# Теория и применение цифровой обработки сигналов

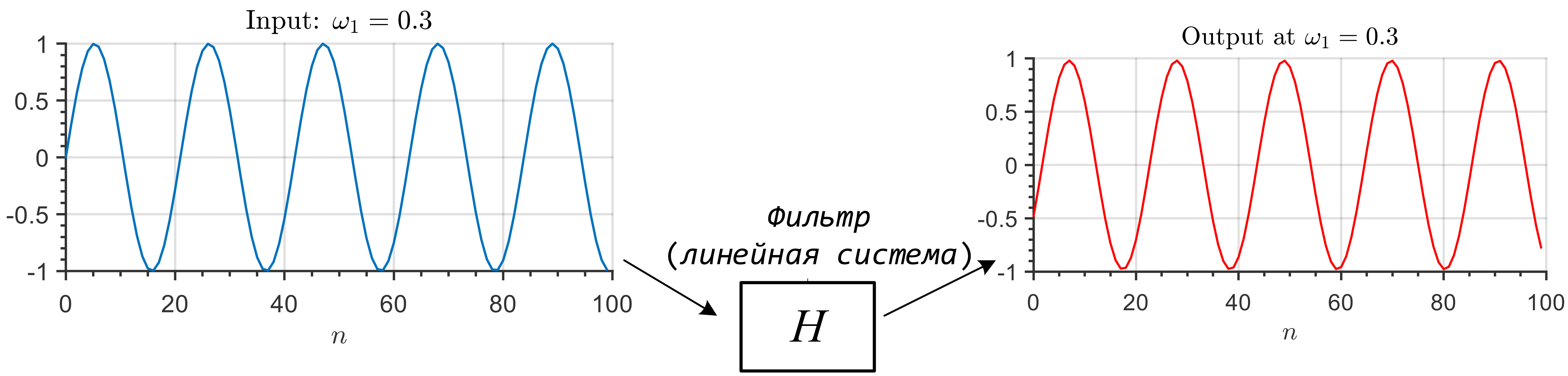
## Передаточная функция ЛС-систем

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

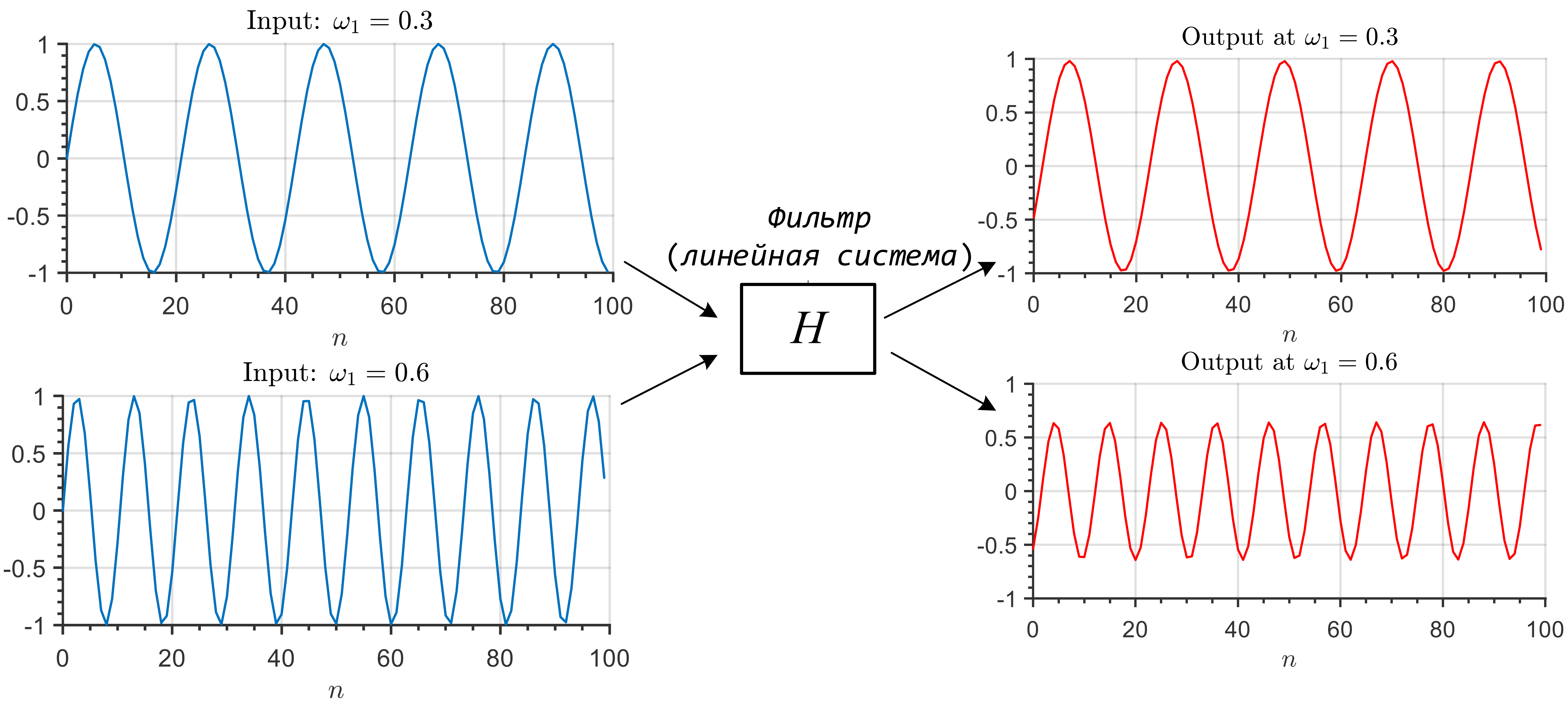
БГУИР

