Теория и применение цифровой обработки сигналов

Анализ дискретных систем во временной области (Разностные уравнения)

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Связь свертки с разностными уравнениями

Свертка

Свертка является **нерекурсивным** способом представления ЛС-систем (цифровых фильтров). Свертка описывает систему как линейную комбинацию входных значений $x(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Связь свертки с разностными уравнениями

Свертка

Свертка является **нерекурсивным** способом представления ЛС-систем (цифровых фильтров). Свертка описывает систему как линейную комбинацию входных значений $x(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

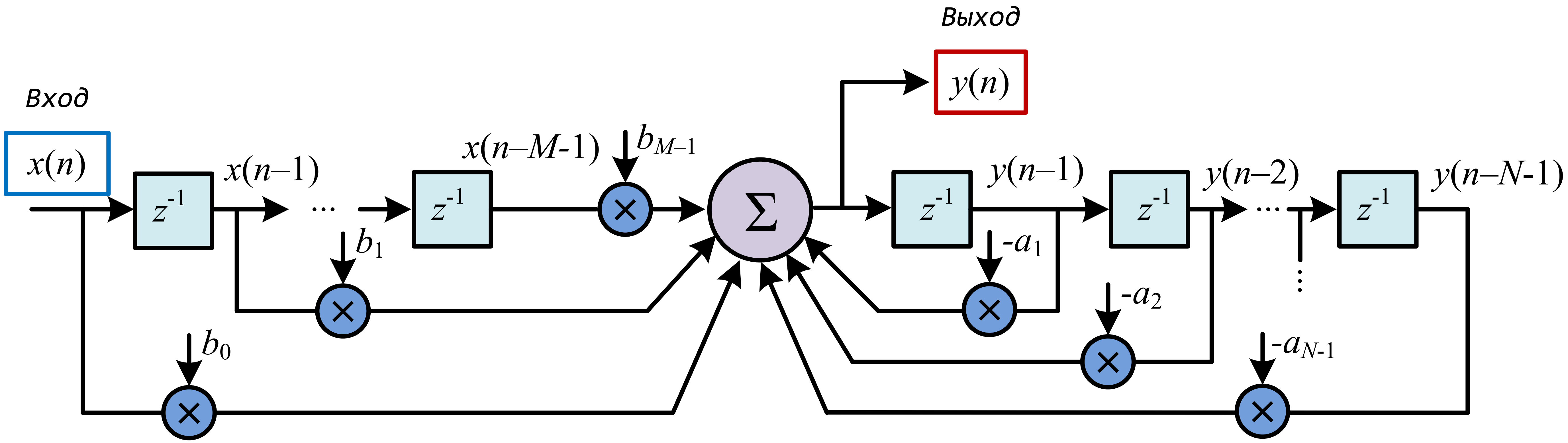
Разностное уравнение

Разностное уравнение – **рекурсивный** способ представления ЛС-систем.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\, y(n-k).$$

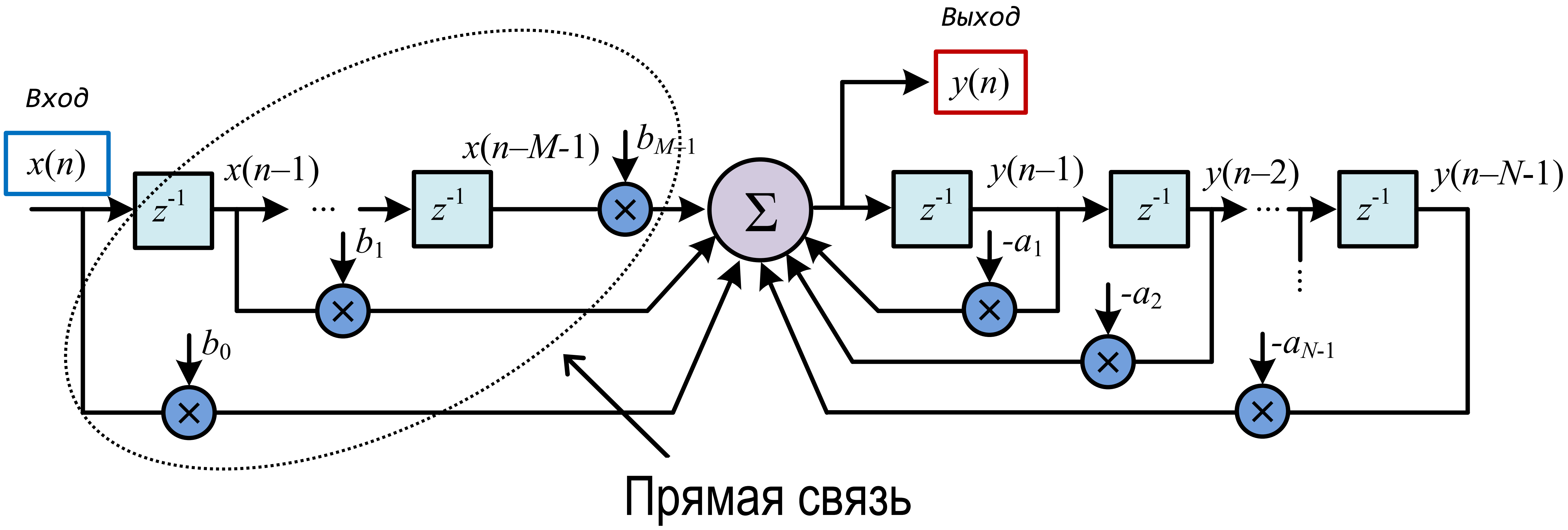
b_k, a_k – постоянные коэффициенты.

