Теория и применение цифровой обработки сигналов

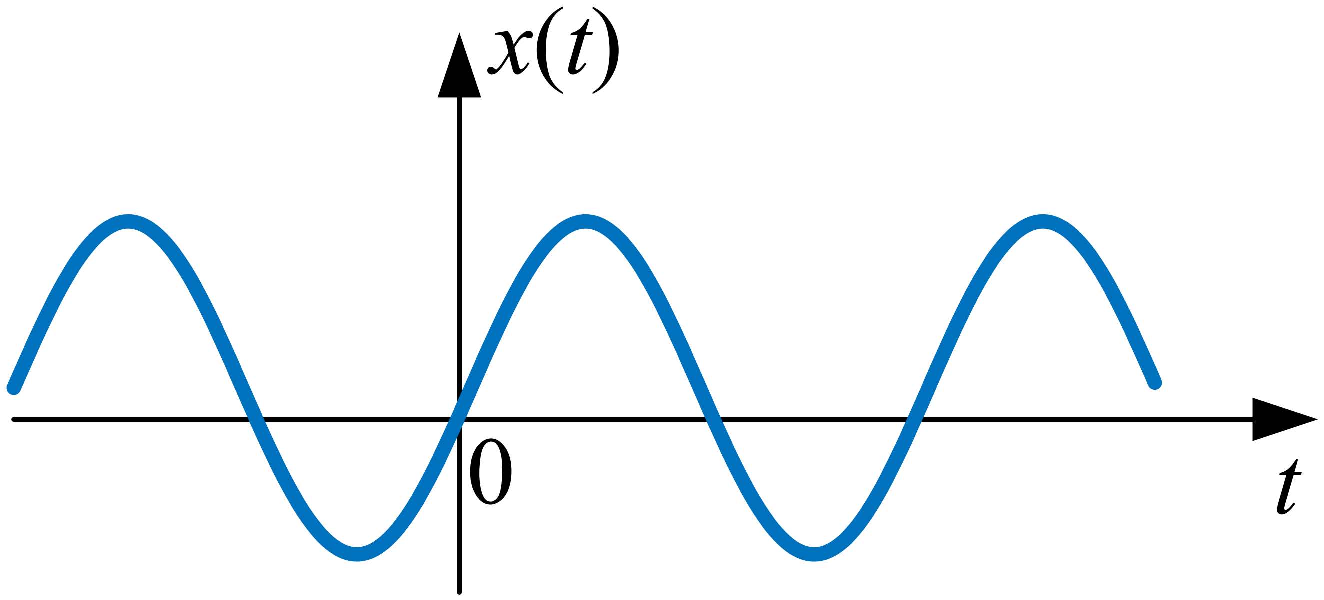
Частотное представление сигналов. Ряды Фурье

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

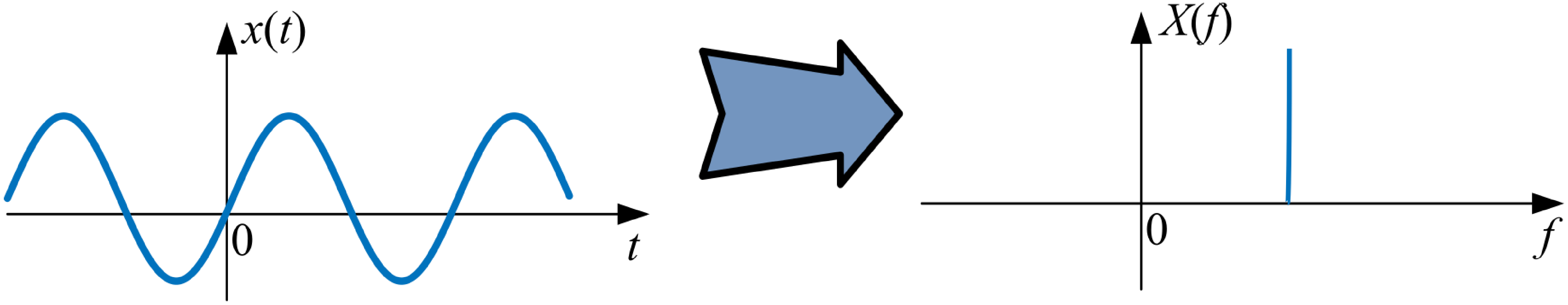
БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

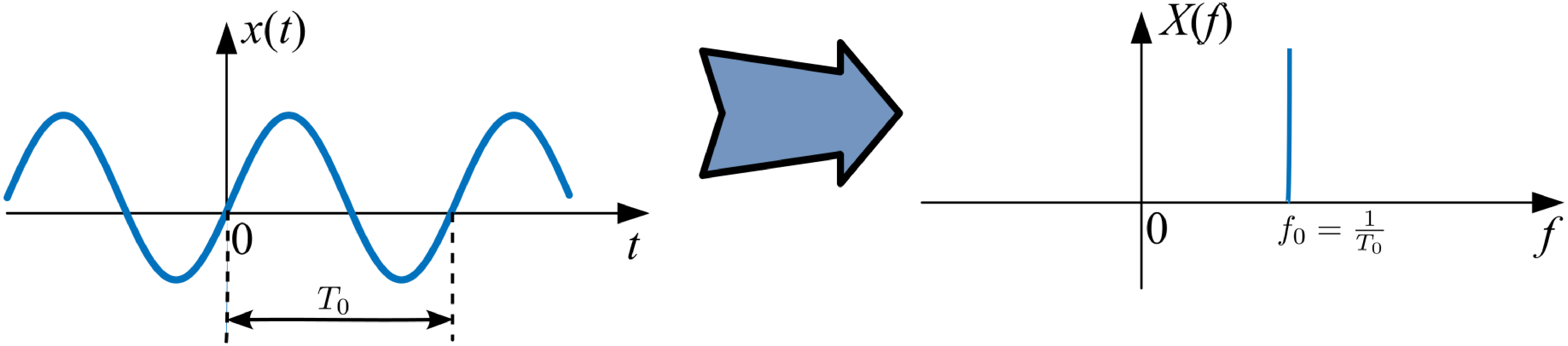
Предисловие



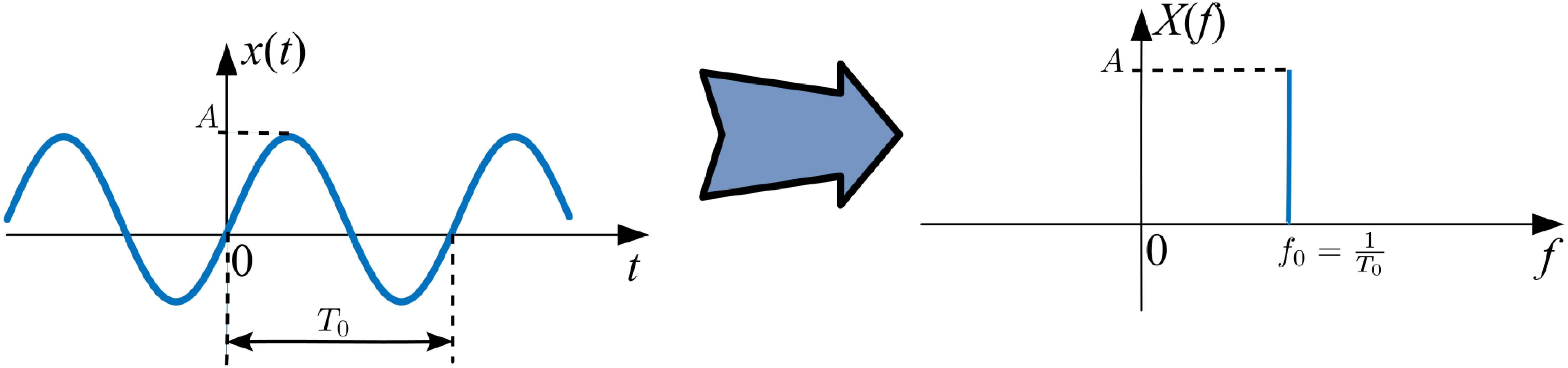
Предисловие



Предисловие



Предисловие

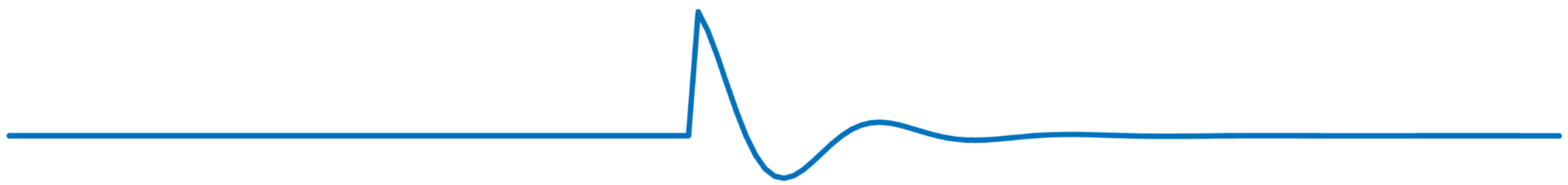


Общее понятие о преобразовании Фурье

Тип преобразования | **Пример сигнала**

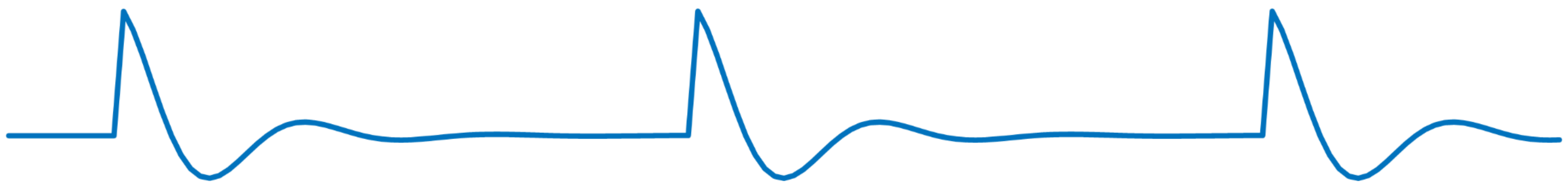
Преобразование Фурье

(непрерывные апериодические сигналы)



