Теория и применение цифровой обработки сигналов

Линейные стационарные системы
(= цифровые фильтры)

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

DIGITAL FILTERS

R. W. HAMMING

Bell Laboratories
and
Naval Postgraduate School

PRENTICE-HALL, INC., ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY, 1977

X 37

Р. В. ХЕММИНГ

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Перевод с английского
В. И. ЕРМИШИНА
Под редакцией
профессора А. М. ТРАХТМАНА

27/VI 80

МОСКВА
«СОВЕТСКОЕ РАДИО»
1980

ности данных конечной длины мы не сможем вычислить значения, близкие к концам этой последовательности. Следовательно, здесь имеет место потеря данных в том смысле, что количество данных на выходе меньше, чем на входе. Обычная практика добавления последовательности из нулевых значений за пределами одного или обоих концов массива данных для того, чтобы можно было вычислить столько же выходных значений, сколько имеется первоначальных входных, в данном случае представляется сомнительной (см. также разд. 10.7).

Предполагается, что коэффициенты фильтра c_k и d_k представляют собой *константы* и не изменяются со временем. Такие фильтры, называемые *инвариантными во времени*, наиболее часто используются на практике. Фильтры, изменяющиеся во времени, иногда бывают полезны, но их обсуждение лежит вне сферы этой книги.

Наконец, фильтр должен быть реализован таким образом, чтобы вычисления осуществлялись с применением чисел конечной длины. Процесс квантования чисел выполняется с округлением как в коэффициентах фильтра, так и в арифметике, выполняемой машиной. Поэтому в полученных окончательных числах y_n присутствуют ошибки округления. Часто удобнее представлять фильтр в виде бесконечного числа членов, причем так, что каждый член имеет неограниченную точность и используется абсолютно точная арифметика, однако в конце мы должны будем вернуться к реальности. Более того, выбранный путь выполнения арифметических операций может иногда значительно изменять числа, получаемые в результате вычислений. Этот вопрос более подробно мы рассмотрим в гл. 12 и 13.

1.2. Почему следует интересоваться цифровыми фильтрами?

Слово *фильтр* происходит из электротехники, где фильтры используются для преобразования электрических сигналов из одной формы в другую, главным образом, чтобы исключить (отфильтровать) различные частоты в сигнале. Как уже было видно, цифровой фильтр представляет собой линейную комбинацию входных данных x_n, а может быть, и выходных y_n и заключает в себе многие из операций, которые выполняются при обработке сигнала.

Для удобства предположим, что берутся отсчеты через единицу времени и n-й отсчет сигнала представляется в виде x_n. Так, например, можно представить кровяное давление, волны мозга, высоту волн на пляже или цену акций на бирже в виде непрерывных

14

Отклик фильтра

Отклик дискретной системы

$$y(n) = H\{x(n)\}.$$

Что изменится, если учесть свойство *линейности*?

Отклик фильтра

Отклик дискретной системы

$$y(n) = H\{x(n)\}.$$

Что изменится, если учесть свойство *линейности*?

1) представим $x(n)$ в виде суммы масштабированных единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

Отклик фильтра

Отклик дискретной системы

$$y(n) = H\{x(n)\}.$$

Что изменится, если учесть свойство *линейности*?

1) представим $x(n)$ в виде суммы масштабированных единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

2) линейность = аддитивность + однородность. Воспользуемся аддитивностью

$$y(n) = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x(k)\delta(n-k)\}$$

Отклик фильтра

Отклик дискретной системы

$$y(n) = H\{x(n)\}.$$

Что изменится, если учесть свойство *линейности*?

1) Представим $x(n)$ в виде суммы масштабированных единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

2) Линейность = аддитивность + однородность. Воспользуемся аддитивностью

$$y(n) = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x(k)\delta(n-k)\}$$

3) Учитывая однородность получаем:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x(k)\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H\{\delta(n-k)\}.$$

Отклик фильтра

4) Перепишем выражения для фильтра в виде:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n),$$

где $h_k(n) = H\{\delta(n-k)\}$.

Отклик фильтра

4) Перепишем выражения для фильтра в виде:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n),$$

где $h_k(n) = H\{\delta(n-k)\}$.

5) Учтем свойство стационарности.

Если $h(n) = H\{\delta(n)\}$, то для **стационарной** системы отклик на задержанный импульс равен $H\{\delta(n-k)\} = h_k(n) = h(n-k)$. Следовательно,

$$\underbrace{y(n)}_{\text{выход}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}_{\text{сумма}} \underbrace{x(k)}_{\substack{\text{масштаб–}\\ \text{ированных}}} \underbrace{h(n-k)}_{\substack{\text{сдвинутых}\\ \text{импульсных}\\ \text{характеристик}}} = x(n) * h(n).$$

Данное выражение называется ***сверткой***.

$h(n)$ – ***импульсная характеристика*** фильтра.

Пример вычисления отклика фильтра

Рассмотрим фильтр с импульсной характеристикой $h(n) = 2^{-n}u(n)$. Найти его реакцию на входной сигнал $x(n) = u(n) - u(n - 10)$.

Пример вычисления отклика фильтра

Рассмотрим фильтр с импульсной характеристикой $h(n) = 2^{-n}u(n)$. Найти его реакцию на входной сигнал $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