Цифровой фильтр



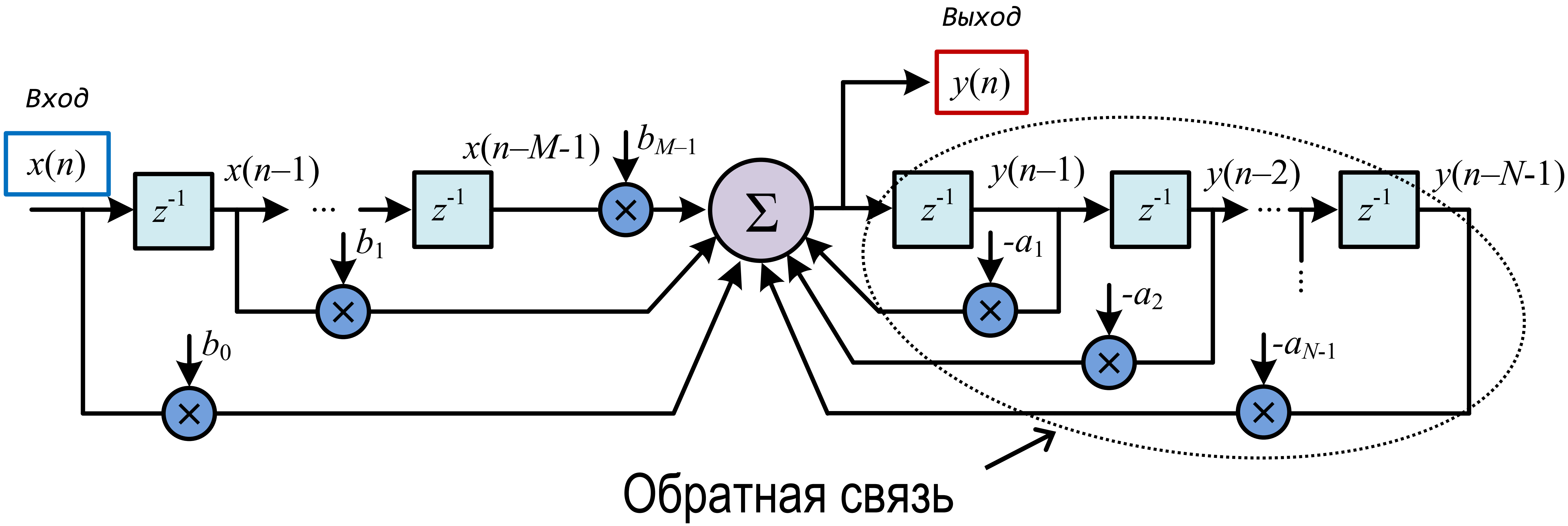
$$y(n) = \cdots$$

Цифровой фильтр



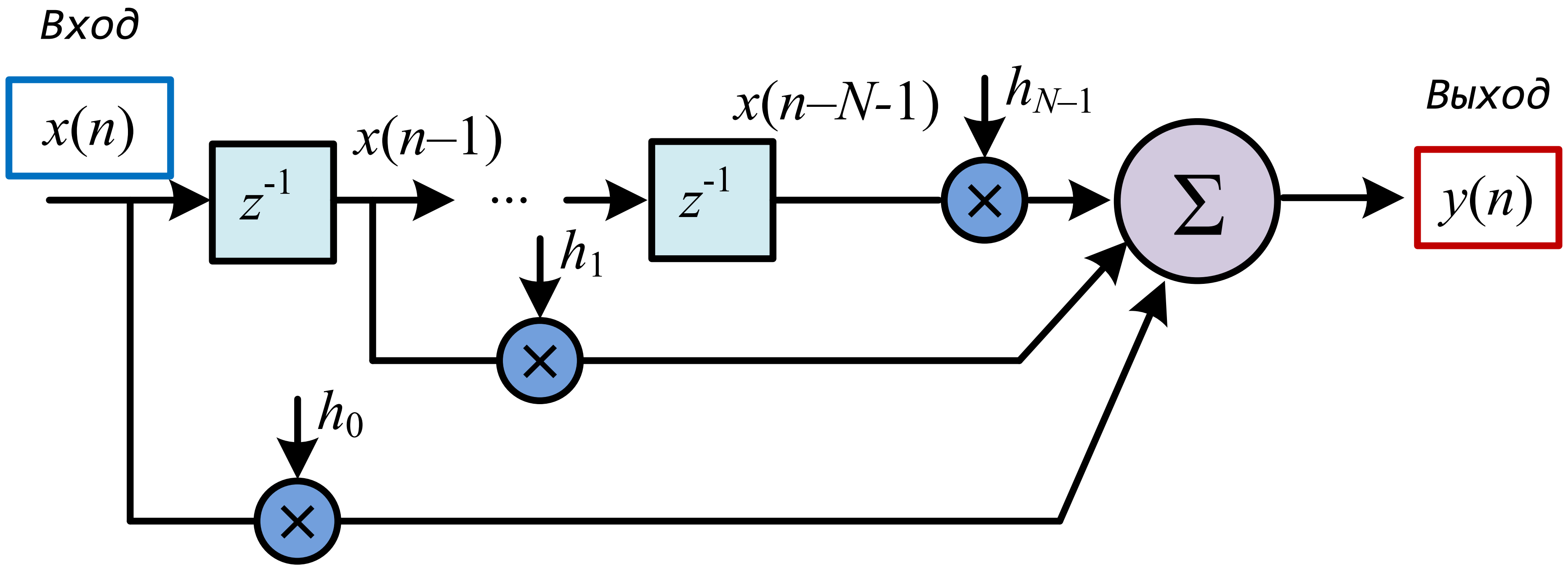
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) + \cdots$$

Цифровой фильтр



$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k)$$

Цифровой КИХ-фильтр



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k)$$

Фильтр скользящего среднего (пример)