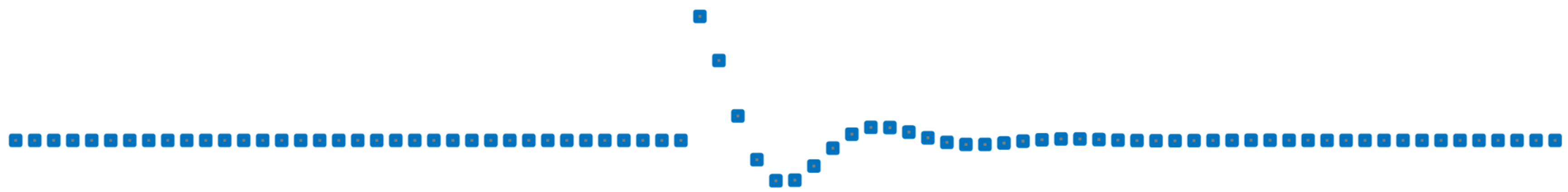
Ряды Фурье

(непрерывные периодические сигналы)



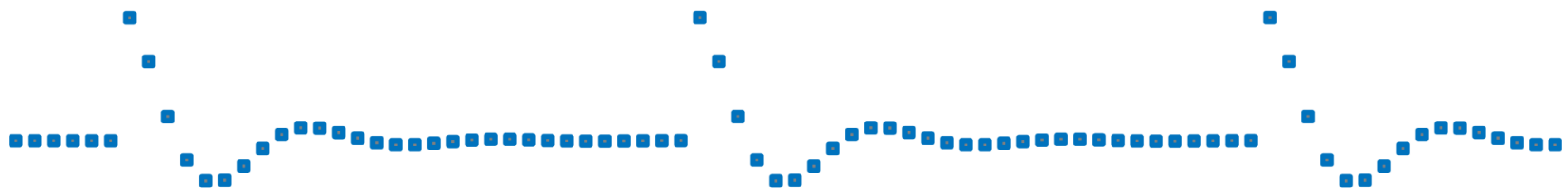
Дискретное временное преобразование Фурье (ДВПФ)

(дискретные апериодические сигналы)



Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

(дискретные периодические сигналы)

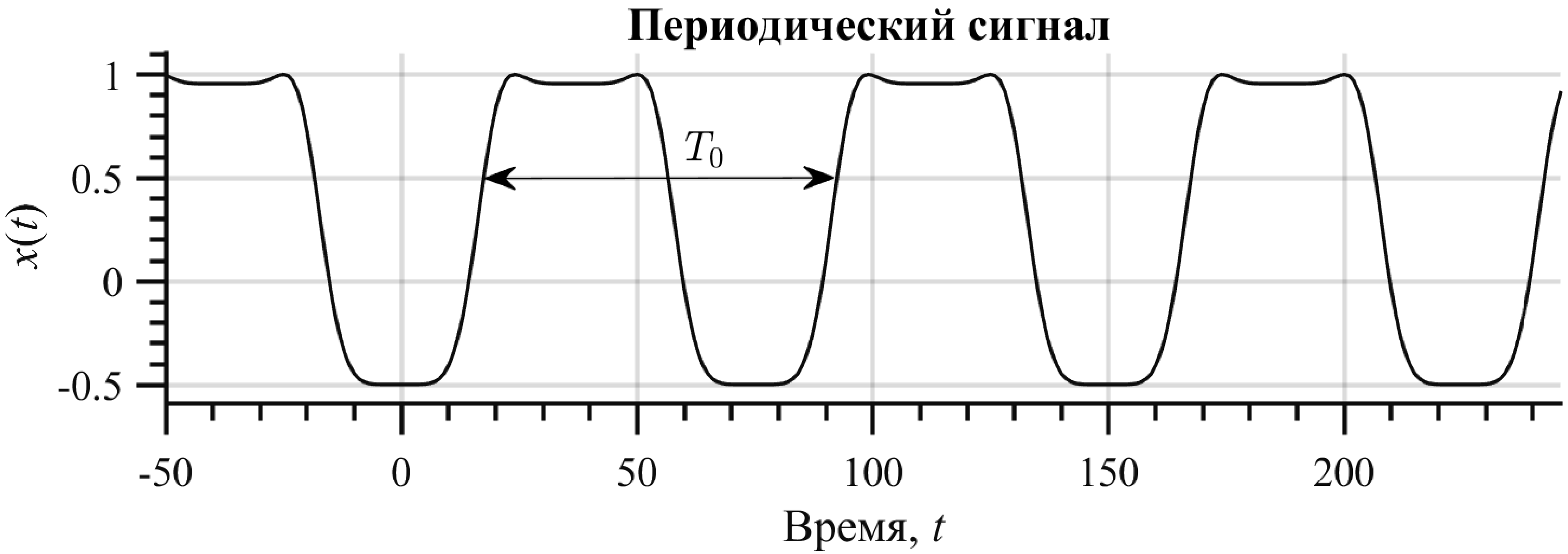


Ряд Фурье

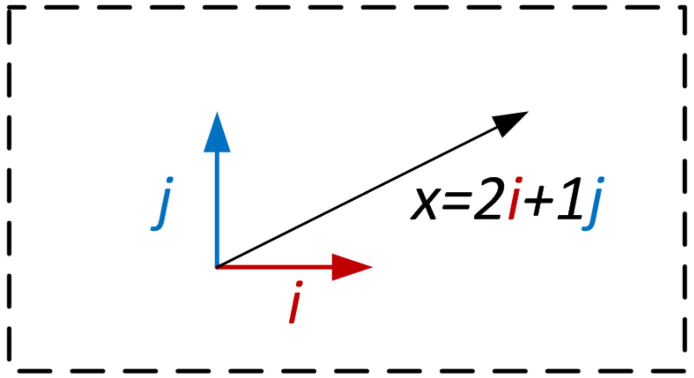
Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) предложил концепцию представления сигнала в виде тригонометрического ряда из косинусов и синусов:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \qquad (1)$$

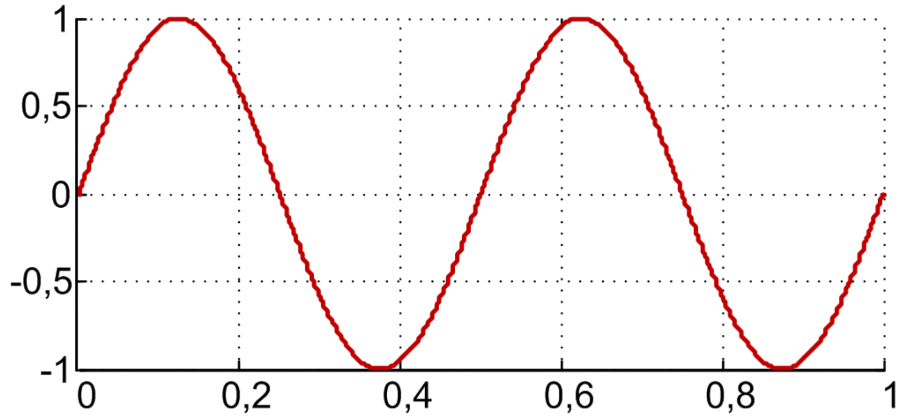
где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0}$; T_0 – период сигнала.



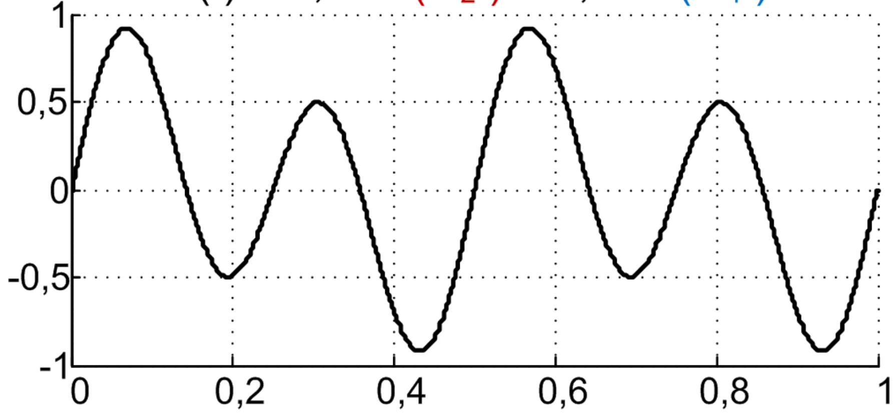
Ортогональность и скалярное произведение



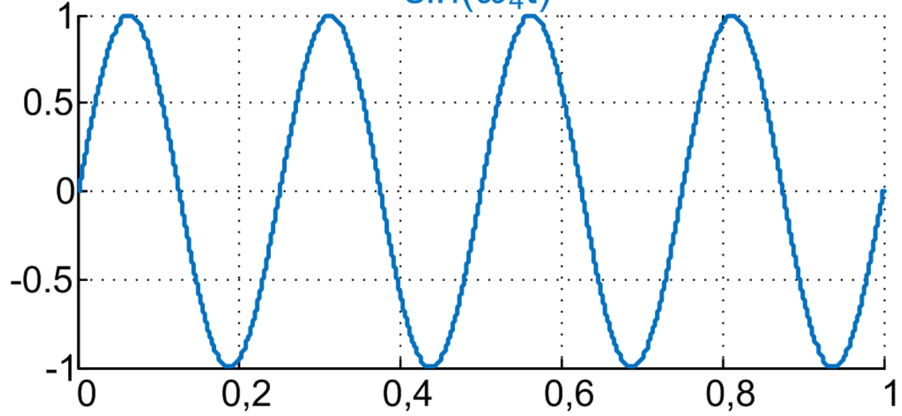
$\sin(\omega_2 t)$



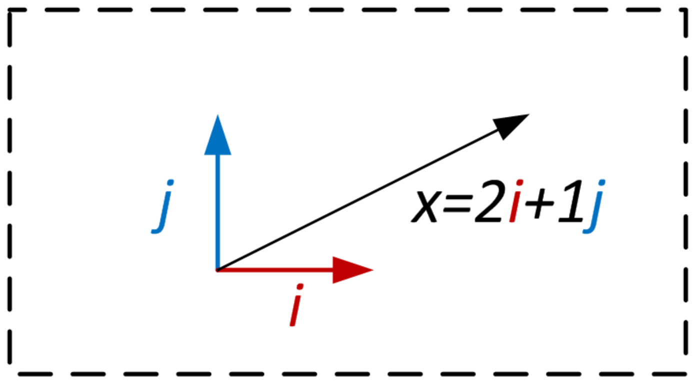
$x(t) = 0{,}3\sin(\omega_2 t) + 0{,}7\sin(\omega_4 t)$