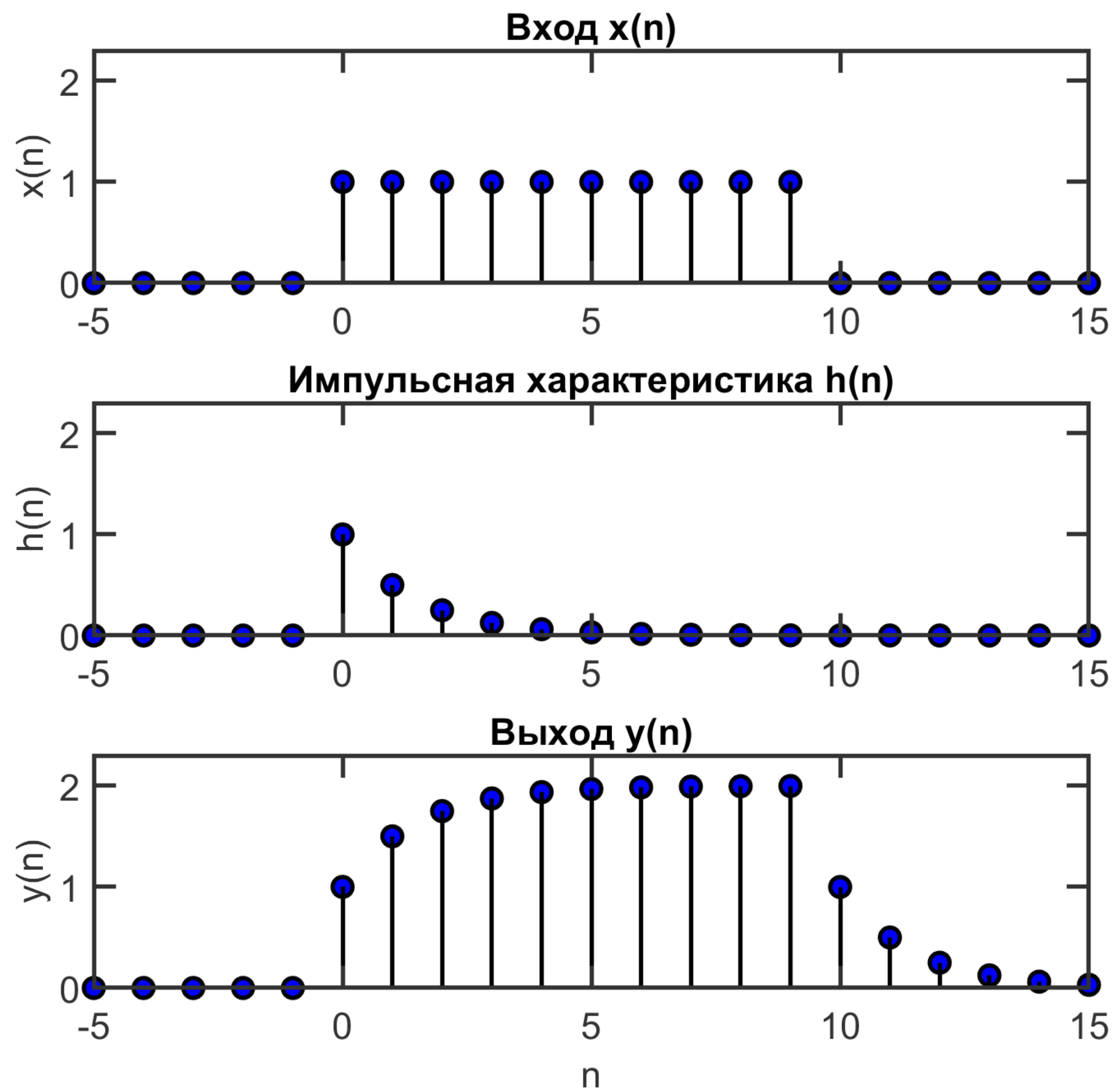
Решение

Вход $x(n)$ можно переписать в виде

$$x(n) = \sum_{k=0}^{9} \delta(n-k).$$

Тогда общий отклик равен

$$y(n) = \sum_{k=0}^{9} h(n-k) = \sum_{k=0}^{9} 2^{k-n}u(n-k)$$



Пример вычисления свертки

Рассмотрим фильтр с импульсной характеристикой

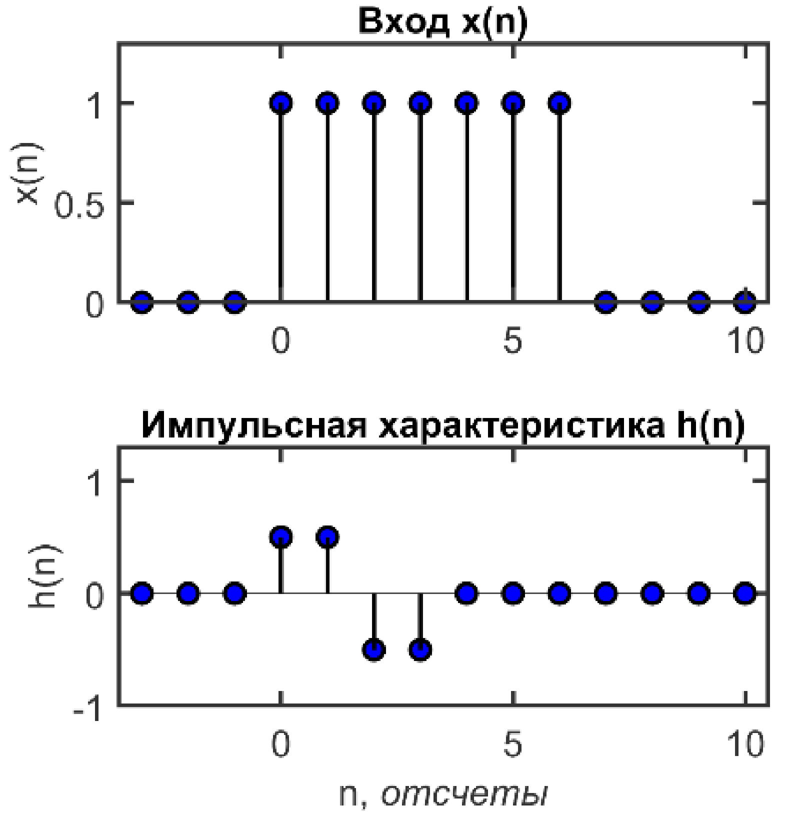
$$h(n) = \frac{1}{2}\big(\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3)\big).$$

