1. Какое максимальное расстояние (в километрах) могут преодолеть за три часа три человека, имея один двухместный электроскутер? Скорость пешехода 5 км/ч, скорость электроскутера (без груза или с грузом) – 30 км/ч, максимальное расстояние на одном заряде – 90 км.

Ответ: $\frac{810}{19}$.

2. Найдите наименьшее действительное значение a, для которого существуют четыре натуральные числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+20)=(140-a)(a-80), \\ a\left(8u^2+2v^2-a\right)=\left(4u^2-v^2\right)^2. \end{cases}$$

Ответ: 100.

3. Найдите наибольшее действительное решение уравнения

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1.$$

Ответ: $17+\sqrt{257}$.

4. При каком наименьшем действительном значении a неравенство

$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x\geq 0$$

выполняется при всех действительных x?

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

5. Найдите произведение решений уравнения $(3x)^{3\log_6 2x-4}=2024\cdot x^{\log_6 x}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

6. Функция $f(n)$ определена для всех натуральных n и принимает целые неотрицательные значения. Известно, что $f(n)$ удовлетворяет условиям: а) $f(m+n)-f(m)-f(n)$ при любых m и n принимает значения 0 или 1; б) $f(2)=0$; в) $f(3)>0$; г) $f(9999)=3333$. Найдите $f(2024)$.

Ответ: 674.

7. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ при всех действительных значениях переменных x и y удовлетворяет равенству $f(x-0{,}25)+f(y-0{,}25)=f(x+[y+0{,}25]-0{,}25)$, где $[x]$ – целая часть числа x. Известно также, что $f(3)=4$. Найдите $f(5)$.

Ответ: $\frac{20}{3}$.

8. При повороте листа бумаги в его плоскости на 180° обозначения цифр 0, 1, 8 не изменяются, обозначения 6 и 9 переходят друг в друга, а запись остальных цифр теряет смысл. Сколько среди семизначных чисел, запись которых не изменяется при повороте листа бумаги на 180°, таких, которые делятся на четыре?

Ответ: 75.

9. Пусть $S=\{1,2,3,\ldots,280\}$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что любое n-элементное подмножество множества S содержит пять попарно взаимно простых чисел.

Ответ: 217.

10. Найдите наибольшее число областей, на которые рассекают круг отрезки, соединяющие девять точек, лежащих на его окружности.

Ответ: 163.

11. Дана бумажная полоска 1×2024. A и B играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает A. За один ход разрешается закрасить любую ещё не закрашенную клетку полоски в любой из двух цветов – красный или синий. Когда все клетки полоски закрашены, её разрезают на минимально возможное количество полосок так, чтобы все клетки каждой полоски были одного цвета. Какое максимальное количество таких полосок может гарантировать B вне зависимости от действий A?

Ответ: 1013.

12. В треугольник ABC со сторонами 3 см, 5 см и 7 см вписан круг и построены к нему касательные, параллельные сторонам данного треугольника. Эти касательные отсекают от данного треугольника ABC три новых треугольника. В каждый из таким образом построенных треугольников вписан круг. Вычислите сумму площадей (в см^2) всех четырёх кругов.

Ответ: $\frac{83\pi}{75}$.

13. Хорды AB и CD пересекаются в точке E внутри данной окружности. Пусть M – внутренняя точка отрезка BE, $AM : AB = 5 : 7$. Касательная в точке E к окружности, проходящей через точки D, E и M, пересекает прямые BC и AC в точках F и G соответственно. Найдите $EG : EF$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

14. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как $11 : 4$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

15. Высота цилиндра равна 3. Внутри цилиндра расположены три сферы единичного радиуса так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра (т. е. имеет с этой поверхностью одну общую точку). Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера – верхнего основания. Найдите радиус цилиндра.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$.

16. Вычислите определитель восьмого порядка с элементами $a_{ii} = 5$, $a_{ij} = 2$ при $i \neq j$.

Ответ: 41553.

17. Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ изображают числа 1 и i соответственно. Из точки O опущен перпендикуляр OA_2 на A_1B; из A_2 опущен перпендикуляр A_2A_3 на OA_1; из A_3 – перпендикуляр A_3A_4 на A_1A_2 и т. д. по правилу: из A_n перпендикуляр A_nA_{n+1} на $A_{n-2}A_{n-1}$. Найдите длину предела суммы векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots$.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

18. Найдите число диагоналей восьмимерного куба, ортогональных к данной диагонали.
Ответ: 35.

19. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

20. Пусть последовательность (a_n) такова, что при любом $n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n + a_n^2 + a_n^3 + \ldots + a_n^{100} - 100}{a_n - 1}$.

Ответ: 5050.

21. Найдите наименьшее возможное a такое, что для каждого квадратного трёхчлена $f(x)$, удовлетворяющего условию $|f(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$, выполняется неравенство $f'(0) \le a$.
Ответ: 8.

22. Пусть функция $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ такова, что $f(x)=y$, где $y\ge 1$ – единственное решение уравнения $y^y=x$. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_0^e f(e^x)\,dx$.

Ответ: $\dfrac{3e^2-1}{4}$.

23. Оператор $A: L_1[0,1]\to C[0,1]$ задан формулой $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 (e^t+e^{-s})x(s)\,ds$. Нормой оператора A называется величина $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|=\sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$; здесь $\|x\|=\|x\|_{L_1[0,1]}=\int\limits_0^1 |x(s)|\,ds$, $\|Ax\|=\|Ax\|_{C[0,1]}=\max\limits_{t\in[0,1]}|(Ax)(t)|$. Найдите норму A.

Ответ: $e+1$.

24. После лекции воздух в аудитории объёмом 10800 м^3 содержит $0{,}12\%$ CO_2. Сколько кубических метров воздуха, содержащего $0{,}04\%$ CO_2, надо ежеминутно доставлять в зал, чтобы через 10 минут после перерыва содержание углекислоты в аудитории составило $0{,}06\%$?

Ответ: $2160\ln 2$.

25. Пусть $y=y(x)$ – решение дифференциального уравнения $(x^4-y^2)dx+xydy=0$, удовлетворяющее условиям $y(1/2)=\sqrt{3}/2$, $y(1)>0$. Найдите $y(1)$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

26. Функция $y=f(x)\ne 0$ удовлетворяет интегральному уравнению $\int\limits_0^x f^{2024}(t)\,dt=f^{2025}(x)$.

Вычислите $\int\limits_0^{2025} f(x)(52-3f(x))\,dx$.

Ответ: 50625.

27. Найдите площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, ограниченной параллелями $\psi_1=45^\circ$, $\psi_2=60^\circ$ и меридианами $\varphi_1=34^\circ$, $\varphi_2=37^\circ$.

Ответ: $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi}{120}$.

28. Вычислите $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}|\ln x-\ln y|e^{-(x+y)}\,dxdy$.

Ответ: $2\ln 2$.

29. Обозначим через A множество всех натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит нулей. Найдите наибольшее действительное значение α, при котором ряд $\sum\limits_{n\in A}\dfrac{1}{n^\alpha}$ расходится.

Ответ: $\lg 9$.

30. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\int\limits_1^{n+1}\ln[x]dx}\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Ответ: e.