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

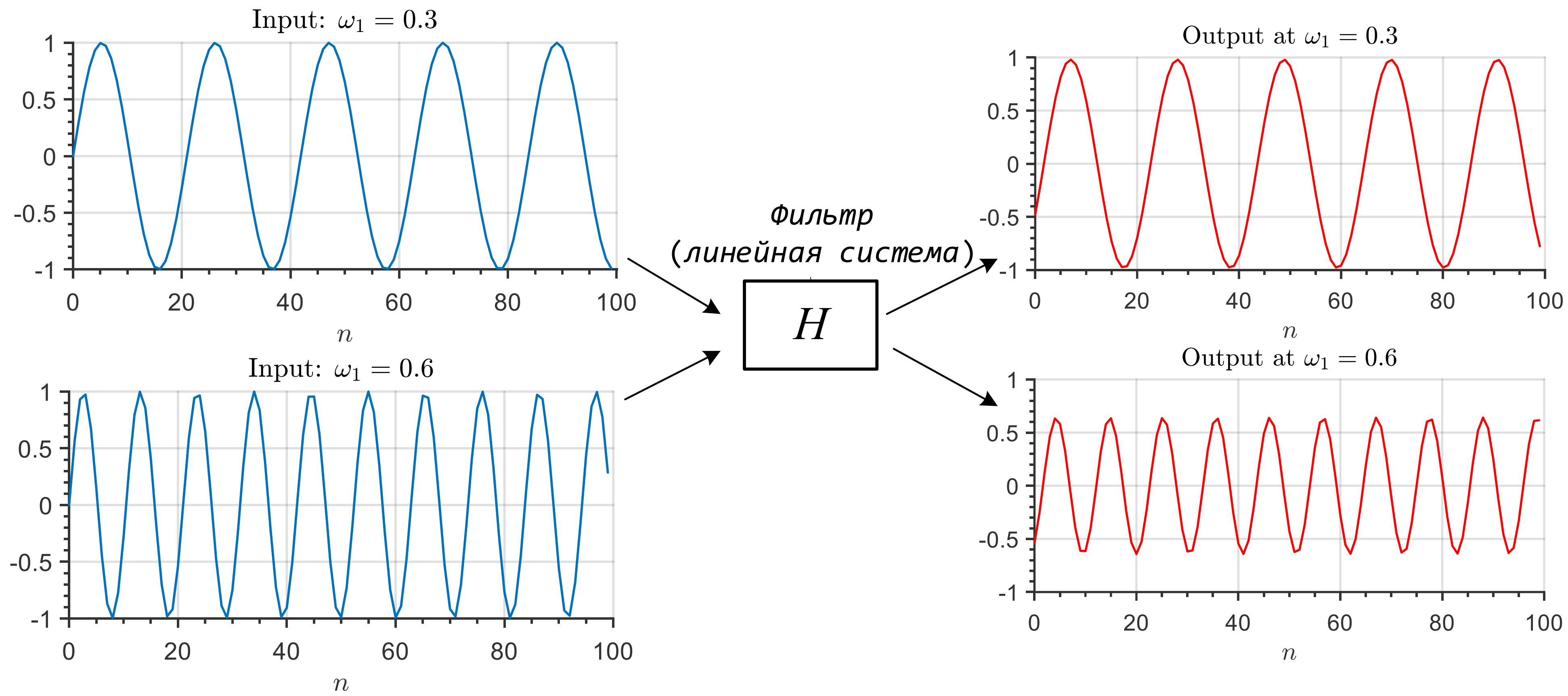
# Упрощенная схема



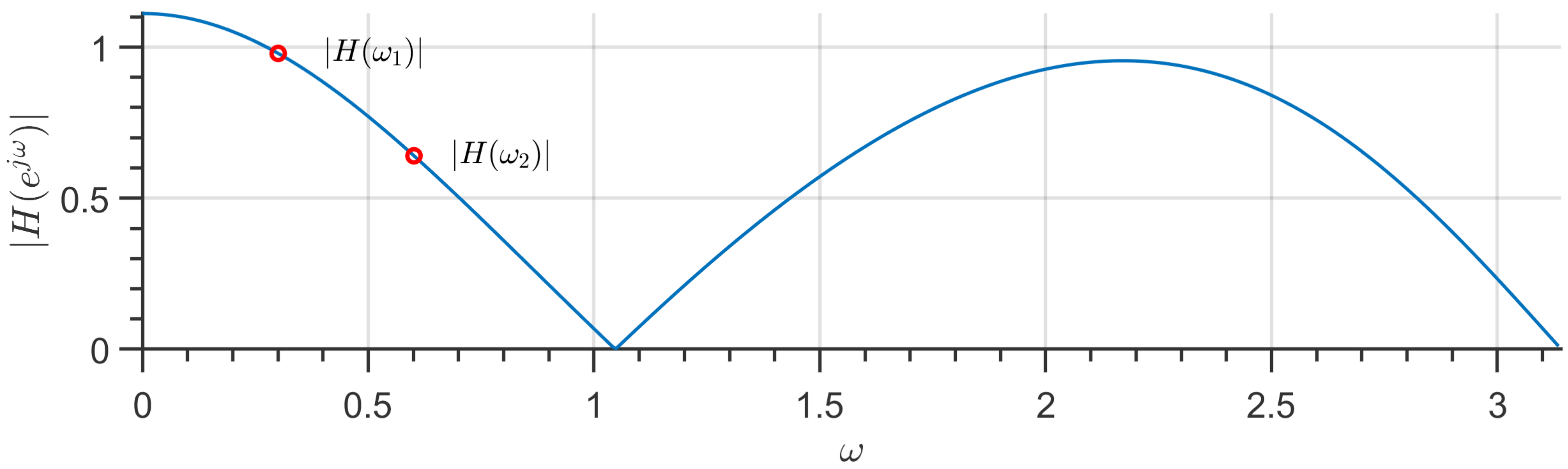
# Упрощенная схема



# Упрощенная схема




## Частотная характеристика



# Понятие собственной функции

## Собственный вектор (функция)

Для матричного уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

можно найти такие $\mathbf{x}$, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ – собственный вектор (функция), $\lambda$ – собственное значение.