Найти реакцию фильтра входной сигнал

$$x(n) = \sum_{k=0}^{6} \delta(n-k).$$

Уравнение свертки

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$



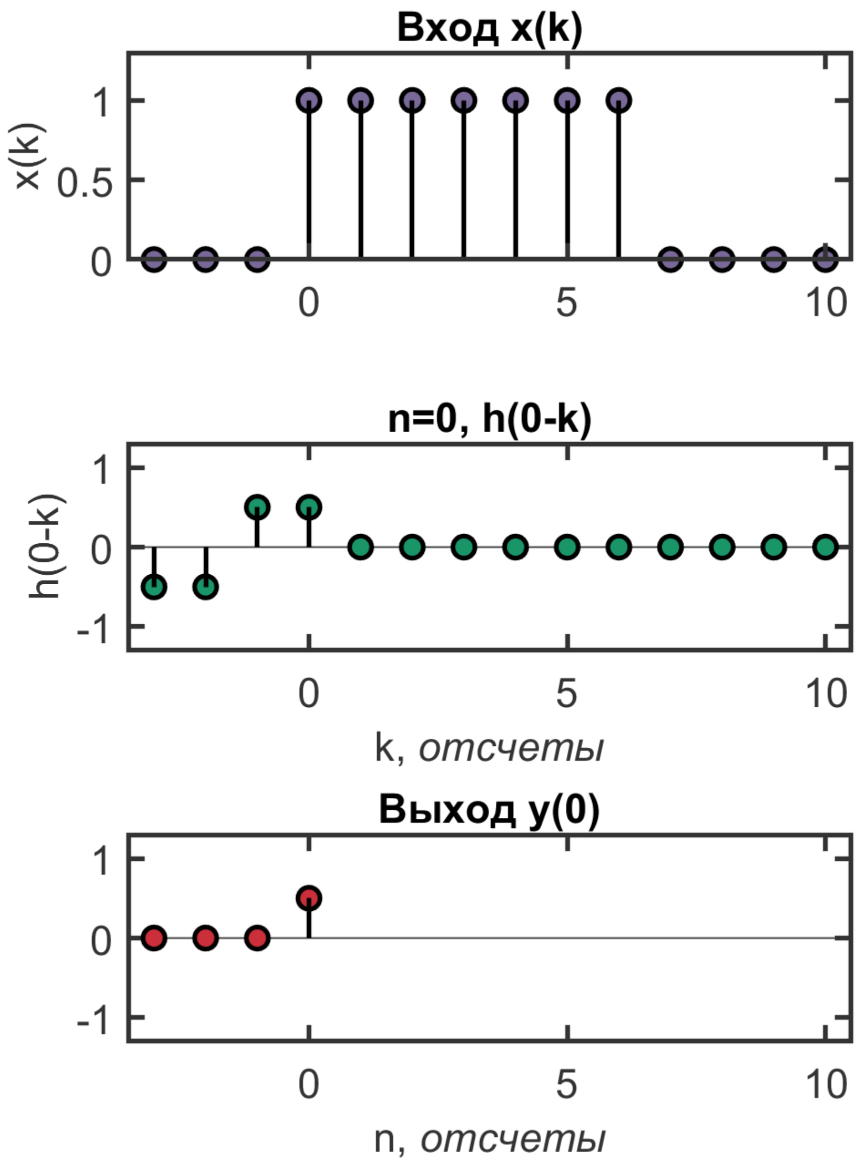
Графический метод вычисления свертки

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

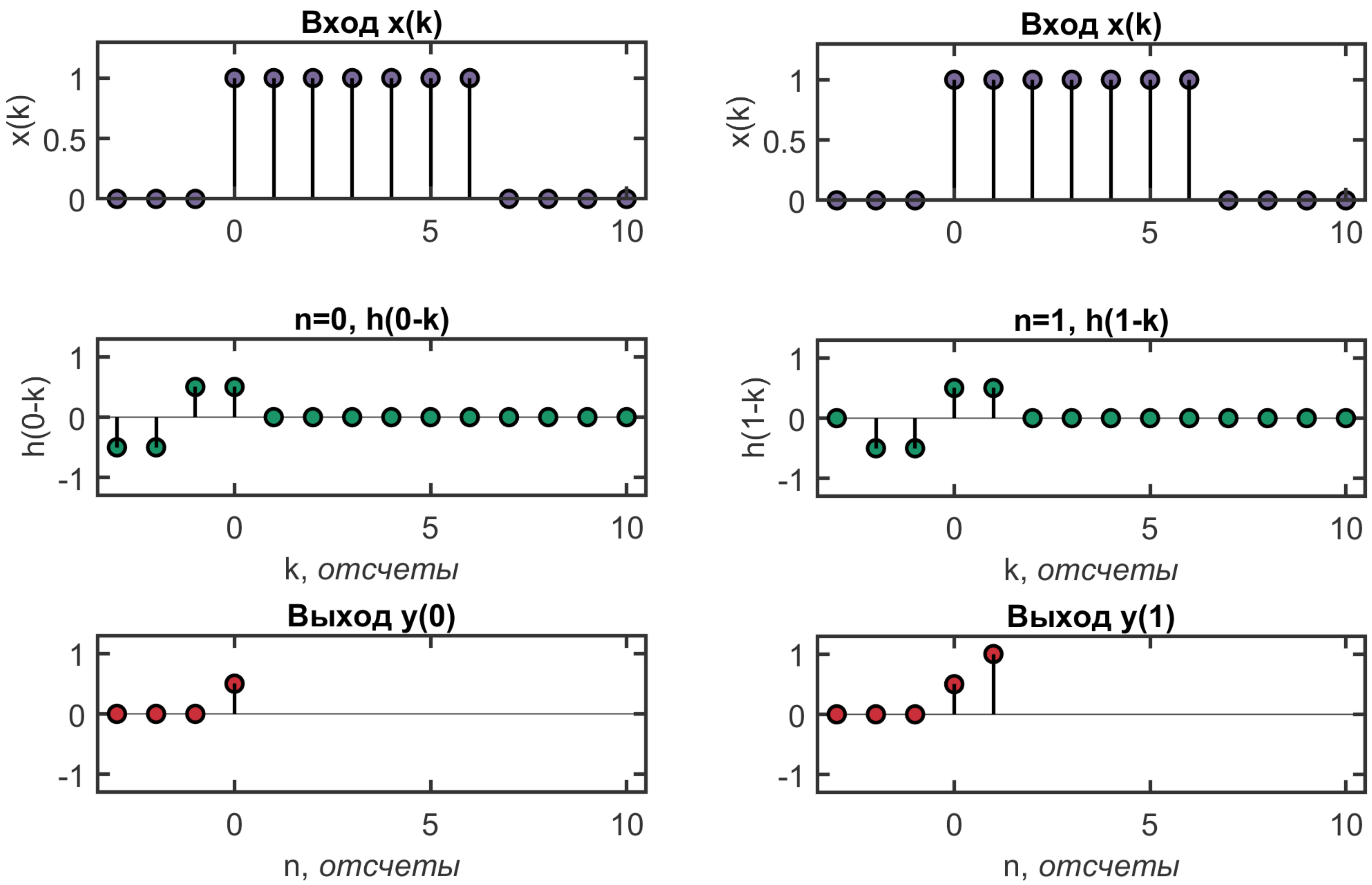
Графический метод

1. Изобразите сворачиваемые последовательности $x(k)$ и $h(k)$ как функции от k.
2. Выберите последовательность, например $h(k)$, и выполните обращение времени для формирования $h(-k)$.
3. Сдвиньте обращенную во времени последовательность на n. (Для $n > 0$ сдвиг выполняется вправо (задержка), для $n < 0$ выполняется сдвиг влево).
4. Умножьте последовательности $x(k)$ и $h(n-k)$ и просуммируйте их для всех значений k. Полученное значение равно $y(n)$. Повторите данный процесс для всех возможных значений сдвига n.