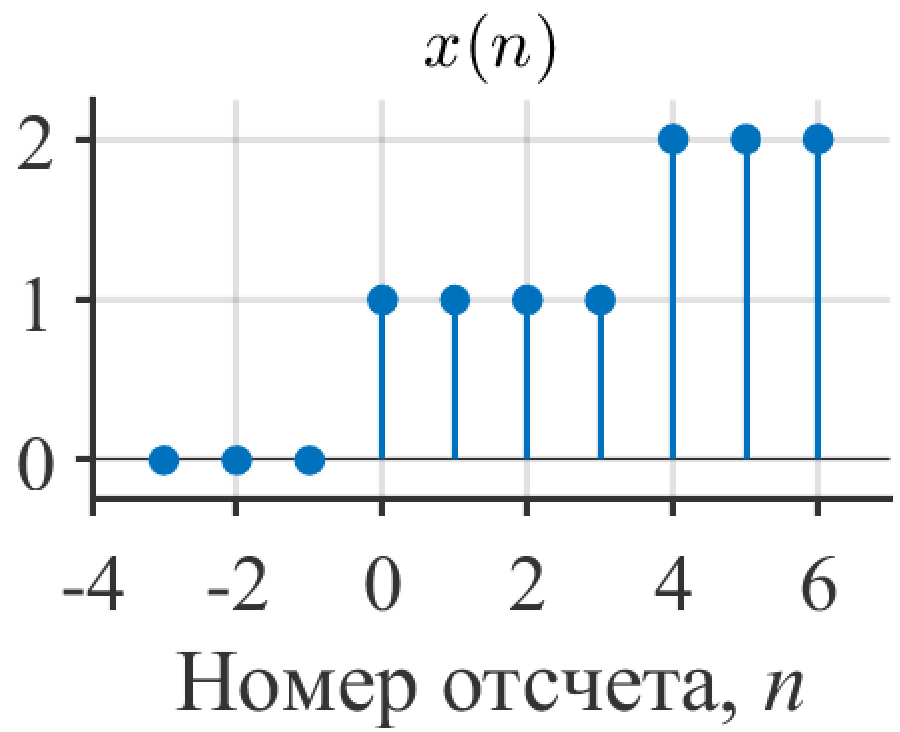
Рассмотрим задачу вычисления скользящего среднего для последовательности $x(n)\ n = 0, 1, \ldots$. Выполним усреднение по 3 точкам

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Пусть на вход подается сигнал



Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Расчет выходных значений

n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0	?								

Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Расчет выходных значений

n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0	$\frac{1}{3}$	?							

Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Расчет выходных значений

n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$?$						

Фильтр скользящего среднего

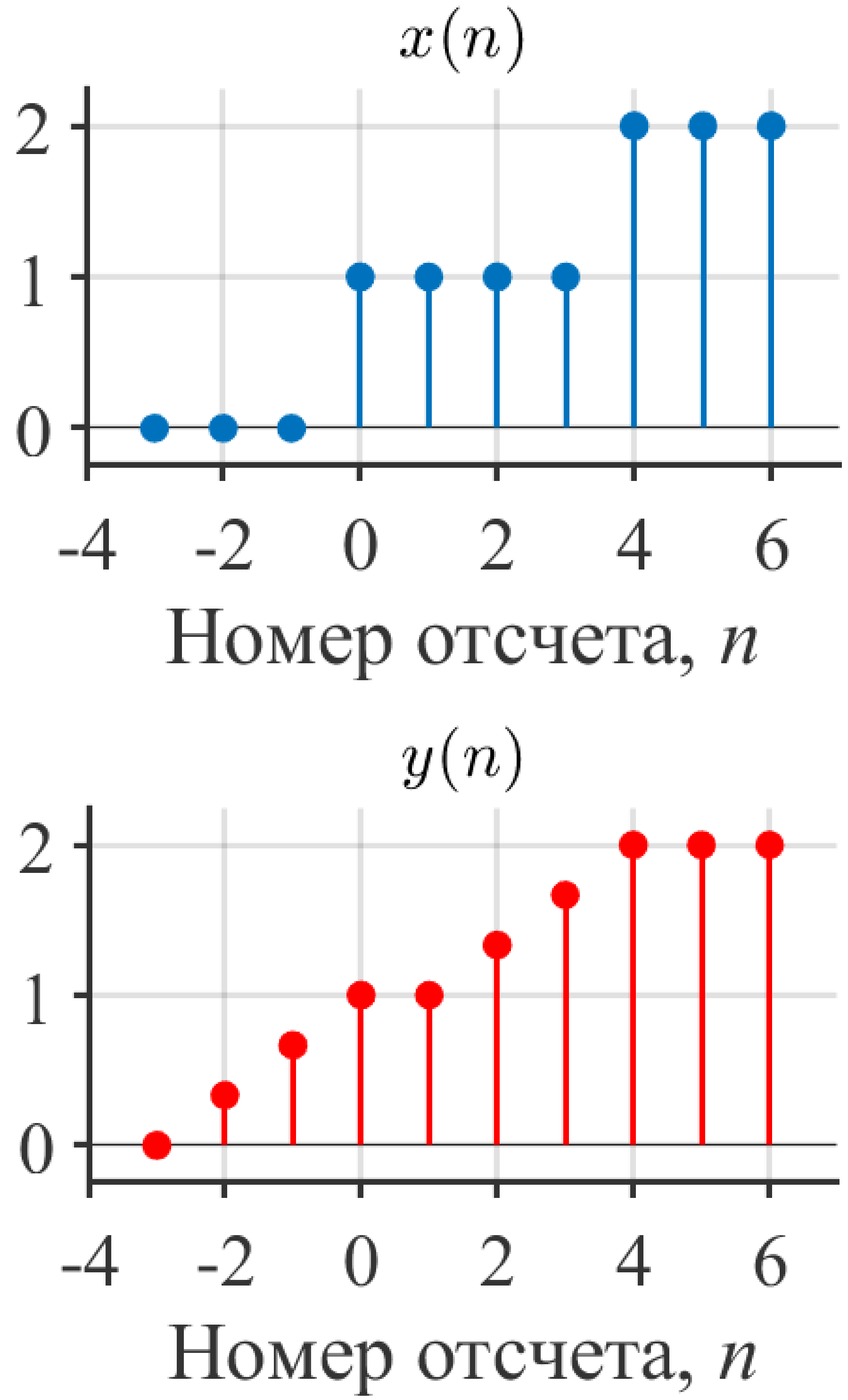
$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Расчет выходных значений

n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2	2	2

Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}\left(x(n) + x(n+1) + x(n+2)\right)$$



Фильтр скользящего среднего

– Обычно n – означает время. В этом случае желательно, чтобы фильтр был ***детерминированным*** (каузальным). Это означает, что выход не должен опережать вход.