# Понятие собственной функции

## Собственный вектор (функция)

Для матричного уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

можно найти такие $\mathbf{x}$, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ – собственный вектор (функция), $\lambda$ – собственное значение.

## Собственные функции ЛС-систем

Комплексные экспоненты $z^n$ являются собственными функциями ЛС-систем.

$$y(n) = h(n) * z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{n-m} = z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}}_{H(z)},$$

где $h(m)$ – импульсная характеристика ЛС-системы (***фильтра***).

# Передаточная функция фильтра

Следовательно

$$y(n) = H(z)z^n = H(z)x(n)\big|_{x(n)=z^n},$$

где

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}.$$

По сути, любая работа фильтра при подаче на вход комплексной экспоненты $z^n$ (с конкретным значением $z$) описывается одним комплексным числом равным $H(z)$.

$H(z)$ называют ***передаточной функцией*** фильтра, поскольку определяется соотношением типа вход-выход:

$$H(z) = \frac{y(n)}{x(n)}\bigg|_{x(n)=z^n}$$

# Пример

Пусть задан разностное уравнение фильтра

$$y(n) = x(n) - 0.9y(n-1)$$

Найти передаточную функцию $H(z)$.

Решение

# Пример

Пусть задан разностное уравнение фильтра

$$y(n) = x(n) - 0.9y(n-1)$$

Найти передаточную функцию $H(z)$.

## Решение

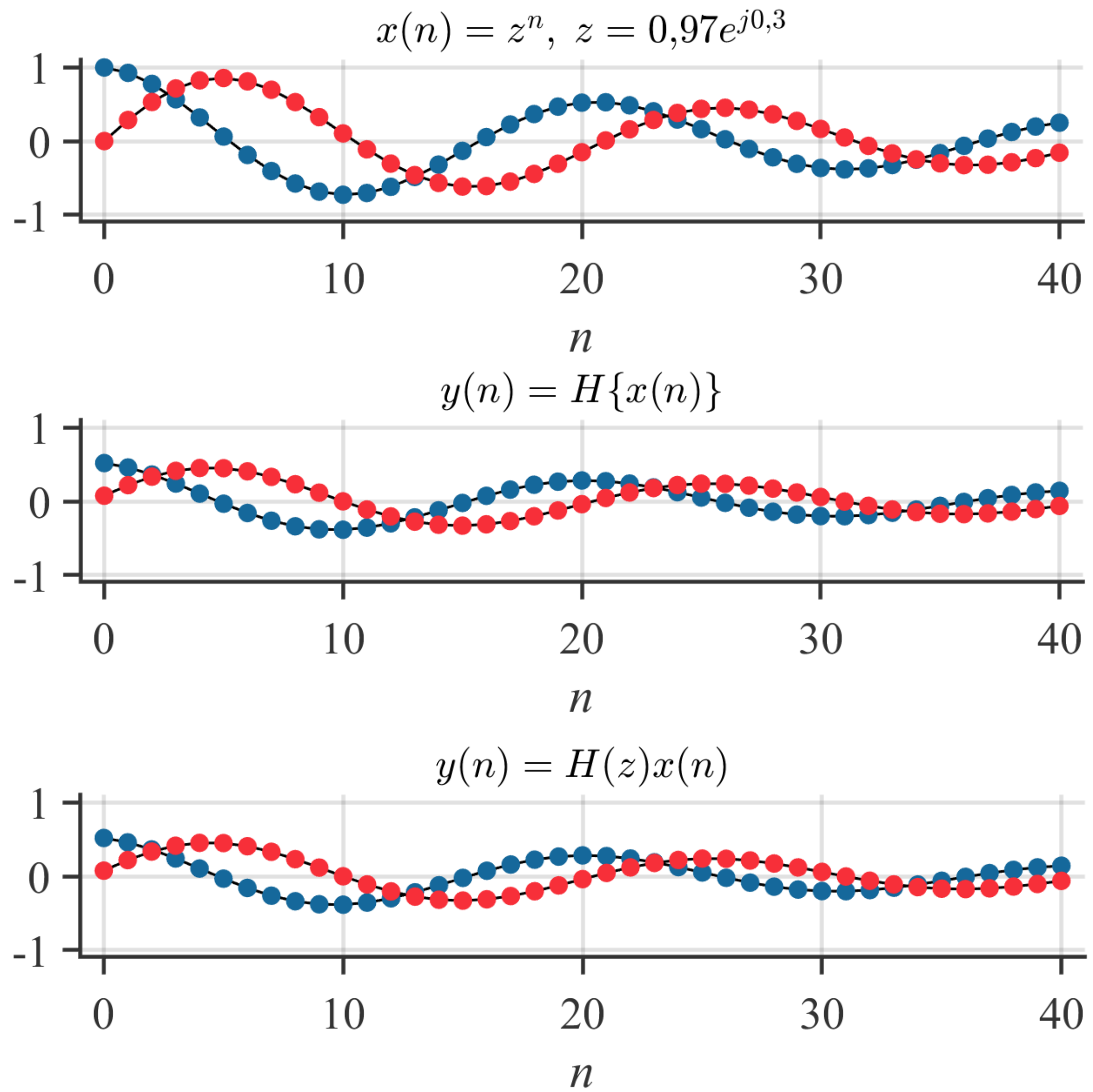
Мы знаем, что если $x(n) = z^n$, то выход фильтра $y(n) = H(z)z^n$. Подставим эти выражения в разностное уравнение ЛС-системы