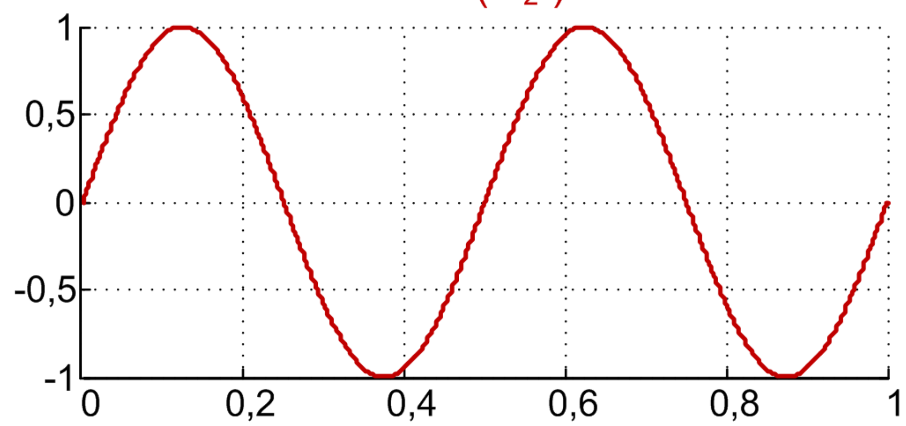


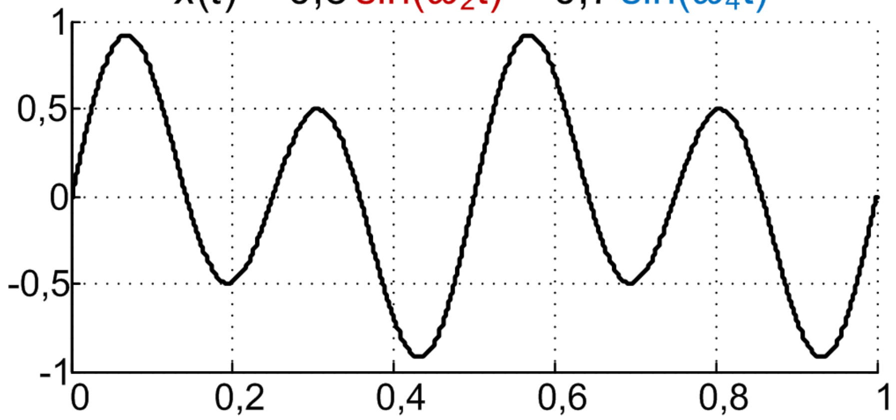
$\sin(\omega_4 t)$

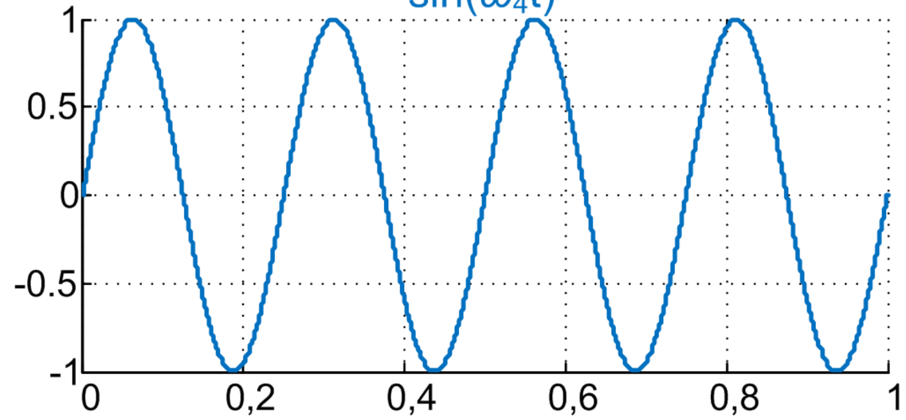


Ортогональность и скалярное произведение









Скалярное произведение

Векторов

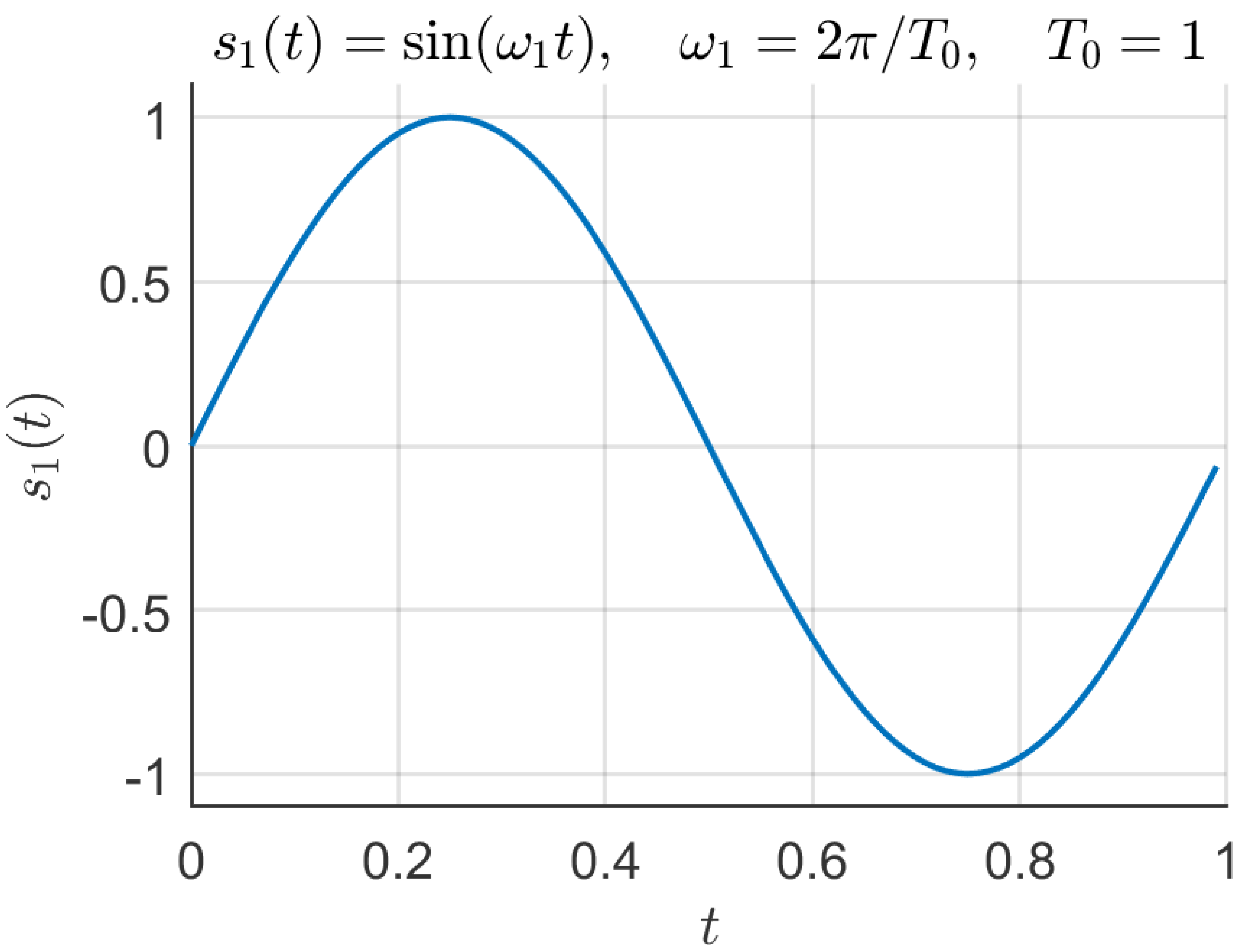
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \cdots + a_n b_n^* = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*$$

Функций

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt.$$

Скалярное произведение функций

Пусть дана функция $s_1(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.