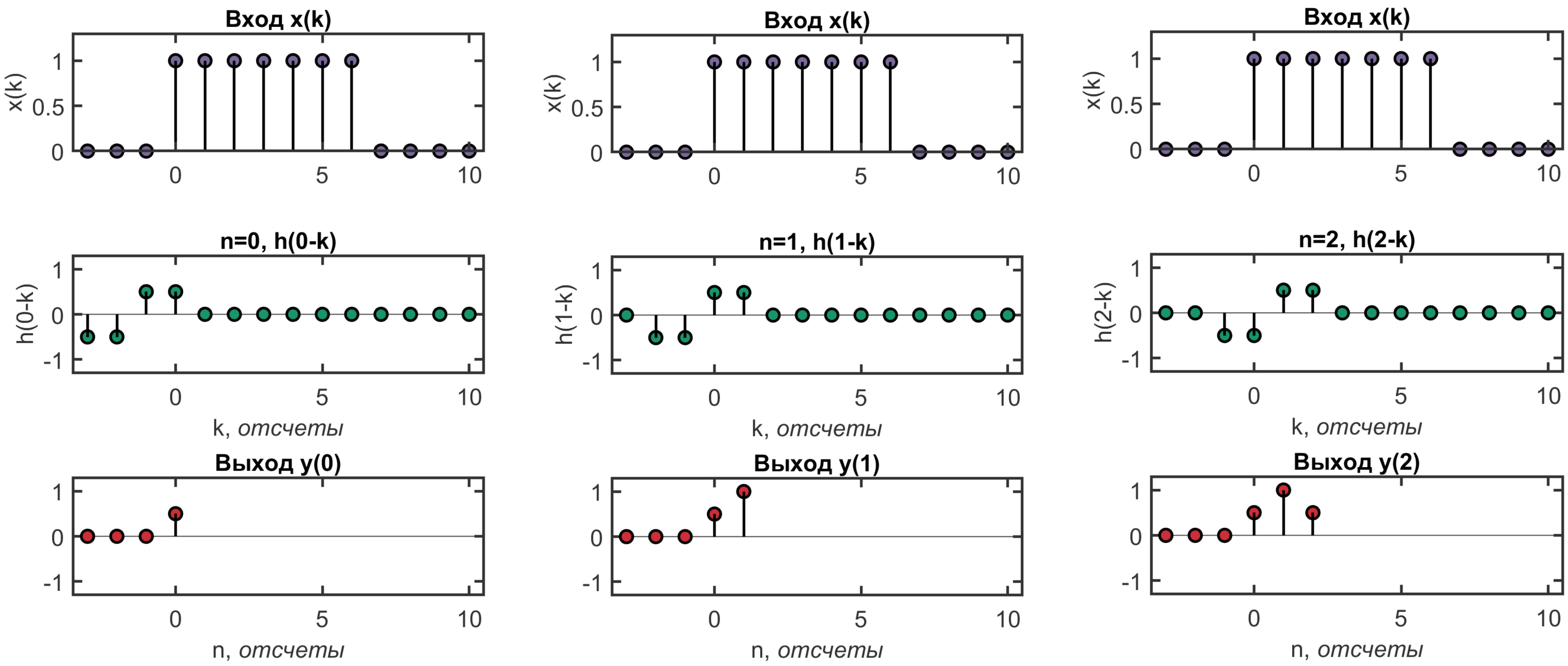
Пример вычисления свертки



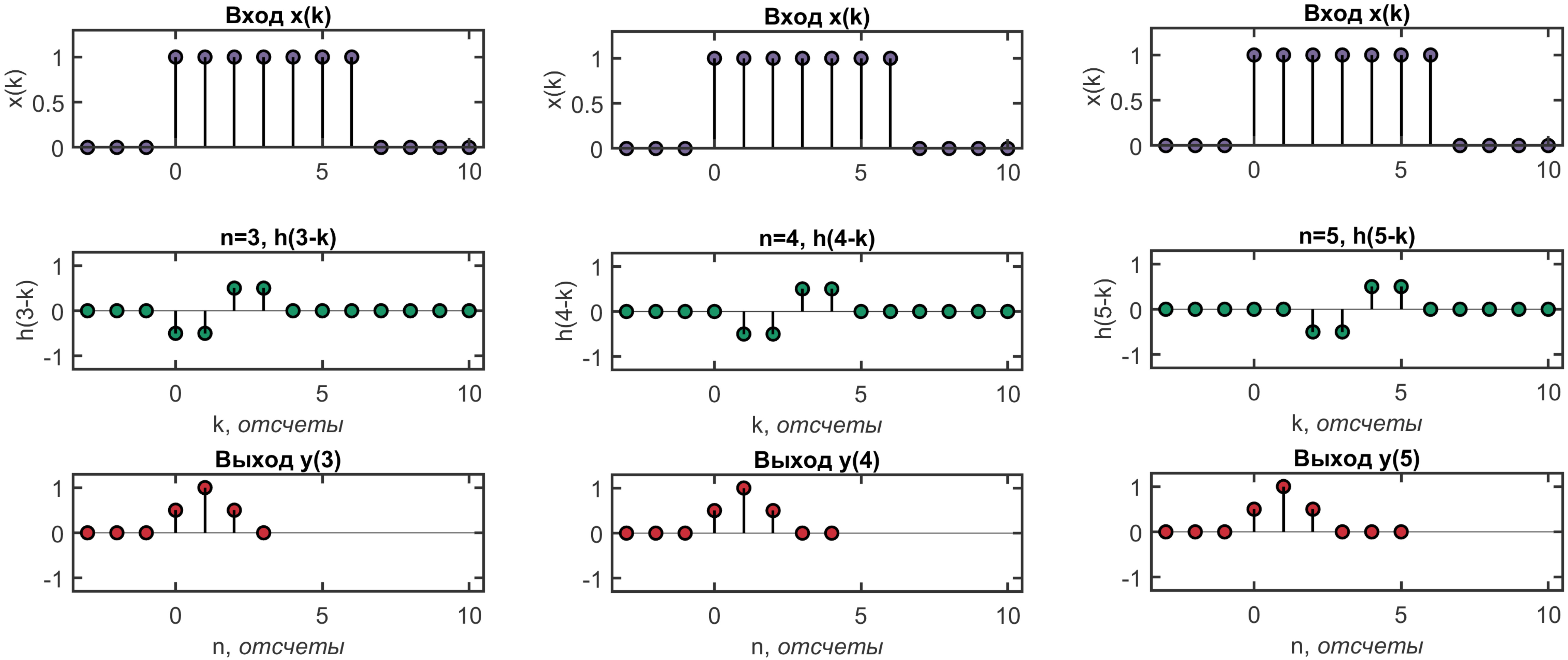
Пример вычисления свертки



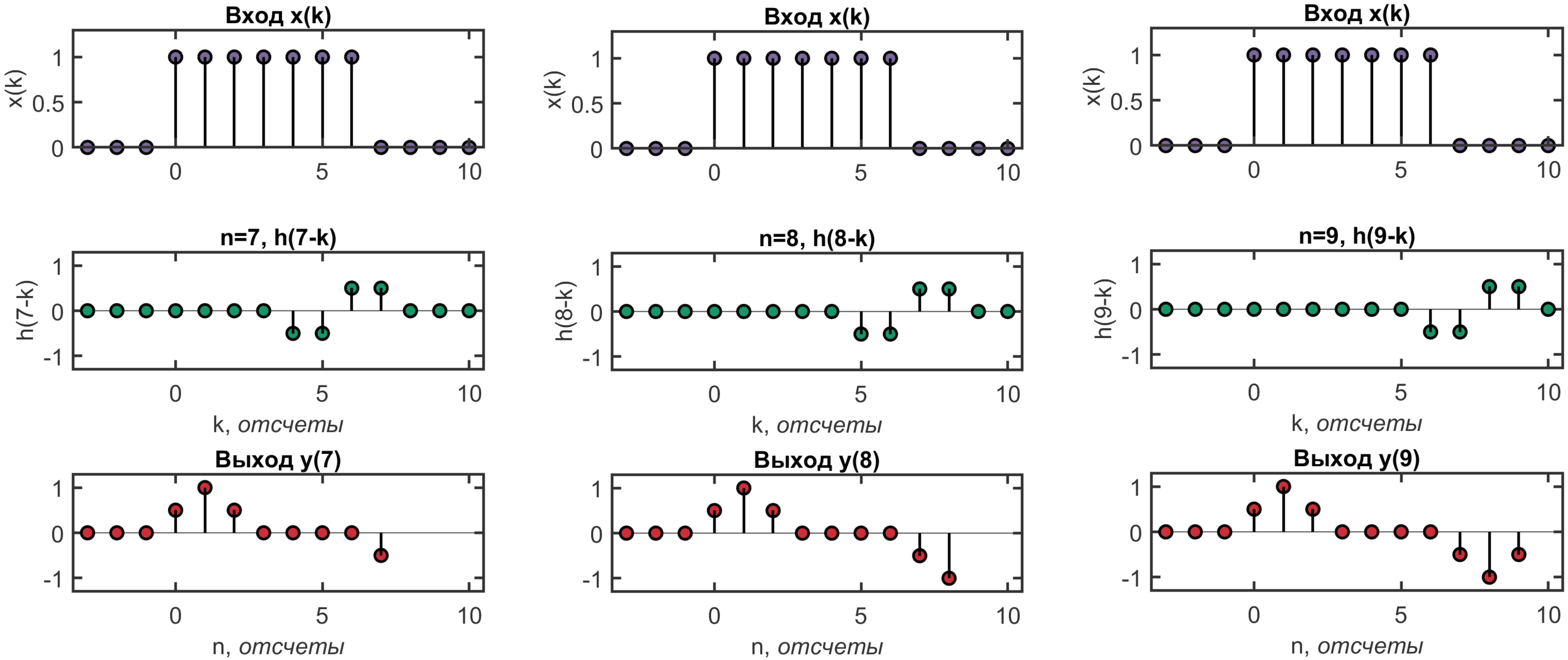
Пример вычисления свертки



Пример вычисления свертки



Пример вычисления свертки



Свертка как матричная операция

Свертку можно записать в виде произведения входного сигнала (представленного вектором) на теплицеву матрицу, образованную импульсной характеристикой фильтра.

Отто Тёплиц (1881-1940)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ 0 & h(2) & h(1) & h(0) \\ 0 & 0 & h(2) & h(1) \\ 0 & 0 & 0 & h(2) \end{bmatrix}}_{\text{Toepliz matrix}} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Табличное вычисление свертки

5-4.3.1 Computing the Output of a Convolution

In Section 5-2, the output of the running average FIR filter was constructed by tabulating values. This method works for short signals, but lacks the generality needed in more complicated problems—however, there is a simple interpretation of (5.13) that leads to an algorithm for doing *numerical convolution*. First