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

– У данного фильтра выход «опережает» вход. Такие фильтры называют ***недетерминированными*** и обычно не используют на практике.

– недетерминированные фильтры нельзя реализовать в системах реального времени.

Детерминированный фильтр скользящего среднего

Детерминированная версия фильтра скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n-2) + x(n-1) + x(n))$$

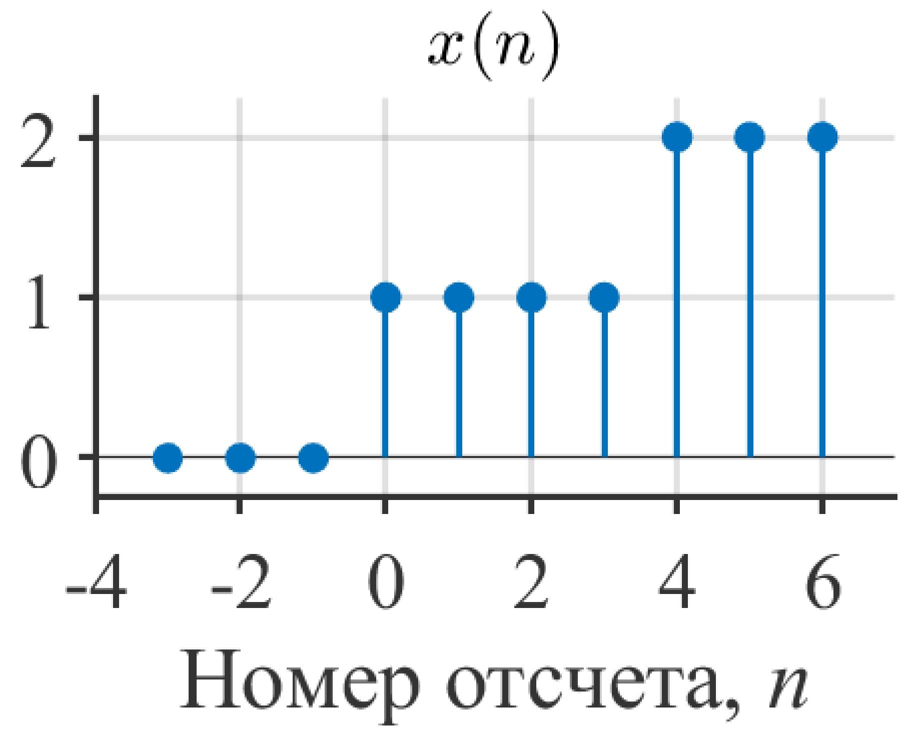
n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2

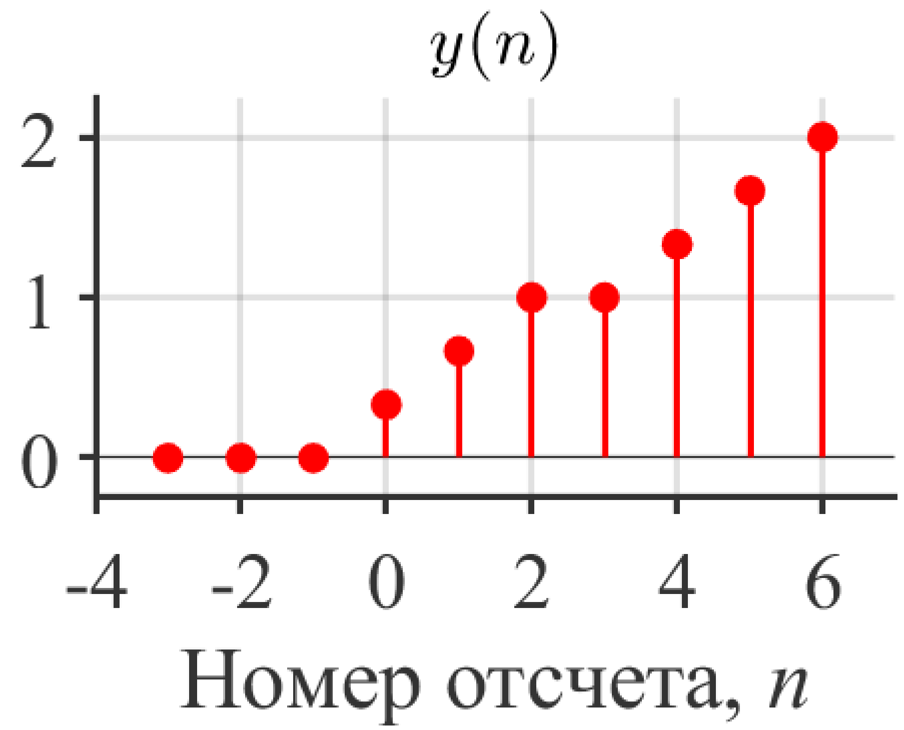
Детерминированный фильтр скользящего среднего

Детерминированная версия фильтра скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n-2) + x(n-1) + x(n))$$

n	< -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$y(n)$	0			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2





Общая формула КИХ-фильтра

Фильтр скользящего среднего представляет собой частный случай цифрового КИХ-фильтра