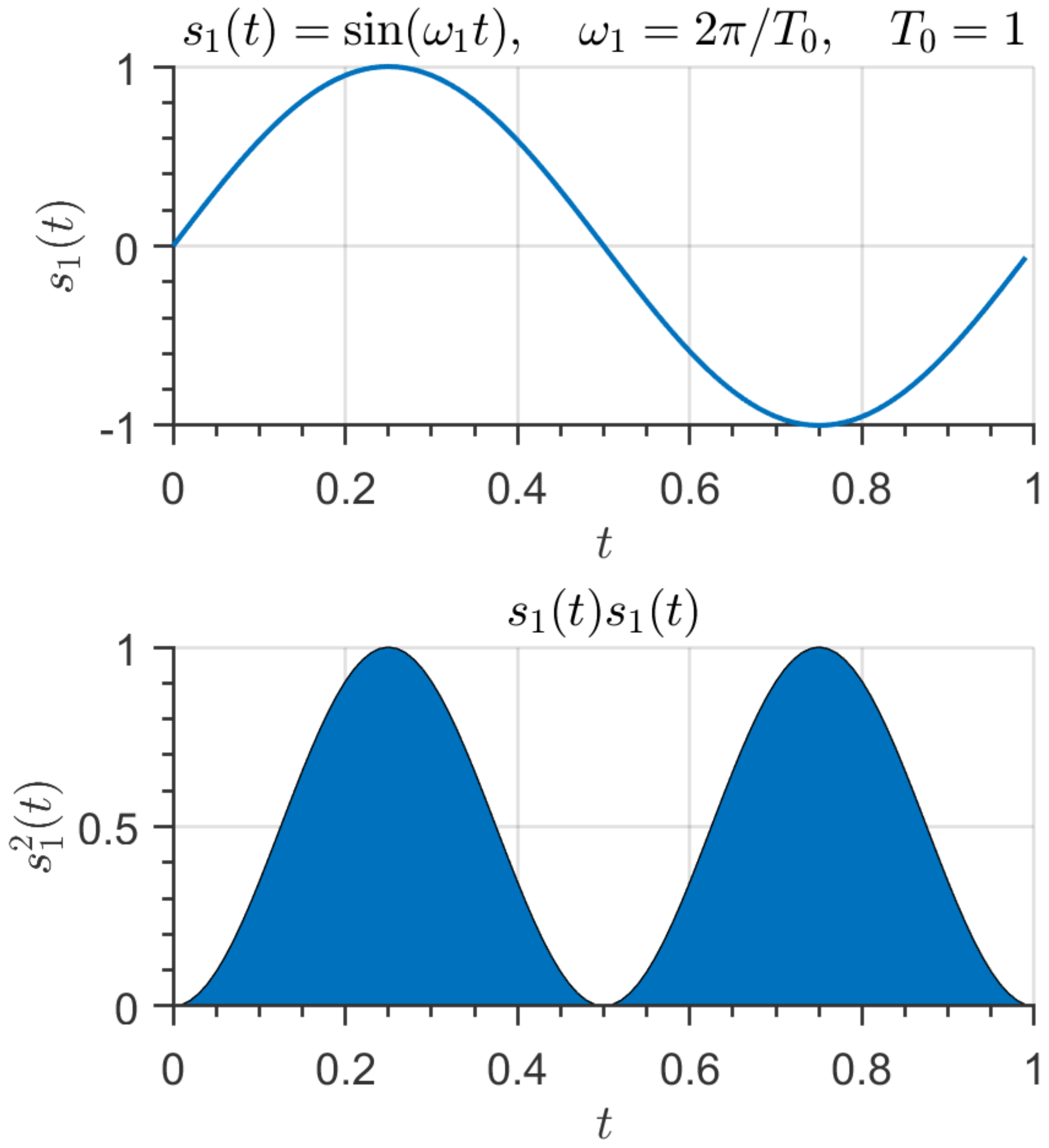


Найти скалярное произведение

$$\langle s_1(t), s_1(t)\rangle = ?$$

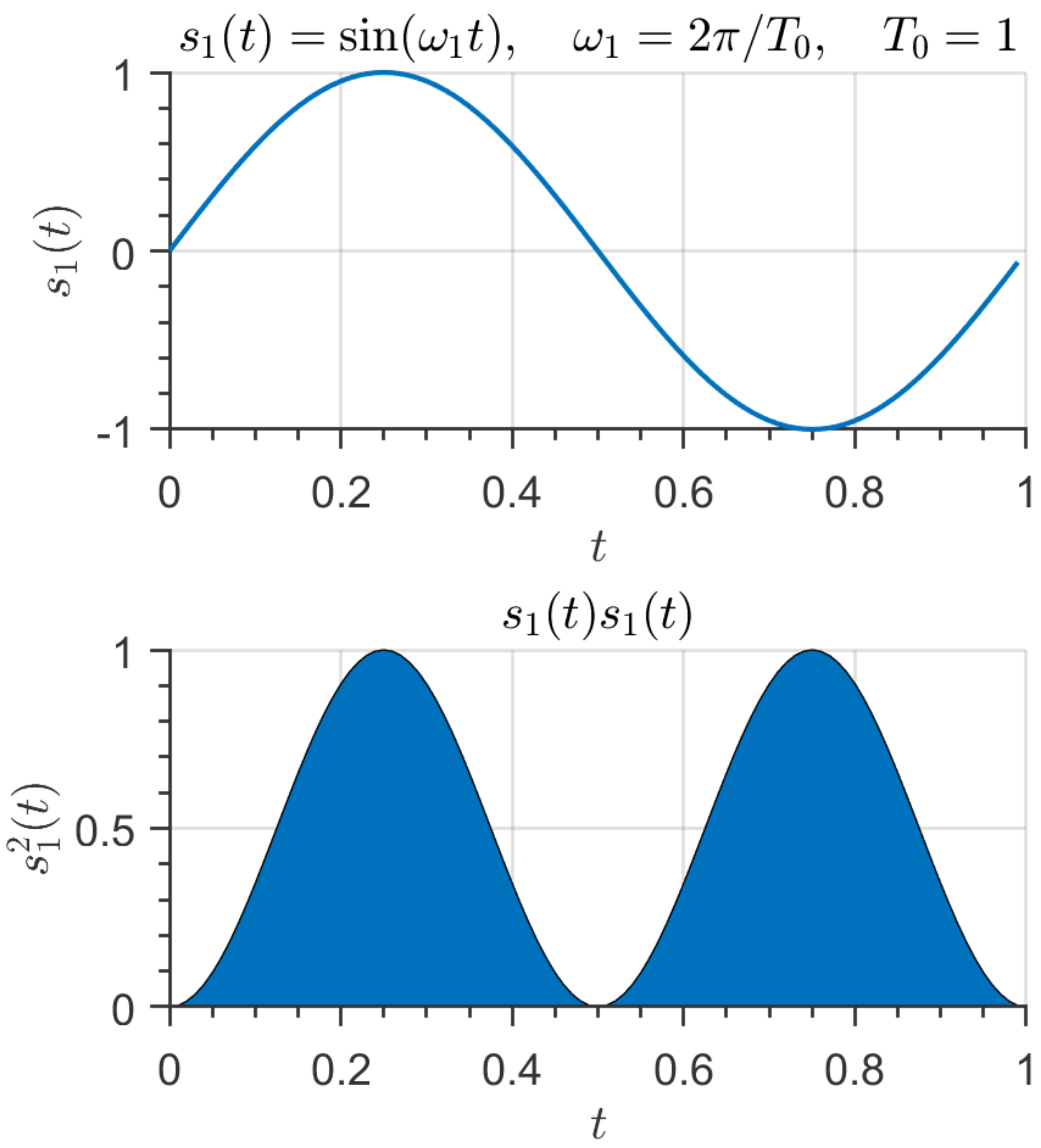
Скалярное произведение функций

Пусть дана функция $s_1(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.



Скалярное произведение функций

Пусть дана функция $s_1(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.



Скалярное произведение:

$$\langle s_1(t), s_1(t) \rangle = \int_0^1 \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_1 t)\, dt$$

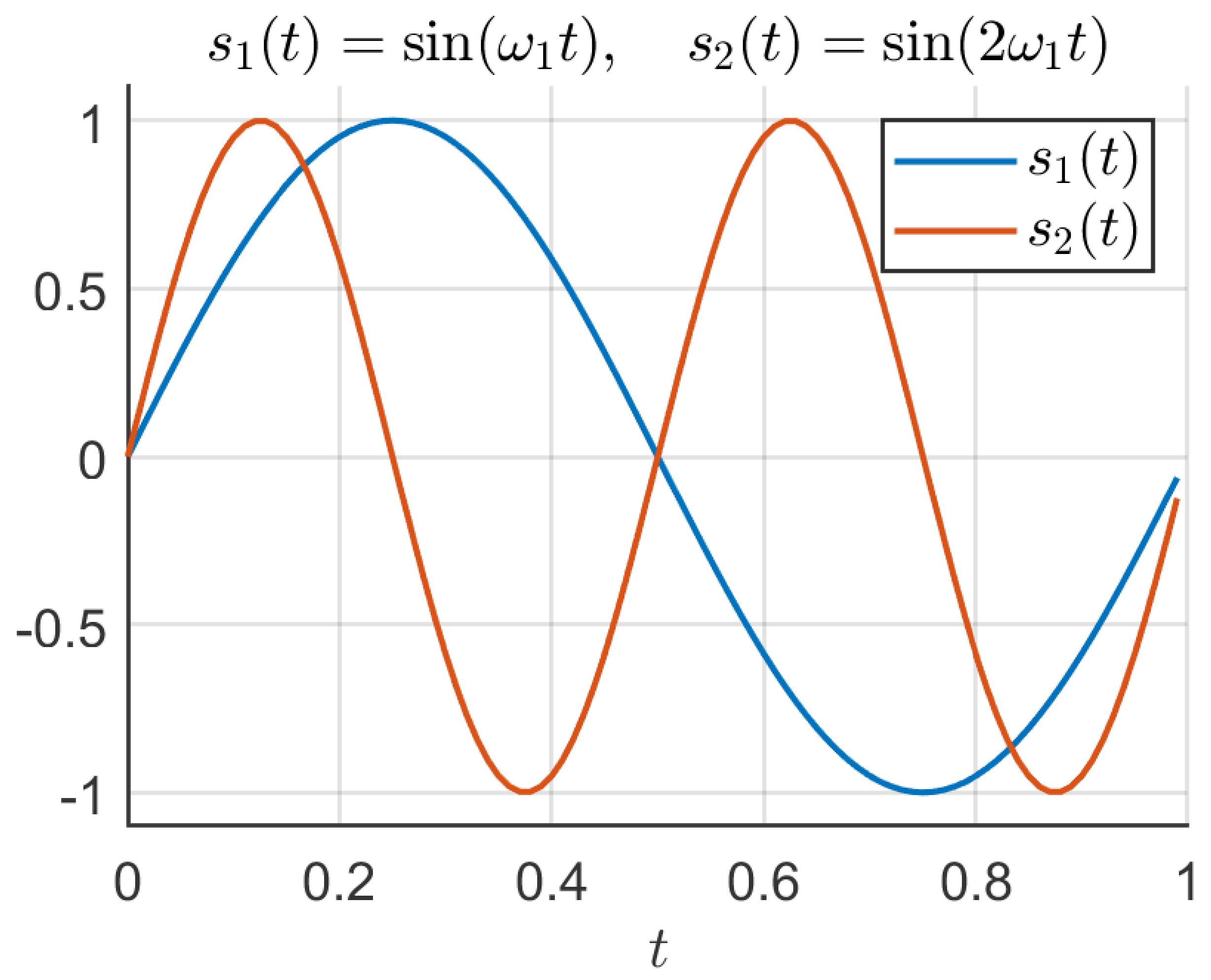
$$= \int_0^1 \sin^2(\omega_1 t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_1 t) dt$$

$$= \frac{t}{2}\Big|_0^1 - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2\omega_1 t\, dt}_{=0} = 0{,}5$$

Скалярное произведение функций

Пусть даны функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.

