# Теория и применение цифровой обработки сигнала

## Свойства дискретные систем


д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

# 1. Системы без памяти (memoryless system)

У системы без памяти её *текущий отклик* $y(n)$ зависит только от *текущего входного* значения $x(n)$ для любого $n$.

# 1. Системы без памяти (memoryless system)

У системы без памяти её *текущий отклик* $y(n)$ зависит только от *текущего входного* значения $x(n)$ для любого $n$.

Задача

Определите является ли система, описываемая следующим уравнением, ***системой без памяти***:

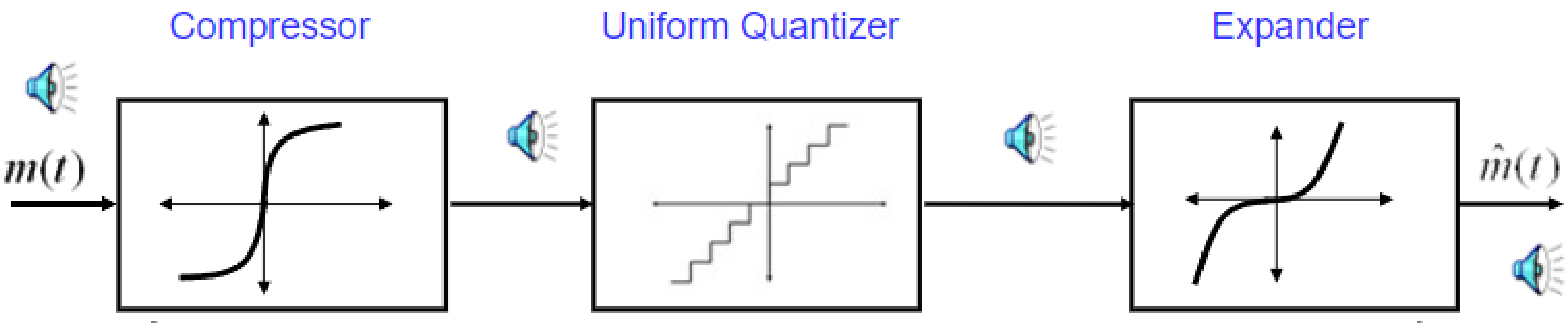
А) $y(n) = x^2(n)$

Б) $y(n) = x(n) - x(n-1)$.

# Пример: Компандирование

***Компрессор*** выполняет сжатие сигнала.

***Экспандер*** нелинейно восстанавливает уровни сигнала.

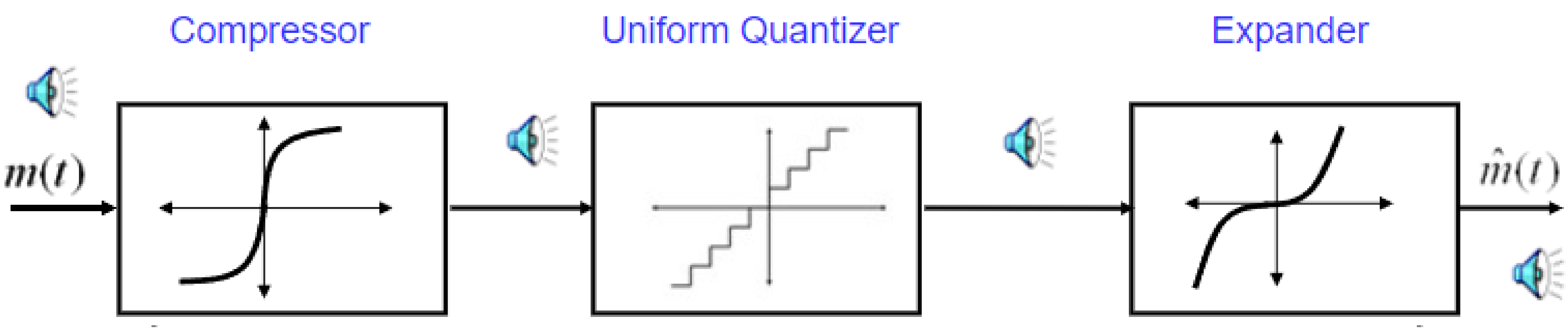



Объединяя наименования операций COMpress и exPAND, получаем название процесса – ***компандирование*** (companding).

# Пример: Компандирование

***Компрессор*** выполняет сжатие сигнала.

***Экспандер*** нелинейно восстанавливает уровни сигнала.




Объединяя наименования операций COMpress и exPAND, получаем название процесса – ***компандирование*** (companding).