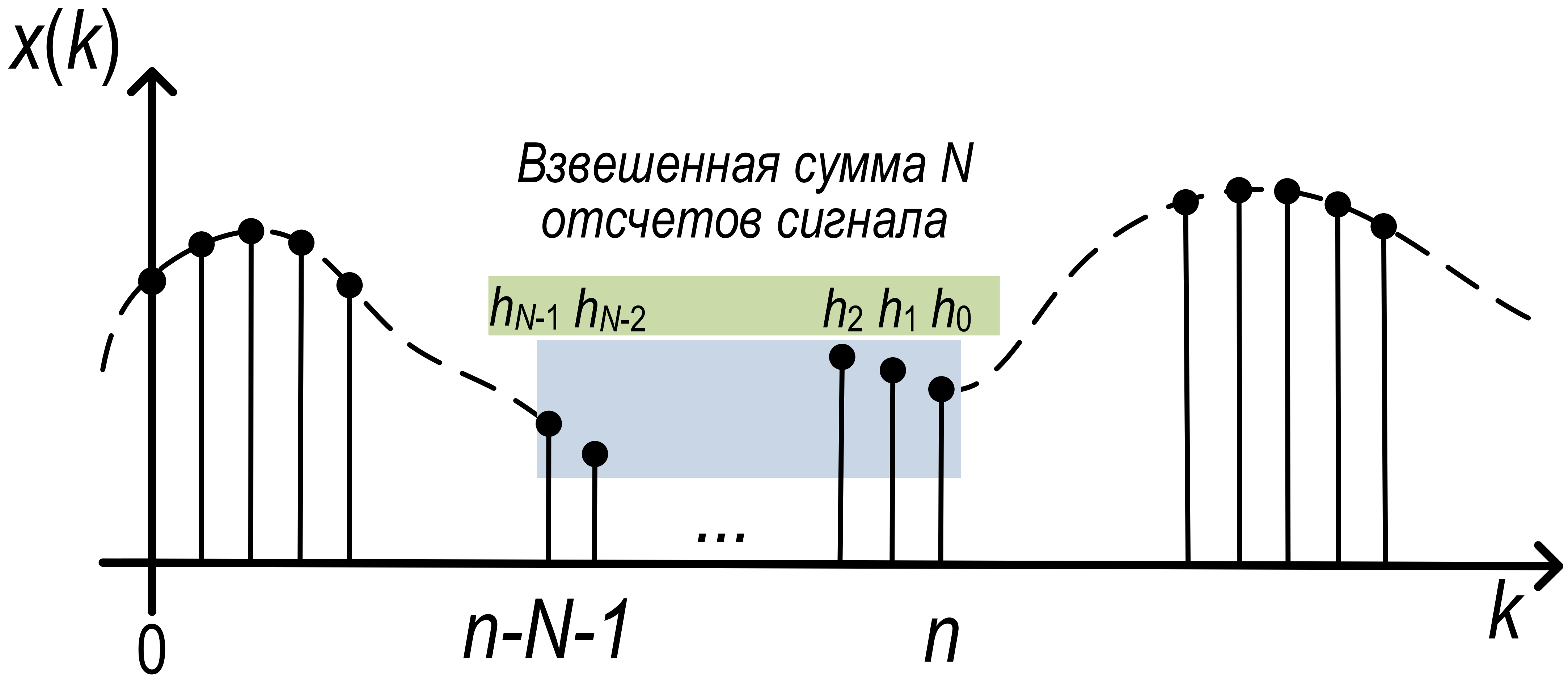
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h_k,$$

у которого все коэффициенты h_k имеют значения $1/N$.

КИХ-фильтр

Выход КИХ-фильтра представляет собой взвешенную сумму данных внутри скользящего «окна» данных

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h_k,$$



Пример работы КИХ-фильтра

Пусть на вход поступает сигнал

$$x(n) = \begin{cases} (1.02)^n + 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \le n \le 40 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для фильтрации будем использовать N-точечный усредняющий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