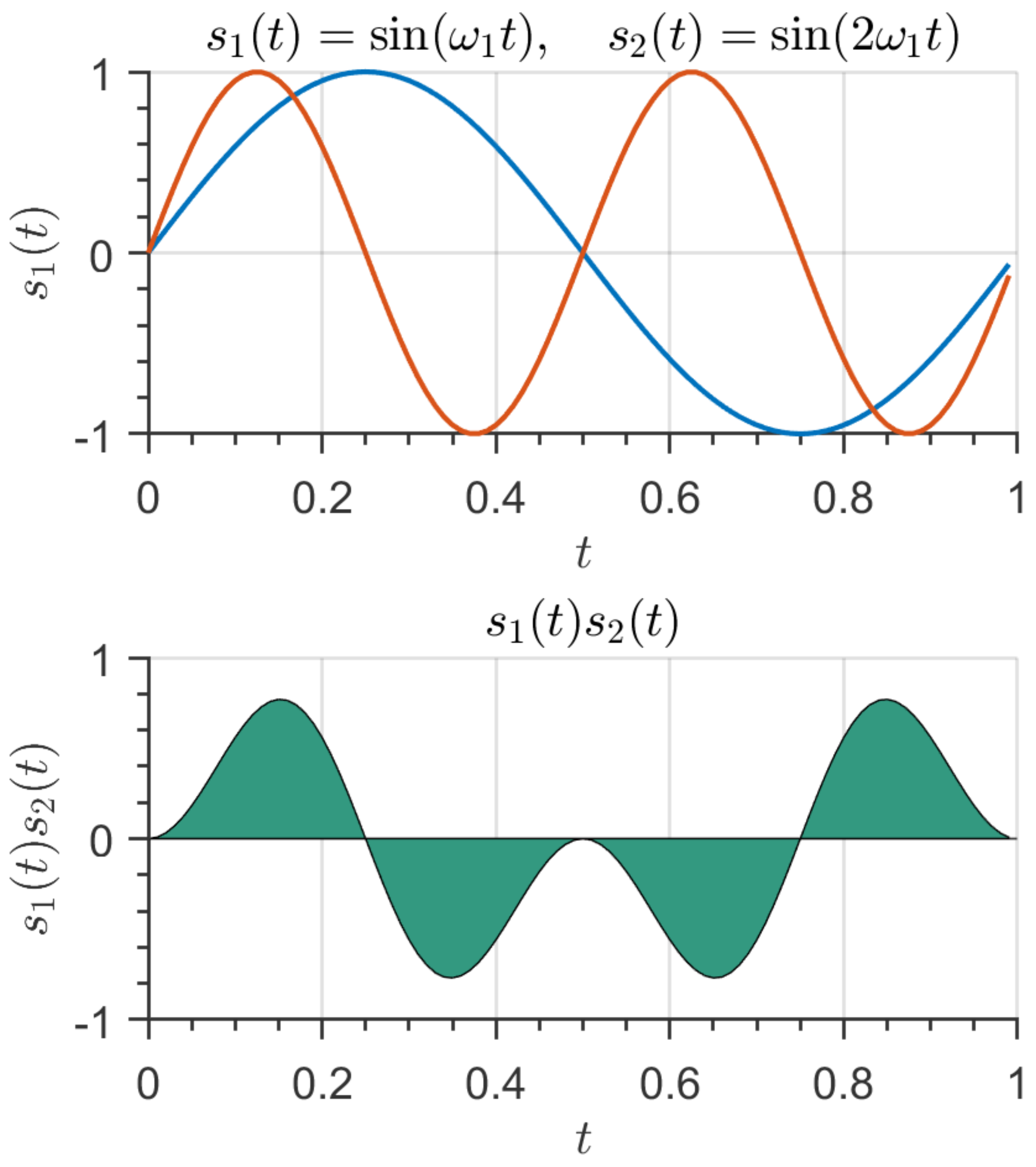


Найти скалярное произведение

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = ?$$

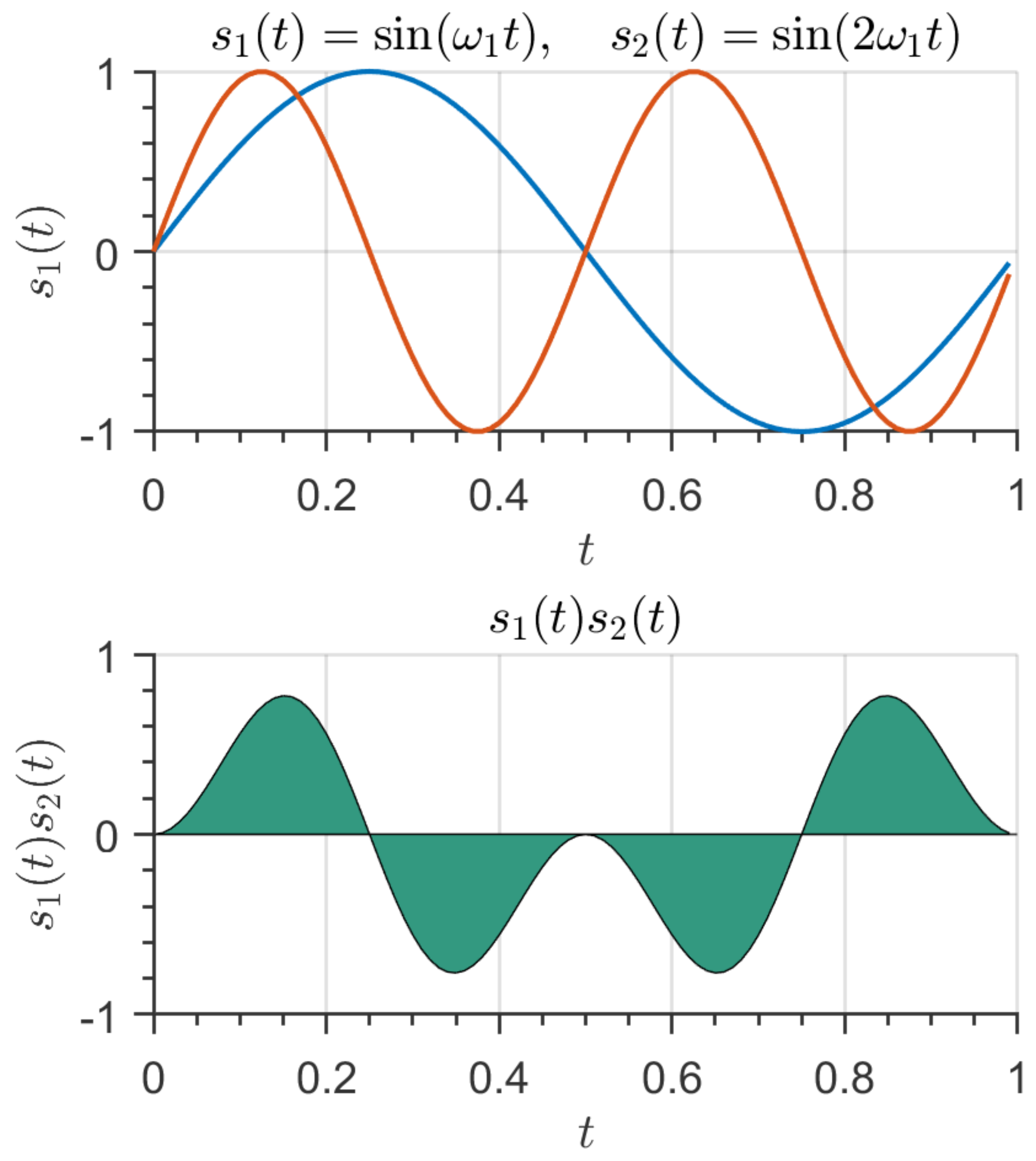
Скалярное произведение функций

Пусть дана функция $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.



Скалярное произведение функций

Пусть дана функция $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на интервале $t \in [0,\ 1]$.