$$H(z)z^n = z^n - 0.9H(z)z^{n-1}$$

$$H(z)(1 + 0.9z^{-1}) = 1$$

$$H(z) = \frac{1}{1+0.9z^{-1}}.$$

При $z = 0.97e^{j0.3}$, $H(z) = 0.52e^{j0.14}$



# Комплексная частотная характеристика фильтра

Пусть на вход фильтра с импульсной характеристикой $h(n)$ поступает сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty.$$

Выход фильтра:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n)H\left(e^{j\omega}\right).$$

Таким образом,

$$y(n) = x(n)H\left(e^{j\omega}\right).$$

Функция $H\left(e^{j\omega}\right)$ – ***комплексная частотная характеристика*** (КЧХ) фильтра или просто ***частотная характеристика***.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m}.$$

# Представление частотной характеристики

$H(e^{j\omega})$ имеет комплексные значения, чаще всего КЧХ представляют в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)},$$

где $\left|H(e^{j\omega})\right|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

## Пример

Ранее мы получили для фильтра

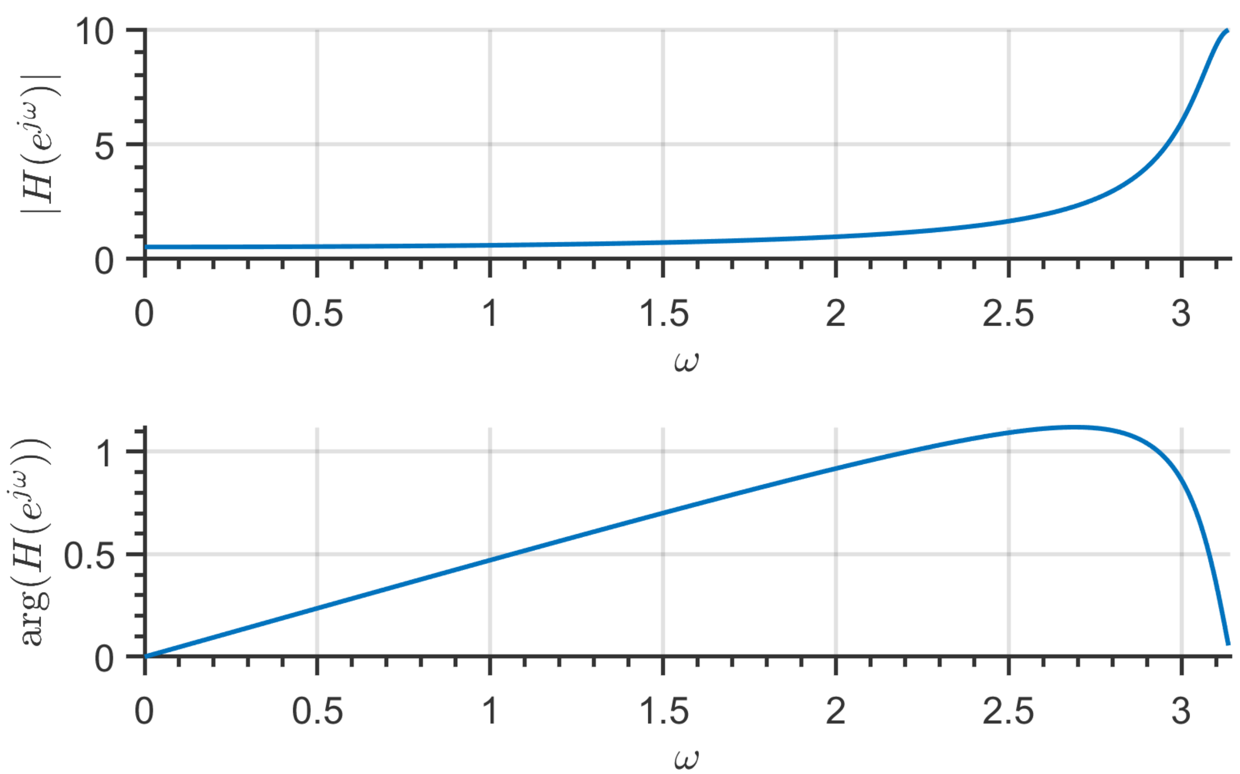
$$y(n) = x(n) - 0.9y(n-1)$$

передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}}.$$

Следовательно, КЧХ равна

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.9e^{-j\omega}}.$$



# Свойство симметричности КЧХ

Если $h(n)$ – вещественная последовательность, то КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m}.$$

имеет комплексно-сопряженную симметрию:

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega}).$$

*Домашнее задание*: доказать данное утверждение.