of all, we describe the algorithm which can be implemented using the table in Fig. 5-11 that tracks the relative position of the signal values. The example in Fig. 5-11 shows how to convolve $x[n] = \{2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2\}$ with $h[n] = \{3,\ -1,\ 2,\ 1\}$. The first step is to write out the signal values of $x[n]$ and $h[n]$ on separate rows. Then we use a method similar to what we call[11] "synthetic polynomial

n	$n<0$	0	1	2	3	4	5	6	7	$n>7$
$x[n]$	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
$h[n]$	0	3	–1	2	1					
$h[0]x[n]$	0	6	12	18	12	6	0	0	0	0
$h[1]x[n-1]$	0	0	–2	–4	–6	–4	–2	0	0	0
$h[2]x[n-2]$	0	0	0	4	8	12	8	4	0	0
$h[3]x[n-3]$	0	0	0	0	2	4	6	4	2	0
$y[n]$	0	6	10	18	16	18	12	8	2	0

Figure 5-11 Numerical convolution of finite-length signals via synthetic polynomial multiplication.

Свойства свертки: ассоциативность

Свертка ***ассоциативна***, т.е.

$$(a(n) * b(n)) * c(n) = a(n) * (b(n) * c(n))$$

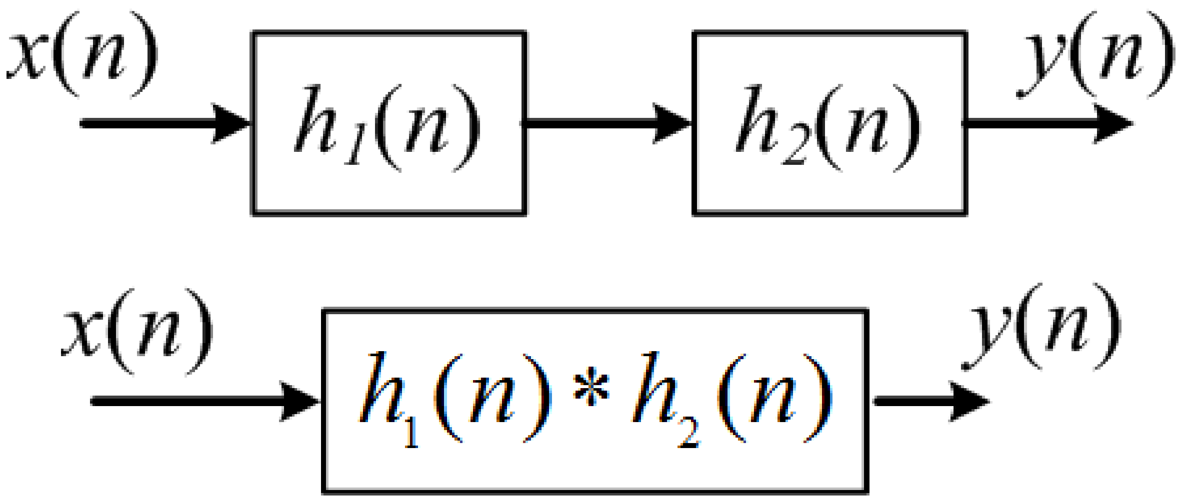
Свойства свертки: ассоциативность

Свертка ***ассоциативна***, т.е.