Скалярное произведение:

$$\langle s_1(t), s_2(t)\rangle = \int_0^1 \sin(2\pi t)\sin(2\pi 2t)\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt}_{=0}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2\pi 3t)\,dt}_{=0} = 0$$

Ортогональность функций sin и cos

$$\int_0^{T_0} \cos\omega_k t \sin\omega_m t\, dt = 0, \quad \forall k, m,$$

$$\int_0^{T_0} \cos\omega_k t \cos\omega_m t\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m, \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \sin\omega_k t \sin\omega_m t\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m. \end{cases}$$

Фурье-анализ

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t).$$

Чтобы получить значение конкретного коэффициенты a_m необходимо найти *проекцию* $x(t)$ на базисную функцию $\cos\omega_m t$, т.е. вычислить

$$\langle x(t), \cos(\omega_m t)\rangle.$$

Фурье-анализ

Вычисление скалярного произведения:

$$\langle x(t), \cos(\omega_m t)\rangle = \int_0^{T_0} x(t)\cos\omega_m t\,dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{T_0}\cos\omega_m t\,dt}_{=0} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \underbrace{\int_0^{T_0}\cos\omega_k t\cos\omega_m t\,dt}_{=\begin{cases}0 & \forall k\neq m\\ T_0/2, & k=m\end{cases}} + b_k \underbrace{\int_0^{T_0}\sin\omega_k t\cos\omega_m t\,dt}_{=0}\right) = a_m\frac{T_0}{2}.$$

Фурье-анализ

Вычисление скалярного произведения:

$$\langle x(t), \cos(\omega_m t)\rangle = \int_0^{T_0} x(t)\cos\omega_m t\,dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{T_0}\cos\omega_m t\,dt}_{=0} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\underbrace{\int_0^{T_0}\cos\omega_k t\cos\omega_m t\,dt}_{=\begin{cases}0 & \forall k\neq m\\ T_0/2, & k=m\end{cases}} + b_k\underbrace{\int_0^{T_0}\sin\omega_k t\cos\omega_m t\,dt}_{=0}\right) = a_m\frac{T_0}{2}.$$

Следовательно,

$$a_m = \frac{2}{T_0}\langle x(t), \cos(\omega_m t)\rangle \Rightarrow \boxed{a_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos\omega_m t\,dt}.$$

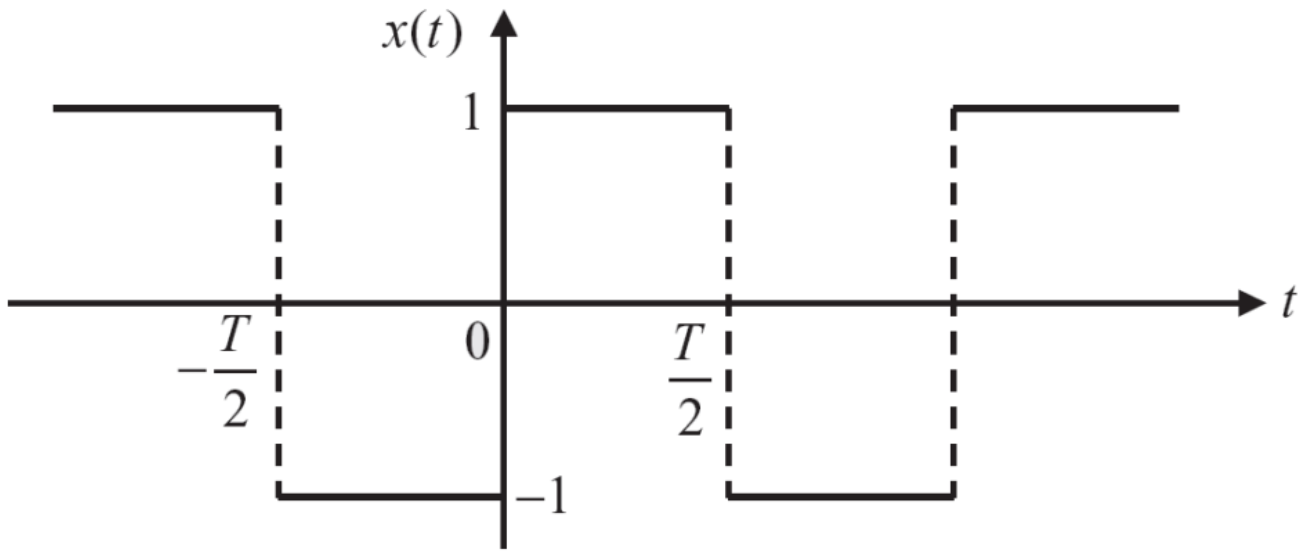
Аналогичным образом находится

$$\boxed{b_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin\omega_m t\,dt.}$$

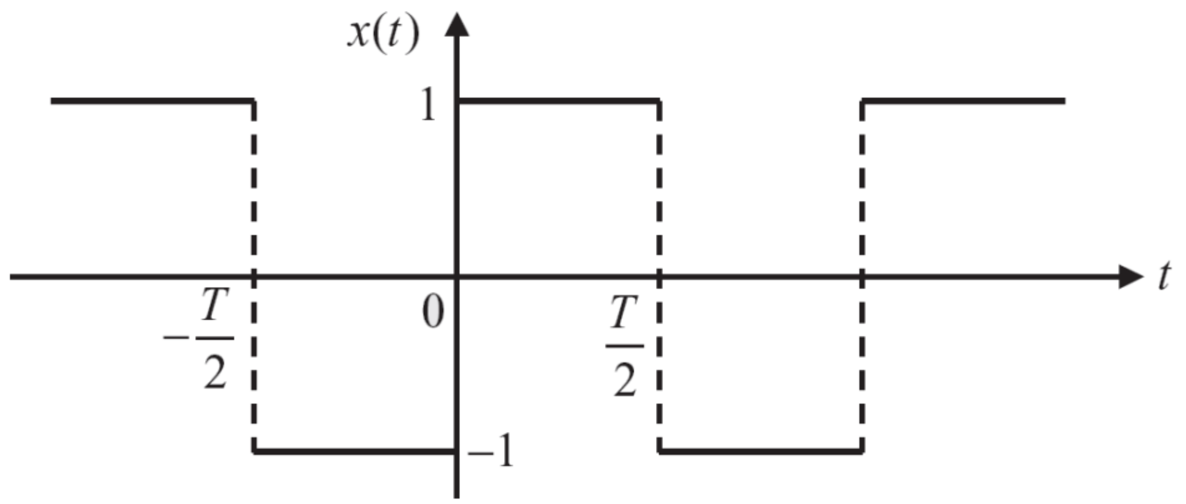
Ряд Фурье (пример – прямоугольный сигнал)

Найти коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала $x(t+nT) = x(t),\ n \in \mathbb{Z}$, который определен следующим образом:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2, \\ -1, & T/2 \le t < T. \end{cases}$$



Ряд Фурье (пример – прямоугольный сигнал)



$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2, \\ -1, & T/2 \le t < T. \end{cases}$$

Среднее значение сигнала: $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt = 0,$

а коэффициенты a_k и b_k равны:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(\omega_k t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{T} -\cos(\omega_k t)\,dt + \int_0^{T/2}\cos(\omega_k t)\,dt\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T} x(t)\sin(\omega_k t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}\sin(\omega_k t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sin(\omega_k t)\,dt\right] = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi).$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{4}{\pi},\quad b_2 = \frac{2}{2\pi}(1-\cos 2\pi) = 0,$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi}(1-\cos 3\pi) = \frac{4}{3\pi},\ \ldots$$

Ряд Фурье (прямоугольный сигнал, продолжение)

В результате получаем следующее представление сигнала:

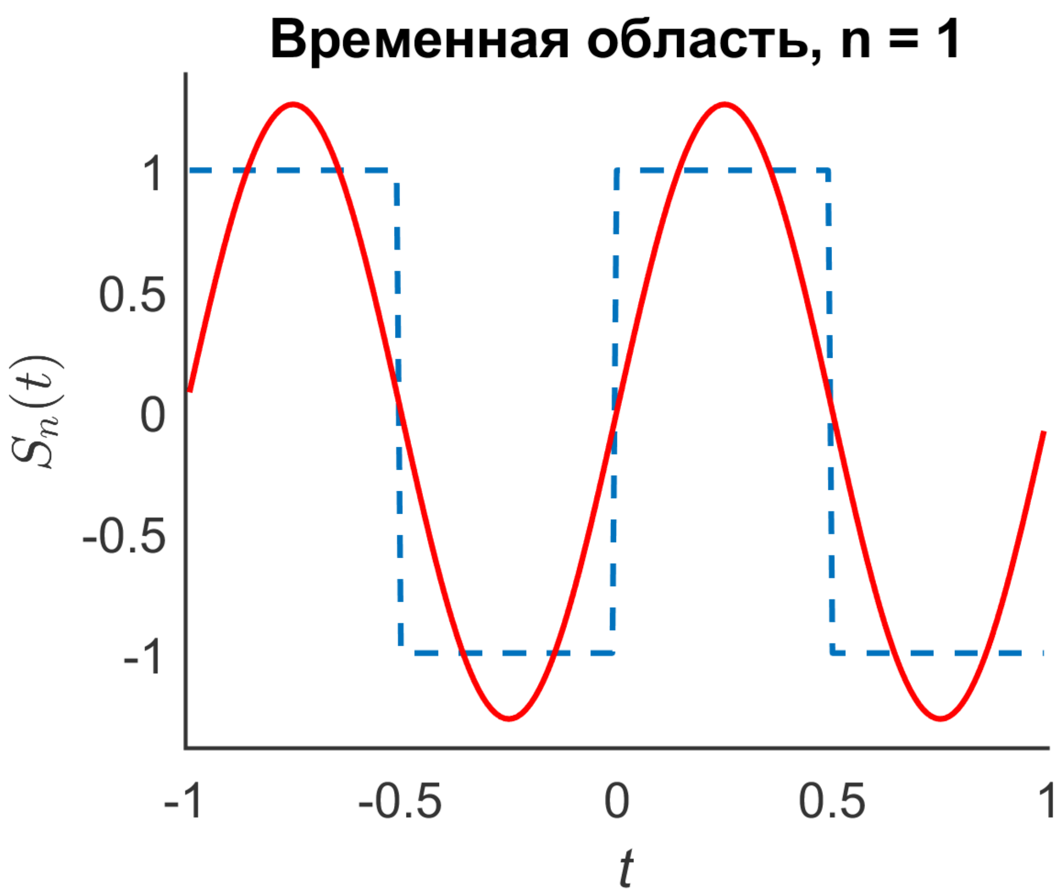
$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right]. \qquad (2)$$