$\mu$-закон

$$y(n) = \mathrm{sign}\big(x(n)\big)\frac{\lg(1+\mu|x(n)|)}{\lg(1+\mu)},$$

где $-1 \le x(n) \le 1$, $\mu$=255.

# 2. Детерминированность

У ***детерминированной*** системы выходной отсчет с номером $n_0$, т.е. $y(n_0)$, зависит только от входных отсчетов $x(n)$ с номерами $n \leq n_0$.

*Другими словами: выход зависит только от предыстории входа.*

# 2. Детерминированность

У ***детерминированной*** системы выходной отсчет с номером $n_0$, т.е. $y(n_0)$, зависит только от входных отсчетов $x(n)$ с номерами $n \leq n_0$.

*Другими словами: выход зависит только от предыстории входа.*

Задача

Определите является ли система, описываемая следующим уравнением, ***детерминированной***:

А) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

Б) $y(n) = x(n) - x(n+1)$.

В) $y(n) = x(n) - y(n-1)$.

# 3. Устойчивость

## Ограниченный сигнал

Последовательность $x(n)$ называется ***ограниченной сверху***, если найдется такое конечное положительное число $B_x$, что

$$\forall n \quad |x(n)| \leq B_x < \infty. \tag{1}$$

# 3. Устойчивость

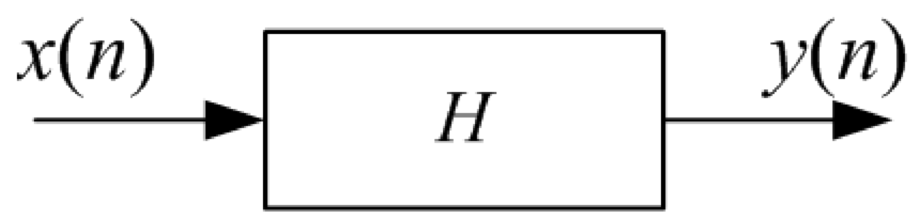
## Ограниченный сигнал

Последовательность $x(n)$ называется ***ограниченной сверху***, если найдется такое конечное положительное число $B_x$, что

$$\forall n \quad |x(n)| \le B_x < \infty. \tag{2}$$

## Устойчивая система

Система ***устойчива***, если её реакция на любой *ограниченный* по амплитуде сигнал *ограничена*.



# 3. Устойчивость

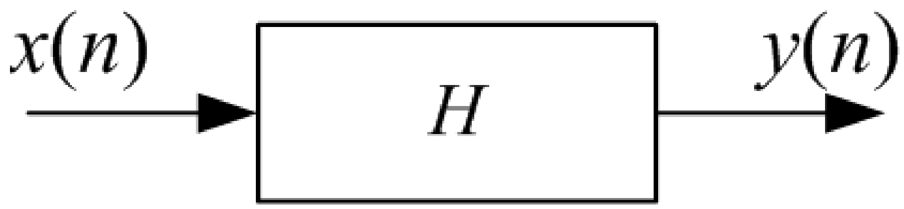
## Ограниченный сигнал

Последовательность $x(n)$ называется ***ограниченной сверху***, если найдется такое конечное положительное число $B_x$, что

$$\forall n \quad |x(n)| \leq B_x < \infty. \tag{3}$$

## Устойчивая система

Система ***устойчива***, если её реакция на любой *ограниченный* по амплитуде сигнал *ограничена*.




В устойчивой системе для **каждой** ограниченной входной последовательности $x(n)$ найдется такая положительная константа $B_y$, что