$$(a(n) * b(n)) * c(n) = a(n) * (b(n) * c(n))$$

Для фильтра ассоциативность означает, что **два** последовательно включенные фильтра образуют **один** фильтр, импульсная характеристика которого равна свертке импульсных характеристик исходных фильтров.

$$\big(x(n) * h_1(n)\big) * h_2(n) =$$
$$= x(n) * (h_1(n) * h_2(n))$$



Задача

$$h_1(n) = u(n) - u(n-7)$$
$$h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$h_1(n) * h_2(n) = ?$$

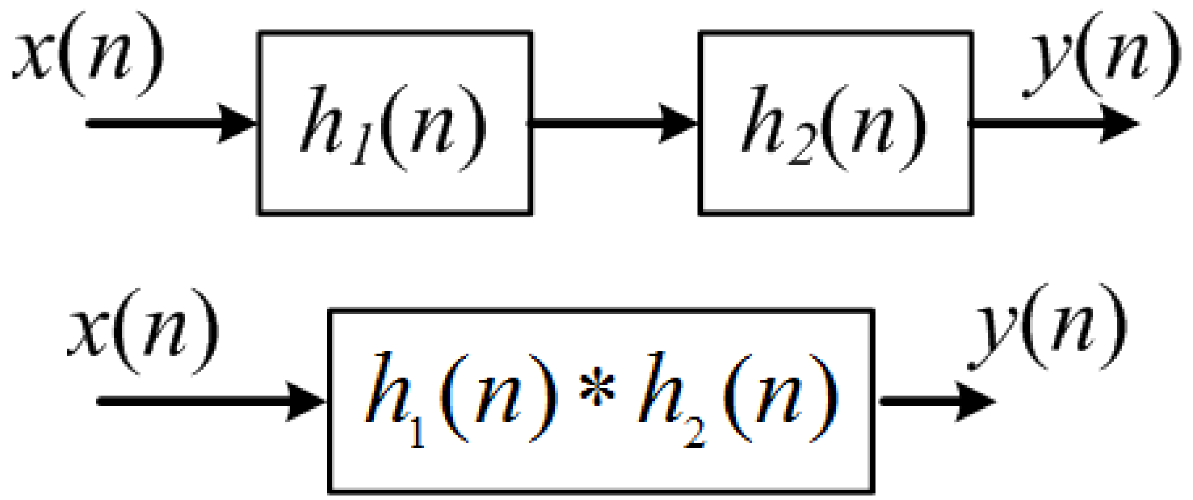
Свойства свертки: ассоциативность

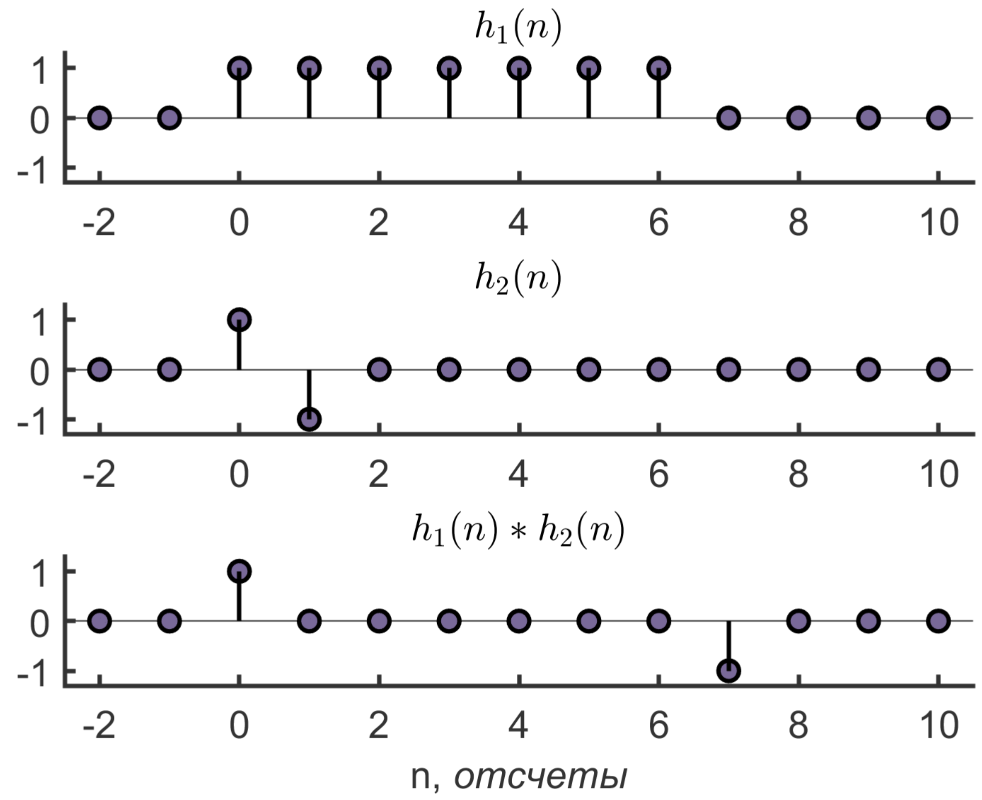
Свертка ***ассоциативна***, т.е.

$$(a(n) * b(n)) * c(n) = a(n) * (b(n) * c(n))$$

Для фильтра ассоциативность означает, что **два** последовательно включенные фильтра образуют **один** фильтр, импульсная характеристика которого равна свертке импульсных характеристик исходных фильтров.

$$\big(x(n) * h_1(n)\big) * h_2(n) =$$
$$= x(n) * (h_1(n) * h_2(n))$$





Свойства свертки: коммутативность

Свертка ***коммутативна*** (подчинена переместительному закону):

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в исходной формуле на $m = n - k$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \cdots$$

Свойства свертки: коммутативность

Свертка ***коммутативна*** (подчинена переместительному закону):

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в исходной формуле на $m = n - k$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = |_{m=n-k} =$$

$$= \sum_{m=\infty}^{-\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n).$$

Дистрибутивность (распределительный закон)

Свертка ***дистрибутивна*** относительно сложения:

$$x(n) * \big(h_1(n) + h_2(n)\big) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n).$$

Дистрибутивность – следствие **линейности** и **коммутативности** свертки.