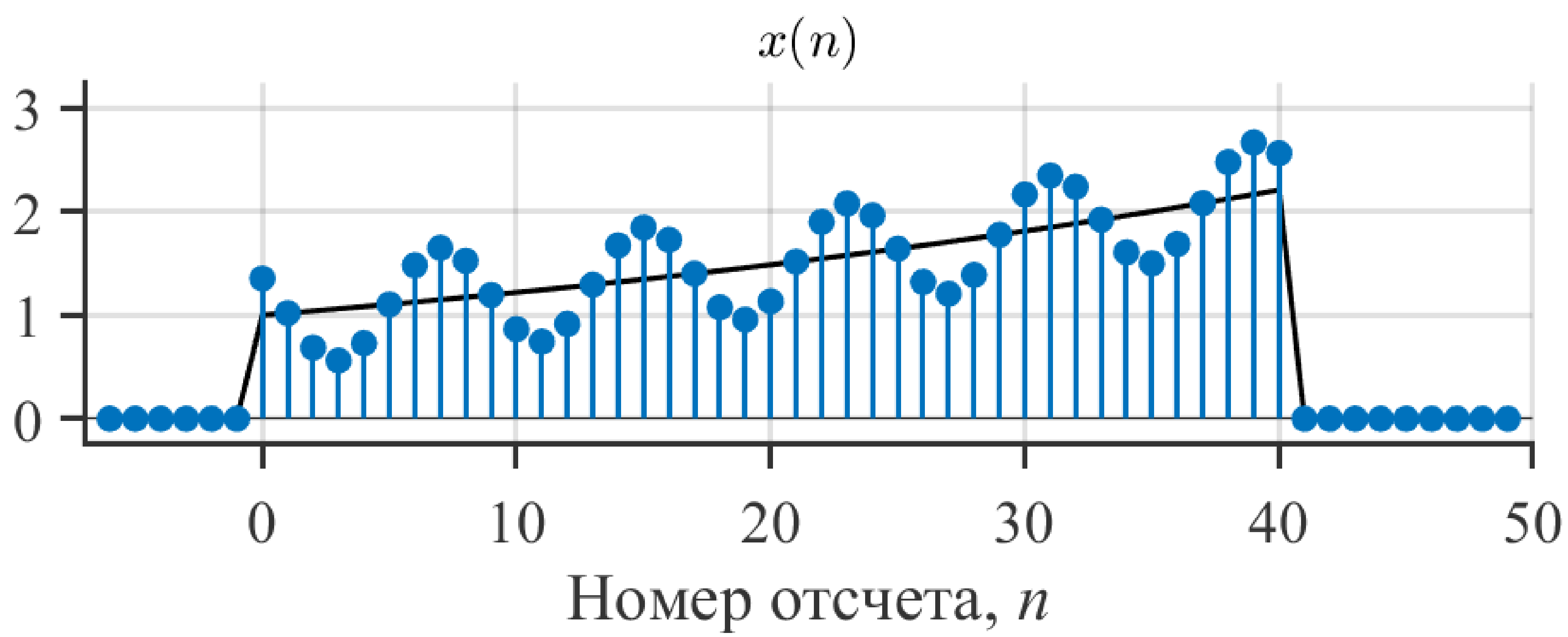
Пример работы КИХ-фильтра

Пусть на вход поступает сигнал

$$x(n) = \begin{cases} (1.02)^n + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right), & 0 \le n \le 40 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

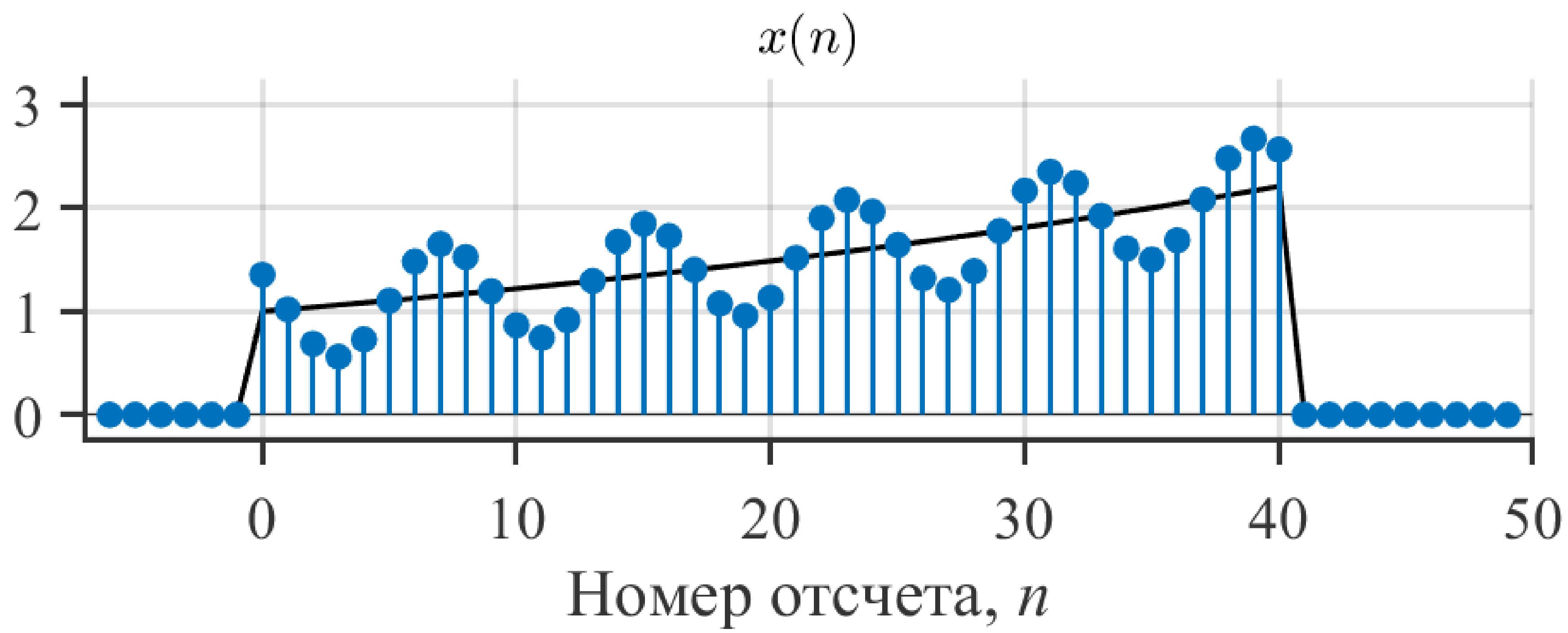
Для фильтрации будем использовать N-точечный усредняющий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