$$\forall n \quad |y(n)| \leq B_y < \infty.$$

# Устойчивость

## Задача

Является ли устойчивой система, описываемая уравнением

1) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

2) $y(n) = \cos(x(n))$

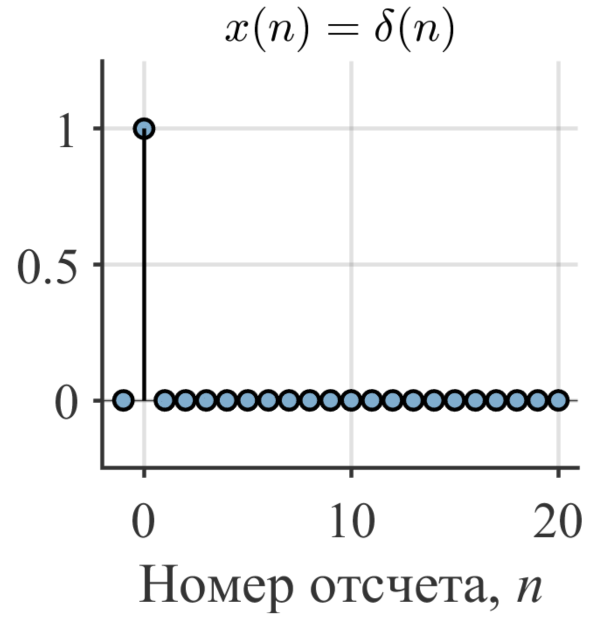
3) $y(n) = \lg(x(n))$

# Устойчивость

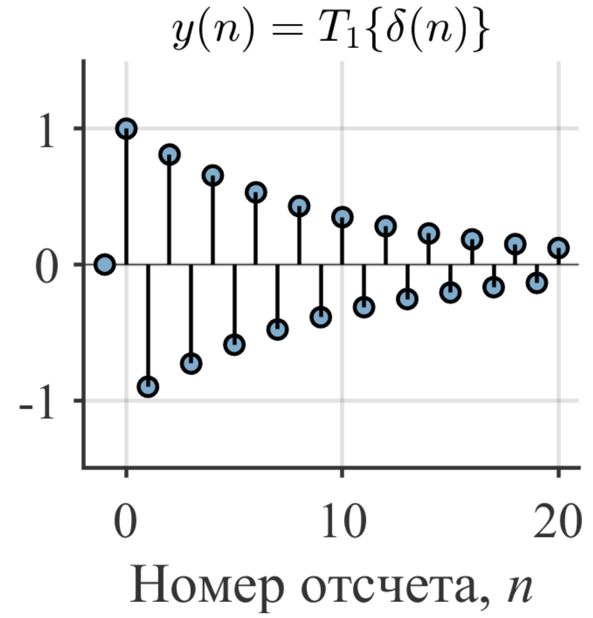
## Задача

На графиках представлены реакции трех различных систем на единичный импульс. Что можно сказать об устойчивости этих систем?

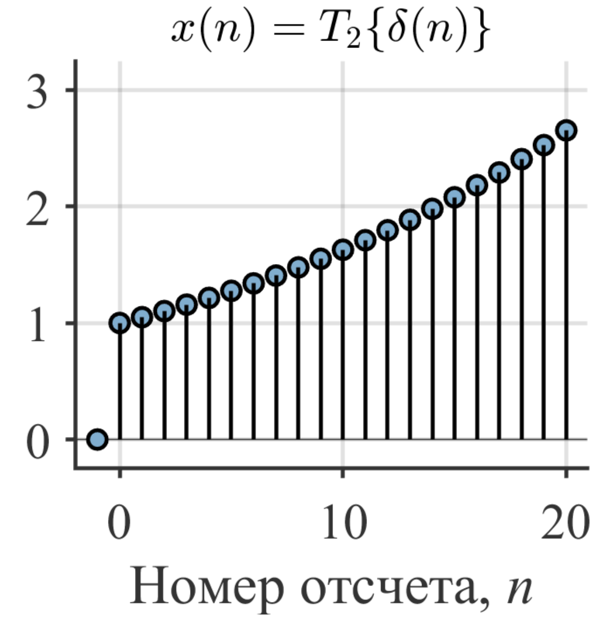
**Вход $x(n)$**



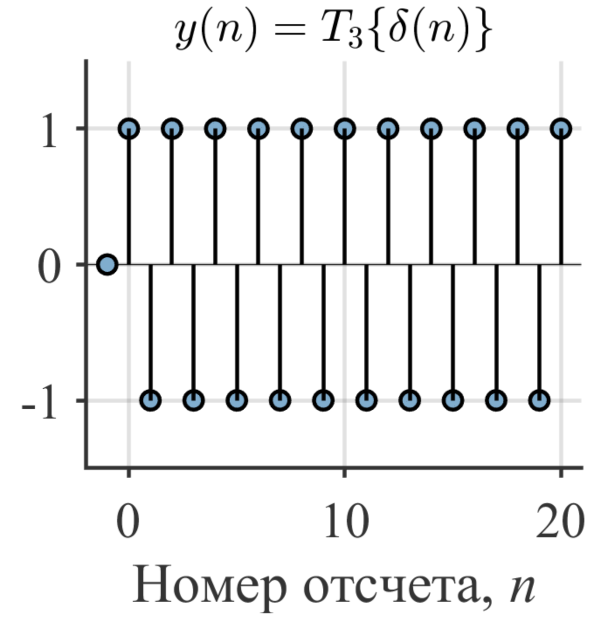

**Выход $T_1\{x(n)\}$**




**Выход $T_2\{x(n)\}$**




**Выход $T_3\{x(n)\}$**



# 4. Обратимость

- Система является ***обратимой***, если вход системы $x(n)$ можно восстановить единственным образом зная выход системы $y(n)$.

