МАСЪАЛАҲО БАРОИ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДАИ БАЙНАЛМИЛАЛӢ АЗ МАТЕМАТИКА БАХШИДА БА ОЛИМ-ЭНСИКЛОПЕДИСТИ ОЛАМШУМУЛИ ФОРСУ ТОҶИК УМАРИ ХАЙЁМ

ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕЖДУНАРОДНОЙ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПОСВЯЩЁННОЙ ВСЕМИРНО ИЗВЕСТНОМУ ПЕРСИДСКО-ТАДЖИКСКОМУ УЧЁНОМУ – ЭНЦИКЛОПЕДИСТУ ОМАРУ ХАЙЯМУ

PROBLEMS FOR THE INTERNATIONAL INTERNET OLYMPIAD IN MATHEMATICS DEDICATED TO THE WORLD-FAMOUS PERSIAN-TAJIK SCIENTIST – ENCYCLOPEDIST OMAR KHAYYAM

(23-25.11.2023)

1. Ададҳои $a<b<c$ решаҳои муодилаи $x^3-3x+1=0$ мебошанд. Ёфта шавад: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

(6)

(Числа $a<b<c$ *являются корнями уравнения* $x^3-3x+1=0$. *Найти:* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.*)*

(The numbers $a<b<c$ *are the roots of the equation* $x^3-3x+1=0$. *Find:* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.*)*

2. Барои кадом қиматҳои параметри *a*, системаи муодилаҳои зерин ақаллан як ҳал дорад *(Для каких значений параметра a, следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение) (For what values of the parameter a does the following system of equations have at least one solution):*

$$\begin{cases} \left|11-14\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}}\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}}-1\right|=3+\left|-20\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}}-7\right|+\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y)}{12}}, \\ 2\left[(x-a)^2+y^2+2y\right]+1=2\sqrt{(x-a)^2+y^2+2y+\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

(8)

3. Матритсаи зерин дода шудааст *(Дана следующая матрица) (Given a matrix)* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ёбед *(Найти) (Find)*: A^n.

(7)

4. Ҳамаи функсияҳои $f: Z \to Z$ – ро ёбед, ки барояшон $n^2+4f(n)=f(f(n))^2 \ \ \forall\, n \in Z$.
(Найдите все функции $f: Z \to Z$ *такие, что* $n^2+4f(n)=f(f(n))^2$ *для всех* $n \in Z$*).*
(Find all functions $f: Z \to Z$ *such that* $n^2+4f(n)=f(f(n))^2$ *for all* $n \in Z$*).*

(10)

5. Бигузор $\{a_n\}$ пайдарпайии номаҳдуд ва афзуншаванда бошад. Маълум аст, ки барои ҳар гуна $i \in N, a_i > 0$ ва миёнаи арифметикии чор элементи пайдарпайи он ба ин пайдарпайӣ тааллуқ дорад. Исбот карда шавад, ки $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ наздикшаванда аст ва ҳудуди он ёфта шавад.

(Пусть $\{a_n\}$ является неограниченной и возрастающей последовательностью. Известно, что для любого $i \in N,\ a_i > 0$ и его среднее арифметическое из четырех последовательных элементов относится к этой последовательности. Доказать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится и найти его предел.)

(Let $\{a_n\}$ be an unbounded and increasing sequence. It is known that for any $i \in N,\ a_i > 0$ and its arithmetic mean of four consecutive elements belongs to this sequence. Prove that $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converges and find its limit.)

(10)

6. Исбот кунед, ки агар $y(x)$ ҳалли масъалаи зерини Коши бошад:

$\begin{cases} y' = 1 - x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, пас $0 \le y(x) \le \frac{2}{3}$ $\forall x \in [0; 1]$ аст.

(Доказать, что если $y(x)$ решение задачи Коши $\begin{cases} y' = 1 - x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, то $0 \le y(x) \le \frac{2}{3}$ для всех $x \in [0; 1]$).

(Prove that if y(x) is a solution to the Cauchy problem $\begin{cases} y' = 1 - x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, then $0 \le y(x) \le \frac{2}{3}$ for all x∈[0;1]).

(9)