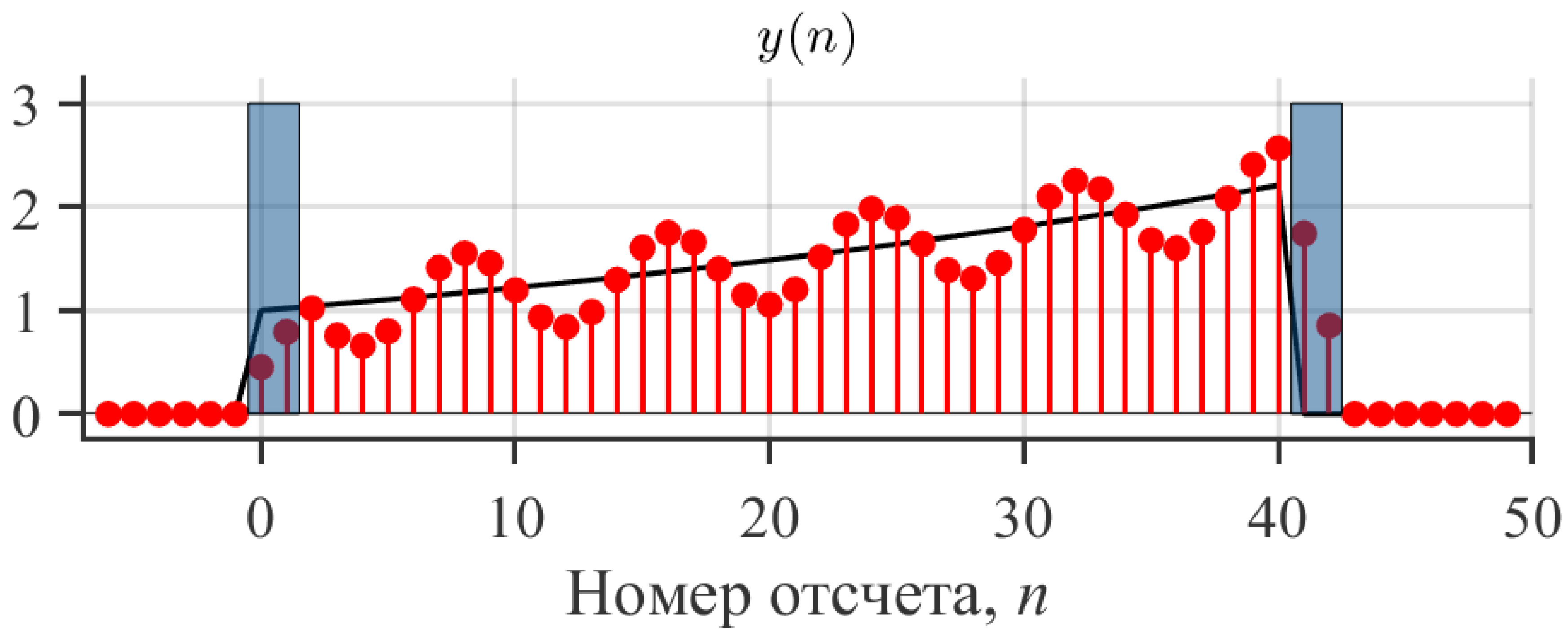


Пример работы КИХ-фильтра

Входной сигнал

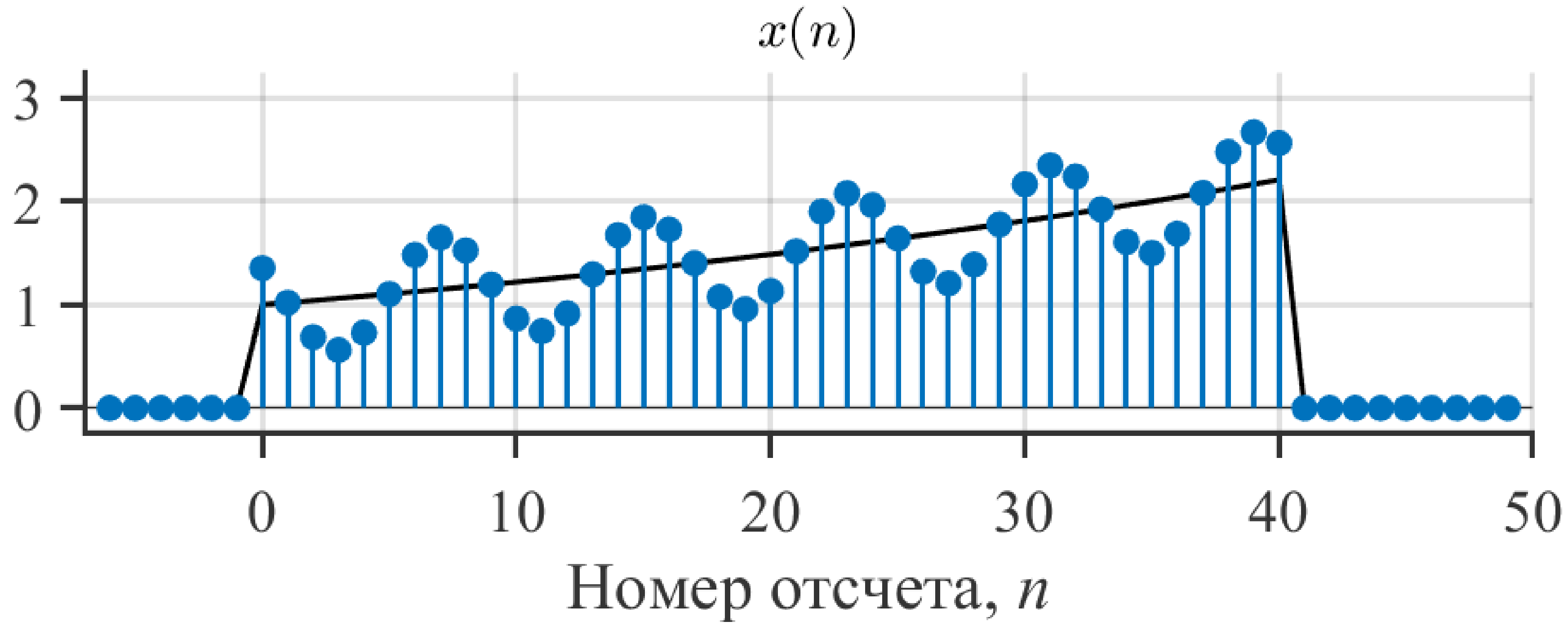


Выходной сигнал ($N = 3$)