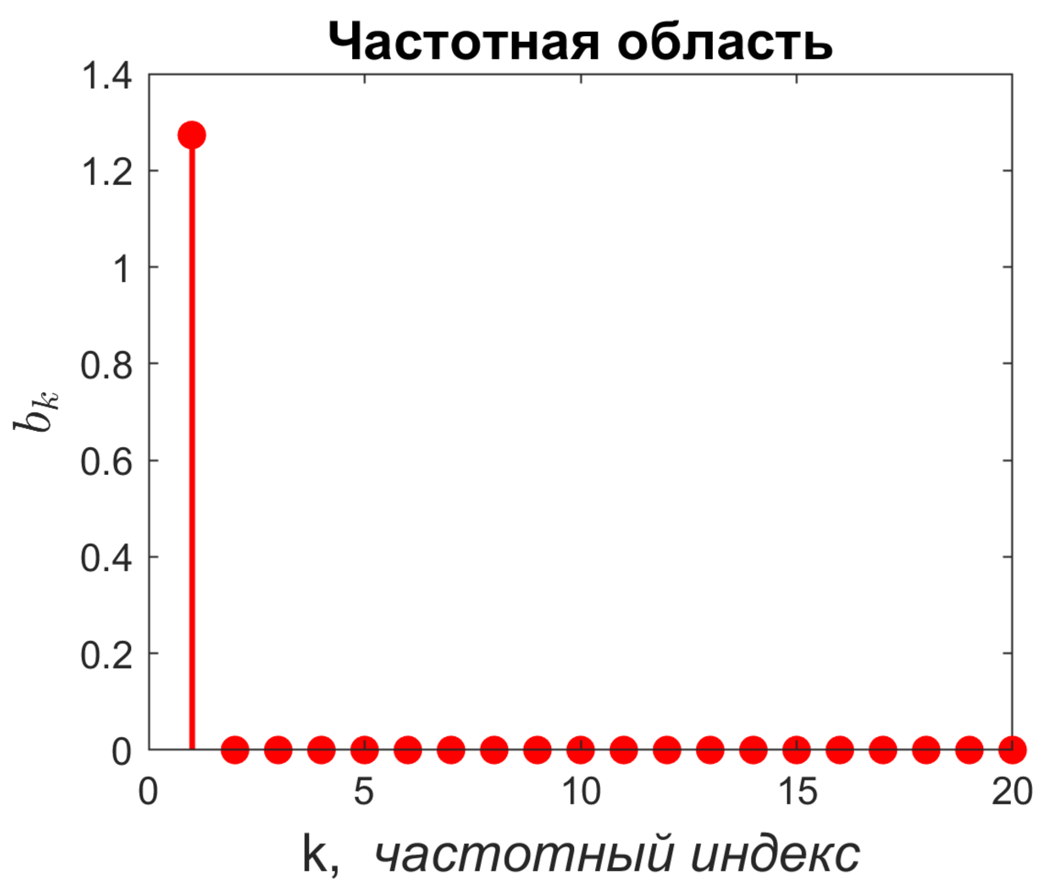
В разложении участвуют только синусы, поскольку $x(t)$ является нечетным.

Полезно рассмотреть как частичные суммы (2) аппроксимируют исходный сигнал $x(t)$. Обозначим через $S_n(t)$ сумму первых n членов в (2).

Разложение прямоугольного сигнала

$$n = 1, \;\; S_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin\omega_1 t$$

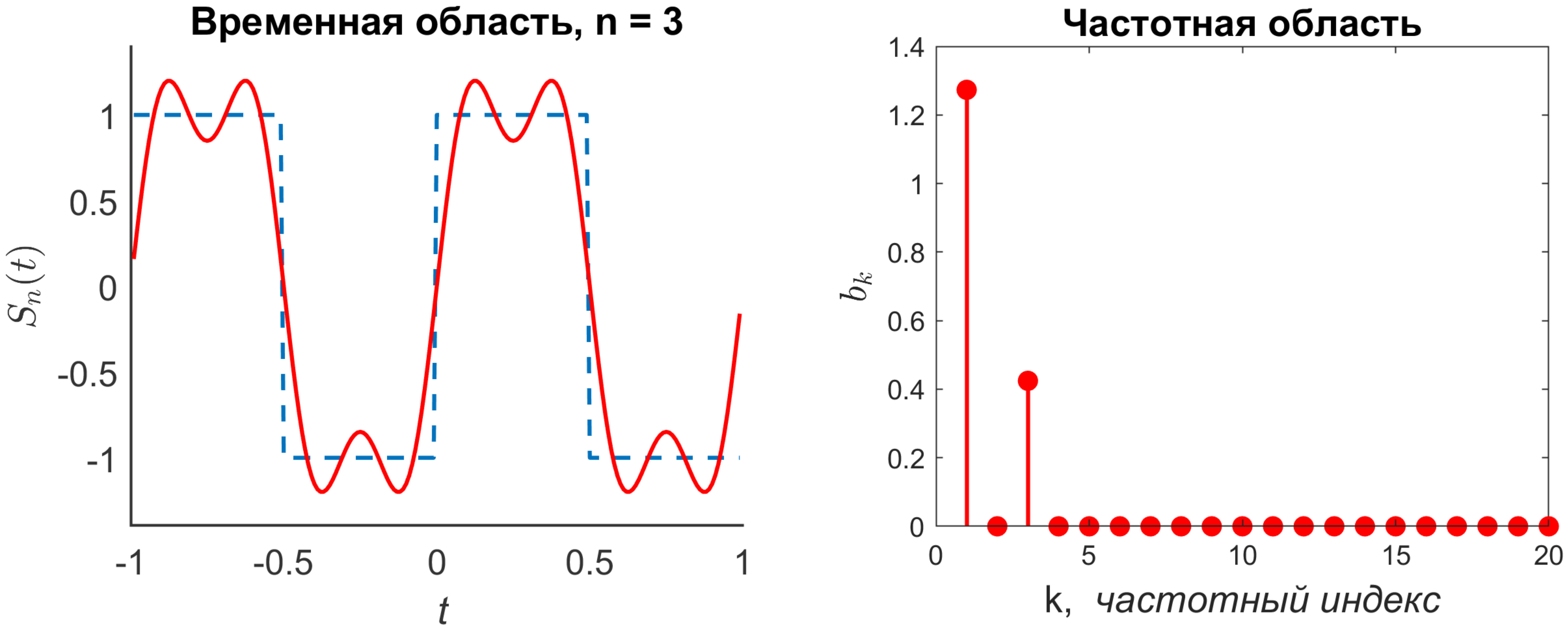




Разложение прямоугольного сигнала

$n = 3$

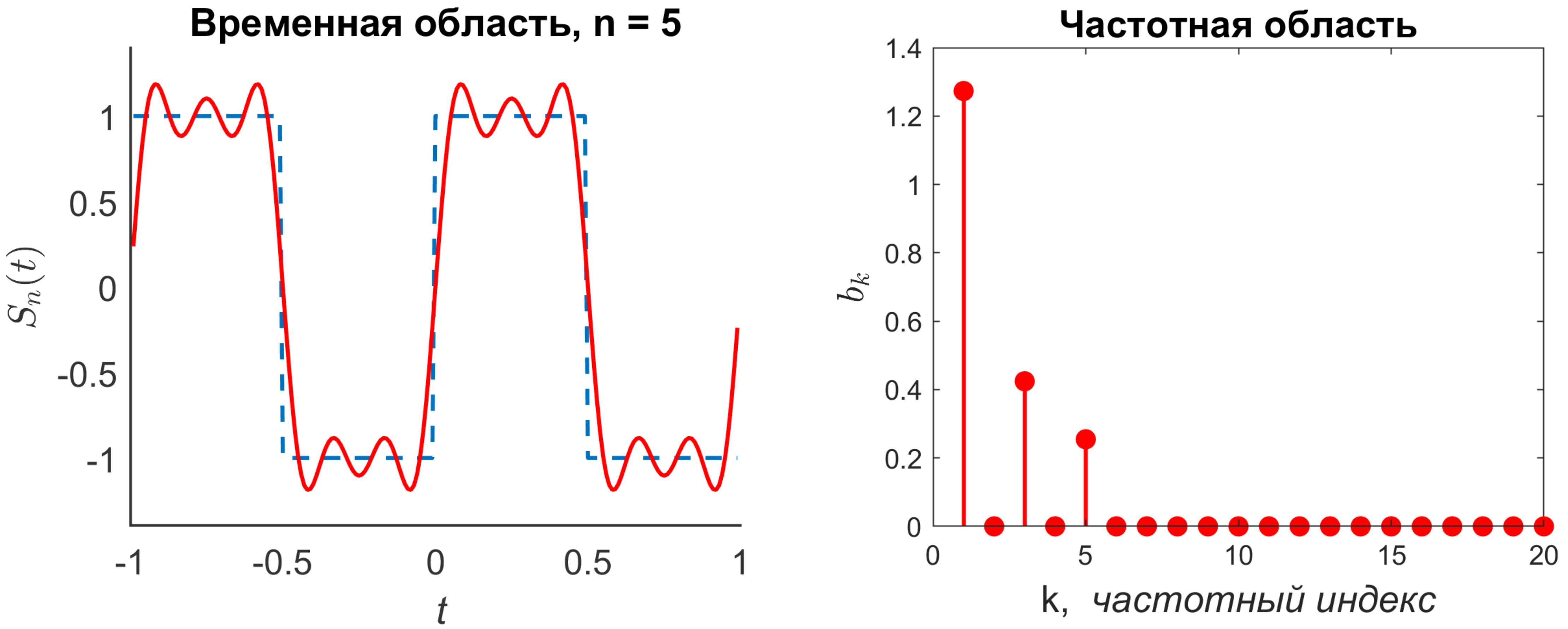
$$S_2(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t\right)$$



