t=1с$, если его центр C движется согласно уравнению $s=3t^3$, *м* (рис. 4.12).

2. Найти количество движения системы, изображенной на рис. 4.13, если скорость стержня равна v. Масса стержня m_1, масса каждого из катков m_2, проскальзывание между стержнем и катками, а также между основанием и катками отсутствует.

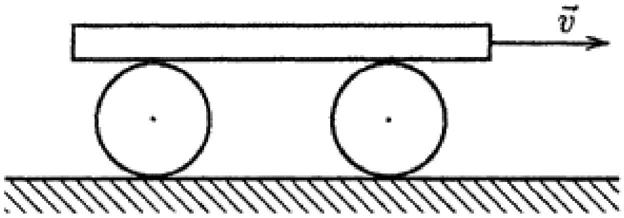


Рис. 4.12.

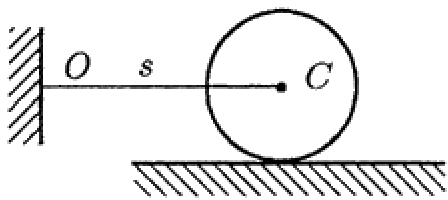


Рис. 4.13.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ташлыкова–Бушкевич И.И. Физика: Учебное пособие. В 2ч. Ч1: Механика. Молекулярная физика и термодинамика – Минск: БГУИР, 2006.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч 1. – М. :Наука, 1965.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч 2. – М. :Наука, 1966.
4. Букаткин Р.Н., Корнеев Д.В. Краткий курс лекций по теоретической механике. – Краснодар, 2012.
5. Березкин Е.Н. Лекции по теоретической механике. – Издательство московского университета: 1967.

Дополнительная

1. Березин А.В., Боброва З.А., Последович Н.Р. Механика. Колебания. Волны: Методические указания к решению задач по курсу «Физика». – Минск, БГУИР, 2010.
2. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. – Издательство московского университета: 1974.