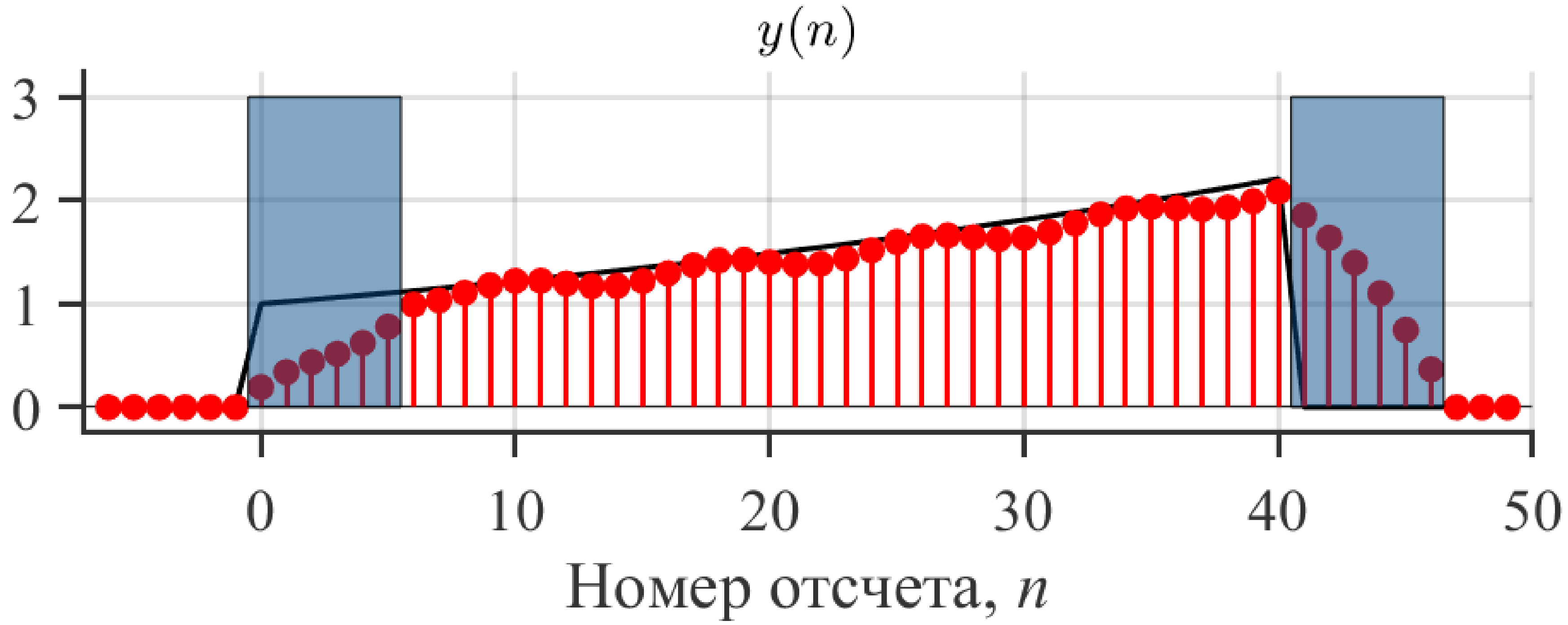


Пример работы КИХ-фильтра

Входной сигнал



Выходной сигнал ($N = 7$)



MATLAB реализация

В MATLAB разностное уравнение реализует функция

```
y=filter(b,a,x)
```

где b – коэффициенты прямой связи,
a – коэффициенты обратной связи,
x – входной сигнал.

Задача

Реализовать разностное уравнения

$$y(n) = 0{,}3x(n) + 0{,}6x(n-1) + 0{,}3x(n-2) - 0{,}9y(n-2)$$

в MATLAB.

Импульсная характеристика (КИХ-фильтр)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Пусть $x(n) = \delta(n)$, тогда

Импульсная характеристика (КИХ-фильтр)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Пусть $x(n) = \delta(n)$, тогда

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \delta(n-k) = \begin{cases} b_n, & n = 0,1,2,\dots M-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Импульсная характеристика (КИХ-фильтр)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Пусть $x(n) = \delta(n)$, тогда

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \delta(n-k) = \begin{cases} b_n, & n = 0,1,2,\ldots M-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Табличное представление

n	< 0	0	1	2	3	$\ldots$	$M-1$	M	$n > M$
$x(n) = \delta(n)$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$y(n) = h(n)$	0	b_0	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_{M-1}	0	0

Связь разностного уравнения и свертки

Система с импульсной характеристикой $h(n) = \alpha^n u(n)$ описывается

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x(n-k).$$

Эту систему также можно описать выражением

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n-1).$$

Данное уравнение является частным случаем линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \, y(n-k).$$

Решение разностных уравнений

Если есть разностное уравнение, то его решение имеет следующий вид:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n),$$

где $y_h(n)$ – однородное решение, $y_p(n)$ – частное решение.

Решение разностных уравнений

Если есть разностное уравнение, то его решение имеет следующий вид:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n),$$

где $y_h(n)$ – однородное решение, $y_p(n)$ – частное решение.

Однородное решение – это отклик системы на начальные условия, в предположении, что входной сигнал $x(n) = 0$.

Решение разностных уравнений

Если есть разностное уравнение, то его решение имеет следующий вид:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n),$$

где $y_h(n)$ – однородное решение, $y_p(n)$ – частное решение.

Однородное решение – это отклик системы на начальные условия, в предположении, что входной сигнал $x(n) = 0$.

Частное решение – отклик системы на ненулевое входное воздействие $x(n)$ при нулевых начальных условиях $y(n) = 0$ при $n < 0$.

Решение разностных уравнений

Однородное решение – это отклик системы на начальные условия, в предположении, что входной сигнал $x(n) = 0$.

$$y(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k \, y(n-k) = 0.$$

Решение может быть найдено, если предположить, что $y_h(n) = z^n$. Тогда

$$z^n + \sum_{k=1}^{p} a_k \, z^{n-k} = 0.$$

$$z^{n-p} \underbrace{\left(z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \cdots + a_{p-1} z + a_p\right)}_{\text{характеристический полином}} = 0.$$

Решение разностных уравнений

Однородное решение – это отклик системы на начальные условия, в предположении, что входной сигнал $x(n) = 0$.

$$z^{n-p}\underbrace{\left(z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \cdots + a_{p-1} z + a_p\right)}_{\text{характеристический полином}} = 0.$$

Все p корней разные $z_i \neq z_k$ при $i \neq k$. Общее решение имеет вид

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{p} A_k\, z_k^n,$$

где A_k выбираются, чтобы удовлетворять начальным условиям.

Частное решение в большинстве случаев имеет вид:

$$y_p(n) = C\alpha^n u(n).$$

Решение разностных уравнений

Задача

Найти решение разностного уравнения

$$y(n) - 0.25y(n-2) = x(n).$$

для $x(n) = u(n)$ и начальных условий $y(-1) = 1$ и $y(-2) = 0$.