Разложение прямоугольного сигнала

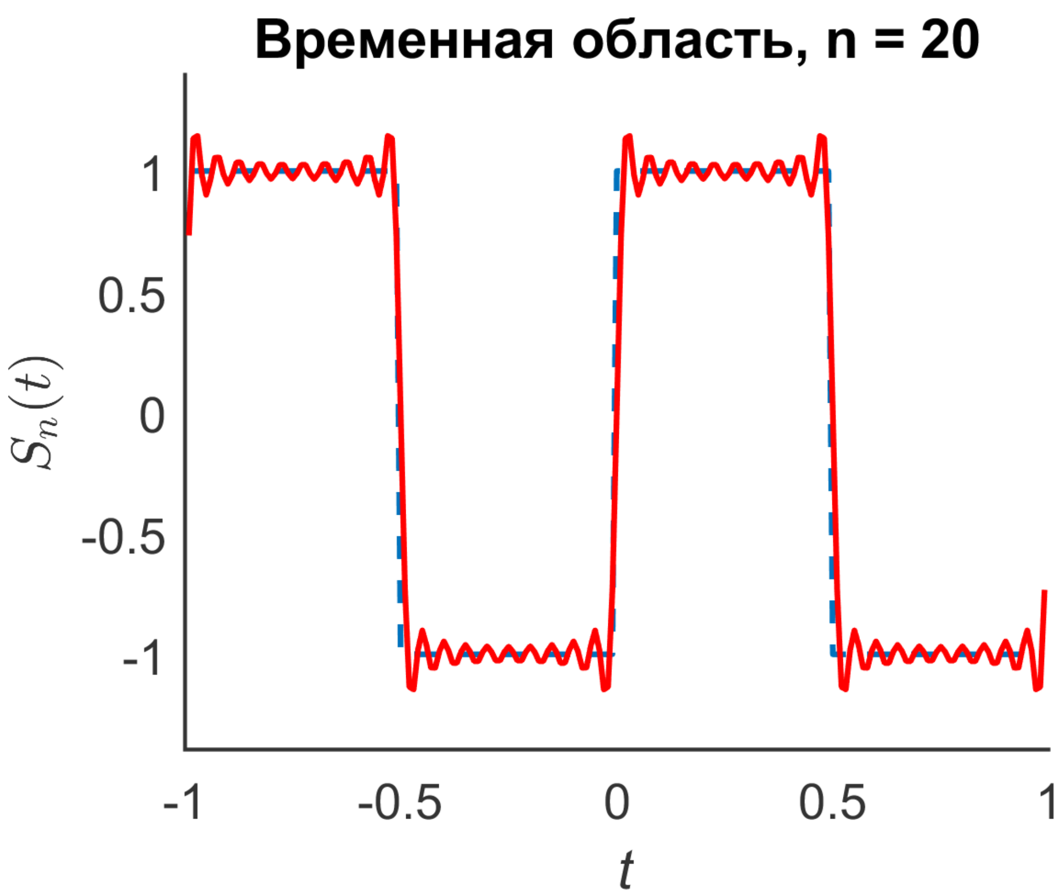
$n = 5$

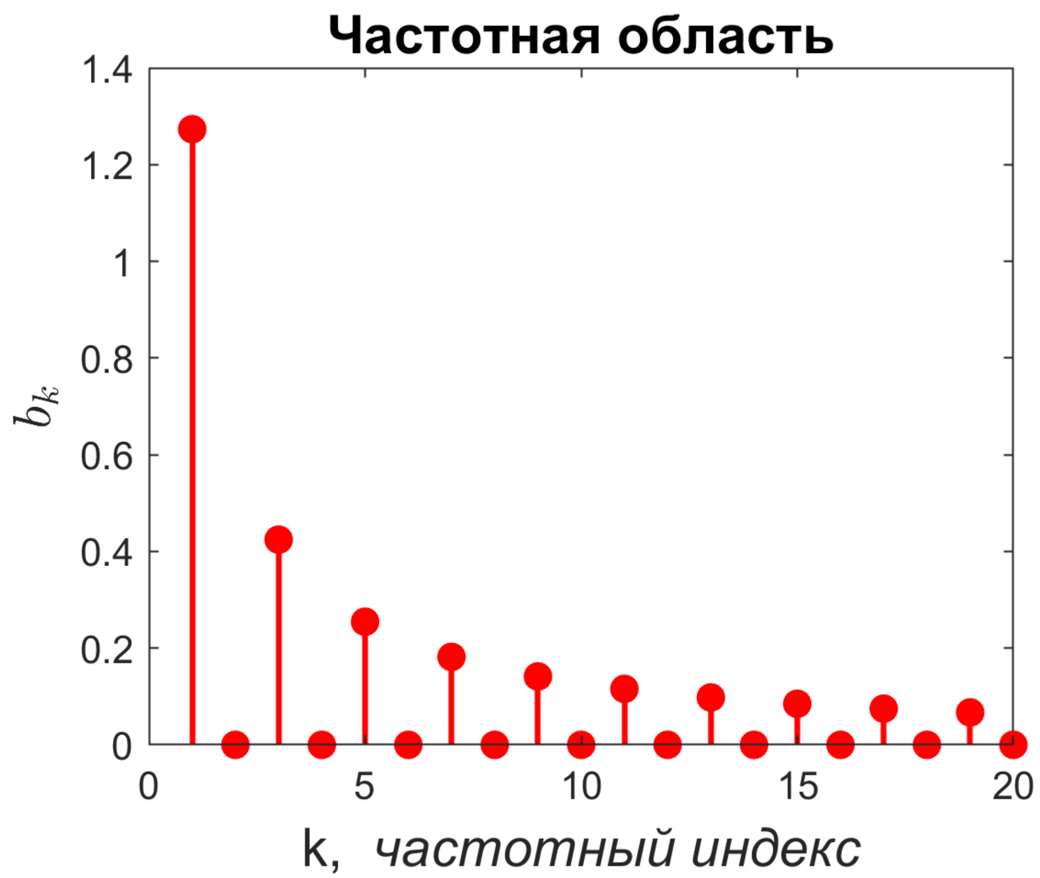
$$S_5(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t\right)$$



Разложение прямоугольного сигнала

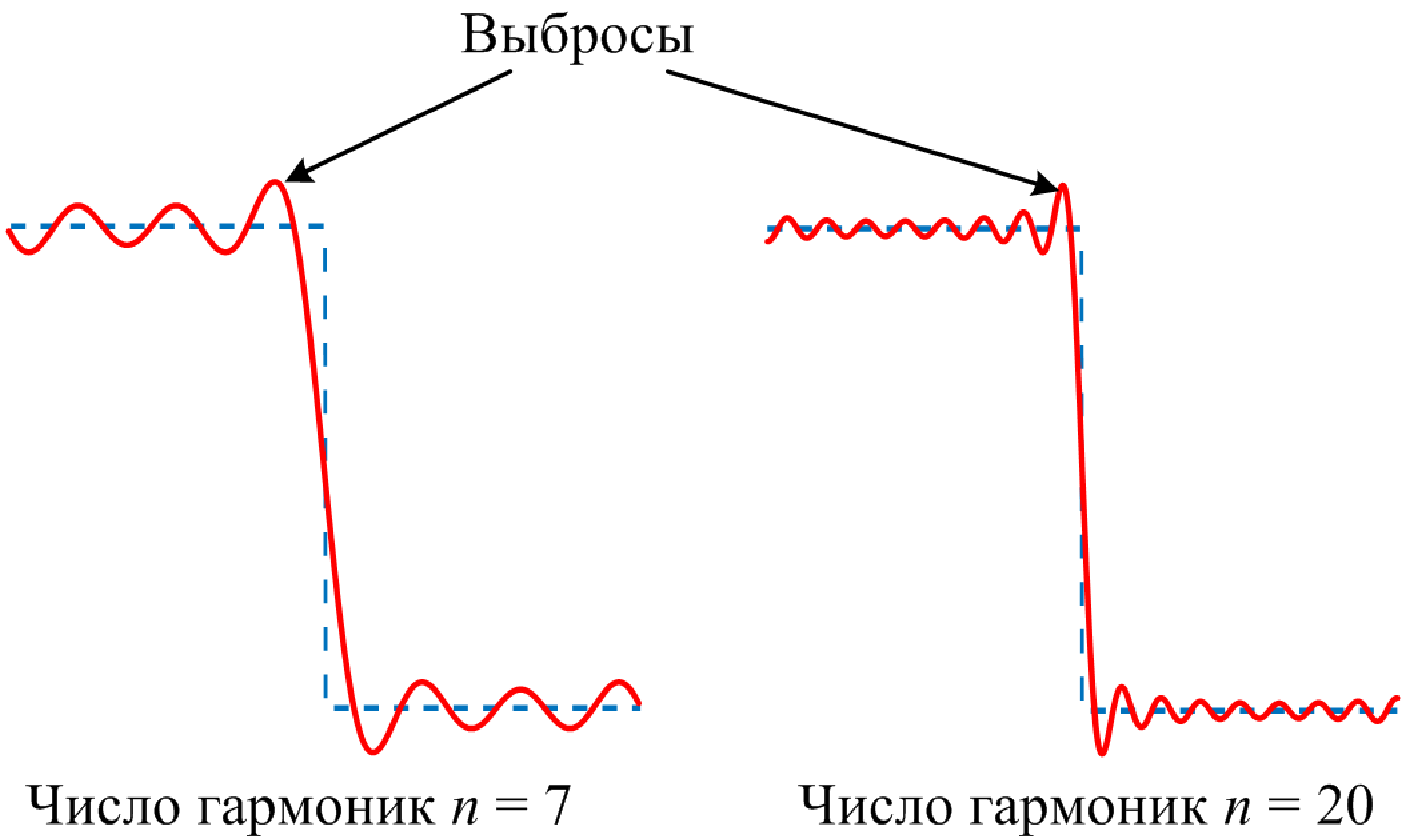
$n = 20$





Эффект Гиббса

Поведение частичных сумм ряда Фурье $S_n(t)$ в точке разрыва функции называют *эффектом Гиббса*. Создается впечатление, что колебания в точках разрыва исчезнут, если просуммировать больше членов ряда, однако этого не происходит. Т.е. ***от количества слагаемых в ряде Фурье амплитуда выброса не изменяется***.



Формы записи ряда Фурье

Тригонометрическая форма

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Формы записи ряда Фурье

Тригонометрическая форма

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Гармоническая форма

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k),$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \ \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right).$$

Формы записи ряда Фурье

Тригонометрическая форма

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Гармоническая форма

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \; A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right).$$

Комплексная форма

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \qquad c_k = a_k - jb_k,$$

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k, \qquad \arg(c_k) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \varphi_k.$$