# Подача на вход фильтра синусоиды

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \phi_0) = \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\phi_0} e^{j\omega_0 n}}_{x_1(n)} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\phi_0} e^{-j\omega_0 n}}_{x_2(n)}.$$

Реакция фильтра на $x_1(n)$ будет

$$y_1(n) = H\left(e^{j\omega}\right) x_1(n) = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| e^{j\varphi(\omega_0)} \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\phi_0} e^{j\omega_0 n}}_{x_1(n)}.$$

Реакция фильтра на $x_2(n)$ будет

$$y_2(n) = H\left(e^{j\omega}\right) x_2(n) = \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right| e^{-j\varphi(\omega_0)} \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\phi_0} e^{-j\omega_0 n}}_{x_2(n)}.$$

# Подача на вход фильтра синусоиды

Далее найдем $y(n)$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) =$$
$$= \frac{A}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\left(e^{j(\phi_0+\varphi(\omega_0))}e^{j\omega_0 n} + e^{-j(\phi_0+\varphi(\omega_0))}e^{-j\omega_0 n}\right) =$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \phi_0 + \varphi(\omega_0))$$

# Подача на вход фильтра синусоиды

Далее найдем $y(n)$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) =$$
$$= \frac{A}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\left(e^{j(\phi_0+\varphi(\omega_0))}e^{j\omega_0 n} + e^{-j(\phi_0+\varphi(\omega_0))}e^{-j\omega_0 n}\right) =$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \phi_0 + \varphi(\omega_0))$$