Дистрибутивность (распределительный закон)

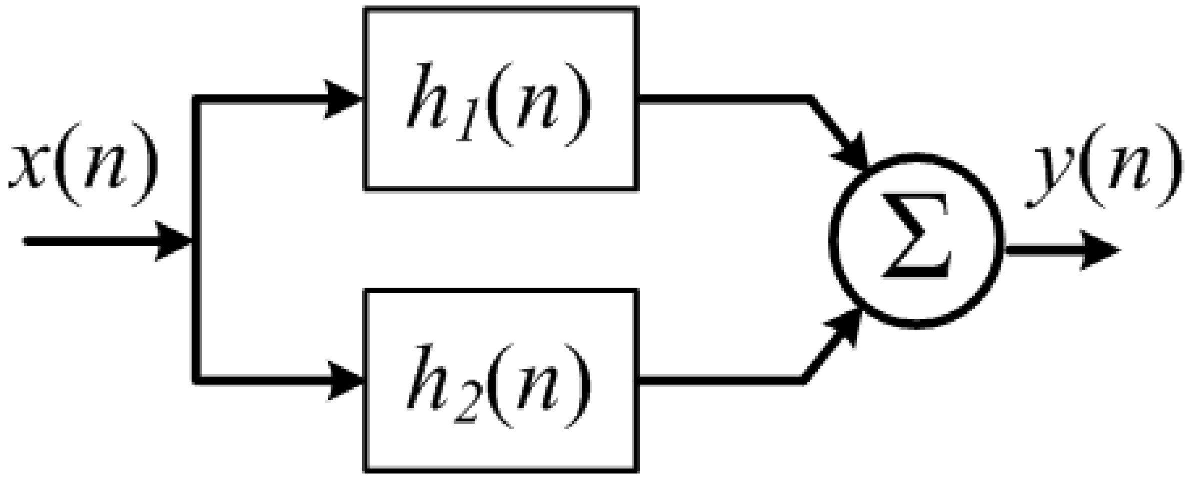
Свертка ***дистрибутивна*** относительно сложения:

$$x(n) * \left(h_1(n) + h_2(n)\right) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n).$$

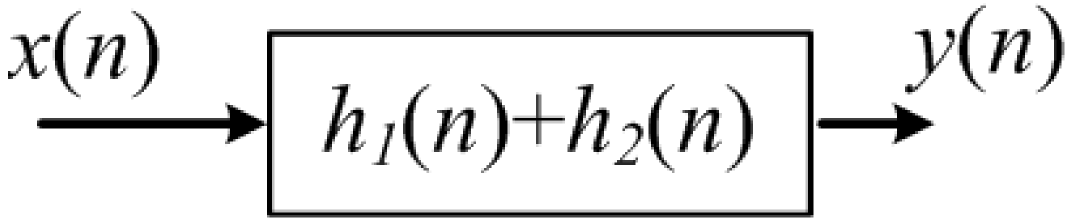
Дистрибутивность – следствие **линейности** и **коммутативности** свертки.

Параллельное соединение фильтров

Дистрибутивность позволяет построить фильтр, эквивалентный параллельному соединению двух фильтров:



Параллельное соединение фильтров



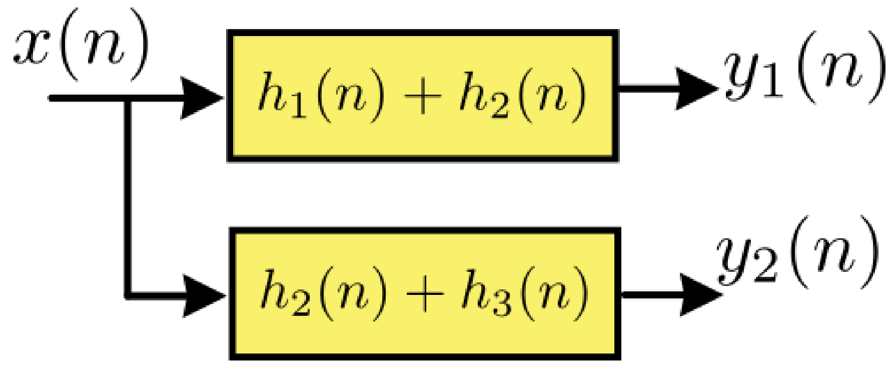
Эквивалентная схема

Пример использования свойства дистрибутивности

Пусть необходимо реализовать дискретную систему, имеющую один вход $x(n)$ и два выхода:

$$y_1(n) = x(n) * \big(h_1(n) + h_2(n)\big);$$

$$y_2(n) = x(n) * \big(h_3(n) + h_2(n)\big).$$

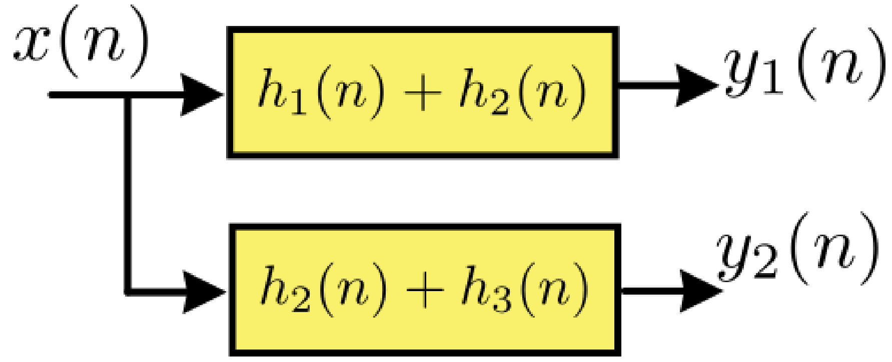


Пример использования свойства дистрибутивности

Пусть необходимо реализовать дискретную систему, имеющую один вход $x(n)$ и два выхода:

$$y_1(n) = x(n) * \left(h_1(n) + h_2(n)\right)$$

$$y_2(n) = x(n) * \left(h_3(n) + h_2(n)\right)$$



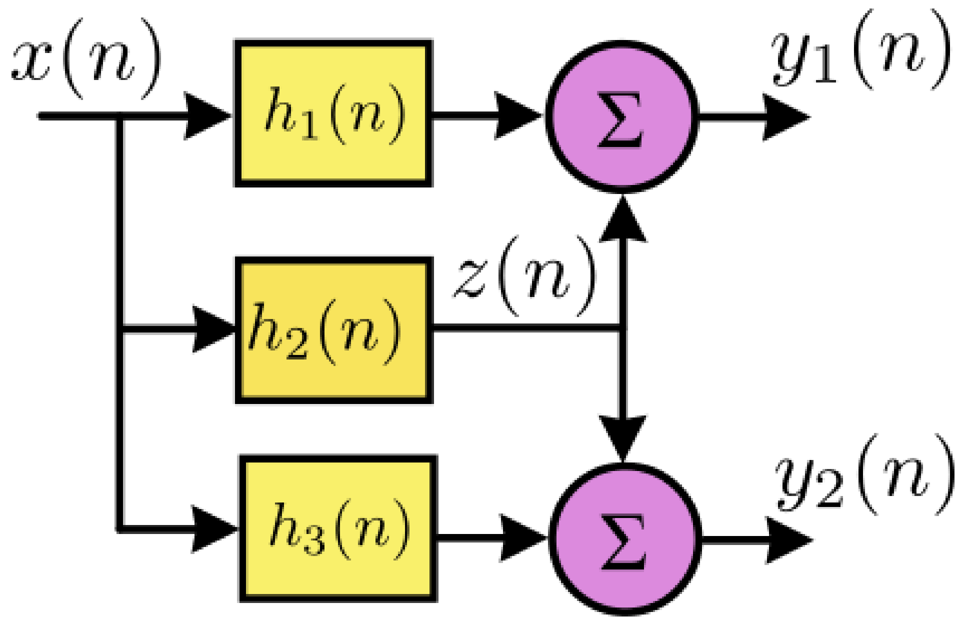
Используя дистрибутивность можно рассчитать сигнал

$$z(n) = x(n) * h_2(n)$$

Тогда получим, что:

$$y_1(n) = z(n) + x(n) * h_1(n)$$

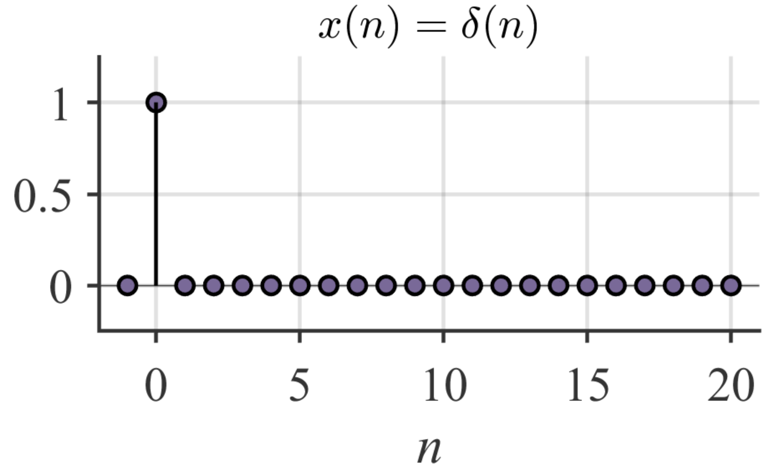
$$y_2(n) = z(n) + x(n) * h_3(n)$$

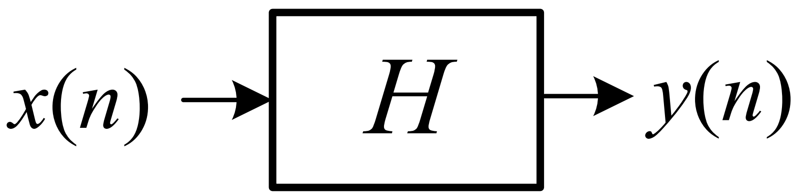


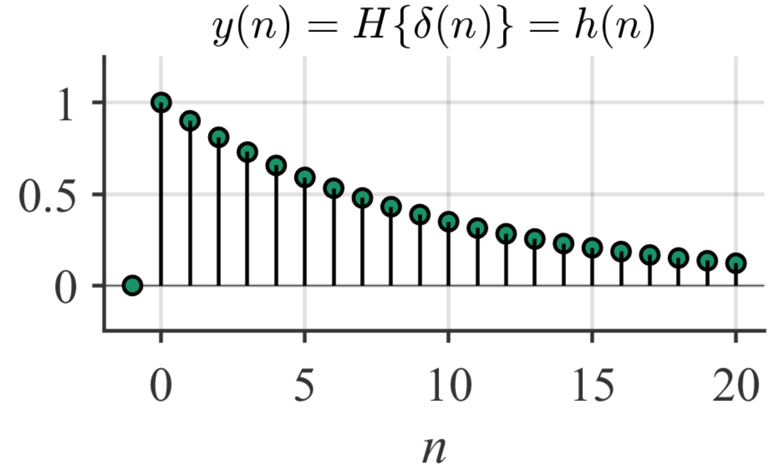
Устойчивость фильтра

Фильтр описывается уравнением свертки

$$y(n) = H\{x(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$







Фильтр является ***устойчивым*** если его импульсная характеристика $h(n)$ – абсолютно суммируемая последовательность:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Детерминированность

Фильтр описывается уравнением свертки

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Для ***детерминированного*** фильтра должно выполнятся условие:

$$h(k) = 0, \quad k < 0.$$

Детерминированность

Фильтр описывается уравнением свертки

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Для ***детерминированного*** фильтра должно выполнятся условие:

$$h(k) = 0, \quad k < 0.$$

Задача

Пусть $h_1(n) = 0{,}1\delta(n) + 0{,}9\delta(n-1)$, записать выражение

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n)$$

Пусть $h_2(n) = 0{,}5\delta(n+1) - 0{,}5\delta(n)$, записать выражение

$$y_2\,(n) = x(n) * h_2(n).$$

Которой из фильтров является детерминированным?

Детерминированность

Решение

Для $h_1(n) = 0{,}1\delta(n) + 0{,}9\delta(n-1)$ имеем

$$y_1(n) = 0{,}1x(n) + 0{,}9x(n-1).$$

Для $h_2(n) = 0{,}5\delta(n+1) - 0{,}5\delta(n)$ имеем

$$y_2(n) = 0{,}5x(n+1) - 0{,}5x(n).$$

Первый фильтр является детерминированным.

КИХ- и БИХ-фильтры

КИХ-фильтр

Если импульсная характеристика $h(n)$ имеет конечное число ненулевых отсчетов, то соответствующий фильтр H называется ***системой с конечной импульсной характеристикой*** (КИХ-фильтр).

КИХ- и БИХ-фильтры

КИХ-фильтр

Если импульсная характеристика $h(n)$ имеет конечное число ненулевых отсчетов, то соответствующий фильтр H называется ***системой с конечной импульсной характеристикой*** (КИХ-фильтр).

БИХ-фильтр

Если импульсная характеристика $h(n)$ не ограничена по длительности, то соответствующий фильтр H называется ***системой с бесконечной импульсной характеристикой*** (БИХ-фильтр).

КИХ- и БИХ-фильтры

КИХ-фильтр

Если импульсная характеристика $h(n)$ имеет конечное число ненулевых отсчетов, то соответствующий фильтр H называется ***системой с конечной импульсной характеристикой*** (КИХ-фильтр).

БИХ-фильтр

Если импульсная характеристика $h(n)$ не ограничена по длительности, то соответствующий фильтр H называется ***системой с бесконечной импульсной характеристикой*** (БИХ-фильтр).

Задача

Найти импульсную характеристику фильтра:

а) $y(n) = \frac{1}{3}(x(n+1) + x(n) + x(n-1))$ (скользящее среднее)

б) $y(n) = \sum_{k=\infty}^{n} x(k)$ («кассовый аппарат»)