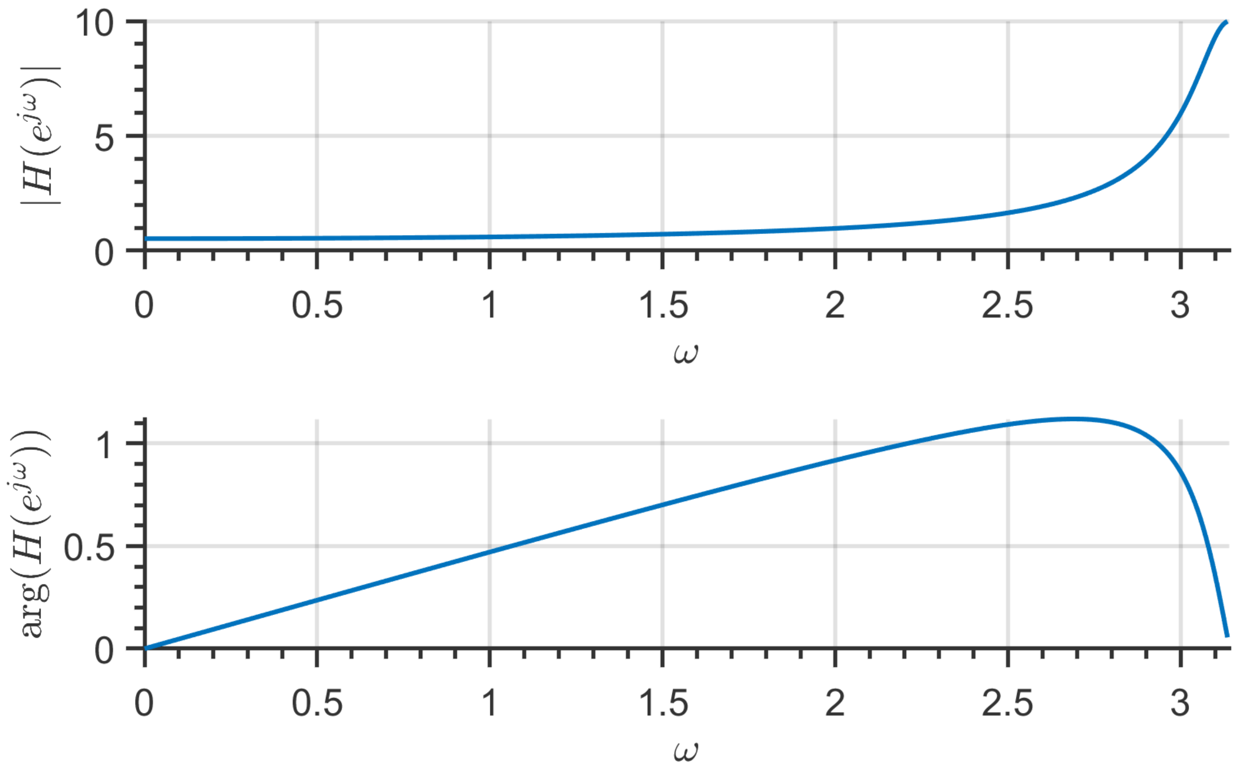
## Пример

Для фильтра

$$y(n) = x(n) - 0.9y(n-1)$$

мы получили

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 + 0.9e^{-j\omega}}.$$



# Линейная ФЧХ

Реакция фильтра на синусоиду

$$y(n) = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \phi_0 + \varphi(\omega_0)).$$

Желательно, чтобы выходная синусоида была бы задержанной на $n_d$ отсчетов версией входной синусоиды, причем задержка $n_d$ не должна зависеть от конкретной частоты $\omega_0$:

$$y(n) = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0(n - n_d) + \phi_0).$$

Сравнивая два приведенных выражения, можно сделать вывод, что ФЧХ должно иметь вид:

$$\varphi(\omega) = -n_d\omega.$$

# Групповая задержка

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega}$$

TODO …