# 4. Обратимость

- Система является ***обратимой***, если вход системы $x(n)$ можно восстановить единственным образом зная выход системы $y(n)$.

- Система $T\{\cdot\}$ обратима если для любых двух входов

$$x_1(n) \neq x_2(n),$$

следует, что

$$y_1(n) \neq y_2(n),$$

где $y_1(n) = T\{x_1(n)\}$

$y_2(n) = T\{x_2(n)\}$.

# Обратимая система

Система, определенная как

$$y(n) = x(n)g(n)$$

обратима, когда $g(n) \neq 0\ \forall n$. В частности, зная $y(n)$ и $g(n)$, вход $x(n)$ можно восстановить по $y(n)$:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}.$$

## Задача

*Является ли обратимой следующая система:*

а) $y(n) = 2x(n)$
б) $y(n) = nx(n)$
в) $y(n) = x(n) - x(n-1)$
г) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$
д) $y(n) = Re\{x(n)\}$

# 5. Однородность

***Однородность*** – *пропорциональность* между входом и выходом.

Определение

Система называется ***однородной***, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

для любой входной последовательности $x(n)$.

Т.е., если $T\{x(n)\} = y(n)$, то $T\{cx(n)\} = cy(n)$.

# Однородность: пример

## Задача

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$y(n) = T\{x(n)\} = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}.$$

Является ли система однородной?

# Однородность: пример

## Задача

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$y(n) = T\{x(n)\} = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}.$$

Является ли система однородной?

## Решение

Выполним проверку критерия однородности:

$$T\{cx(n)\} = \frac{\left(cx(n)\right)^2}{cx(n-1)} = \frac{cx(n)}{x(n-1)}$$

$$cT\{x(n)\} = c\,\frac{x(n)}{x(n-1)}.$$

Поскольку $T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}$ система является **однородной**.

# 6. Аддитивность

Система ***аддитивна***, если из того, что

$$y_1(n) = T\{x_1(n)\} \quad \text{и} \quad y_2(n) = T\{x_2(n)\}$$

следует, что

$$y_1(n) + y_2(n) = T\{x_1(n) + x_2(n)\}.$$

Альтернативная формулировка ***аддитивности***:

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

для любых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

# Аддитивность: пример

## Задача

Является ли аддитивной дискретная система

$$y(n) = T\{x(n)\} = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}.$$

# Аддитивность: пример

## Задача

Является ли аддитивной дискретная система

$$y(n) = T\{x(n)\} = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}.$$

## Решение

Выполним проверку критерия аддитивности:

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = \frac{\left(x_1(n) + x_2(n)\right)^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)}$$

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}$$

Можно видеть, что $T\{x_1(n) + x_2(n)\} \neq T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$.

# 7. Линейность

***Линейная*** система должна обладать одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

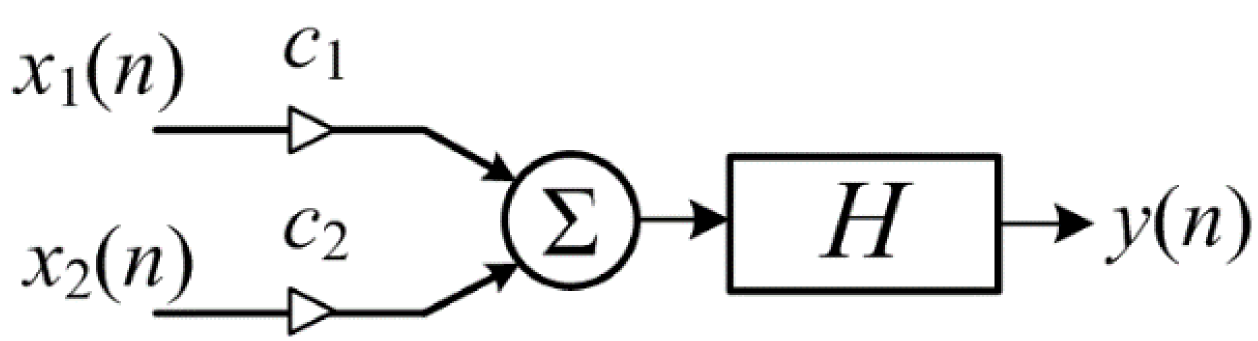
$$H\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = c_1H\{x_1(n)\} + c_2H\{x_2(n)\}. \qquad (4)$$

# 7. Линейность

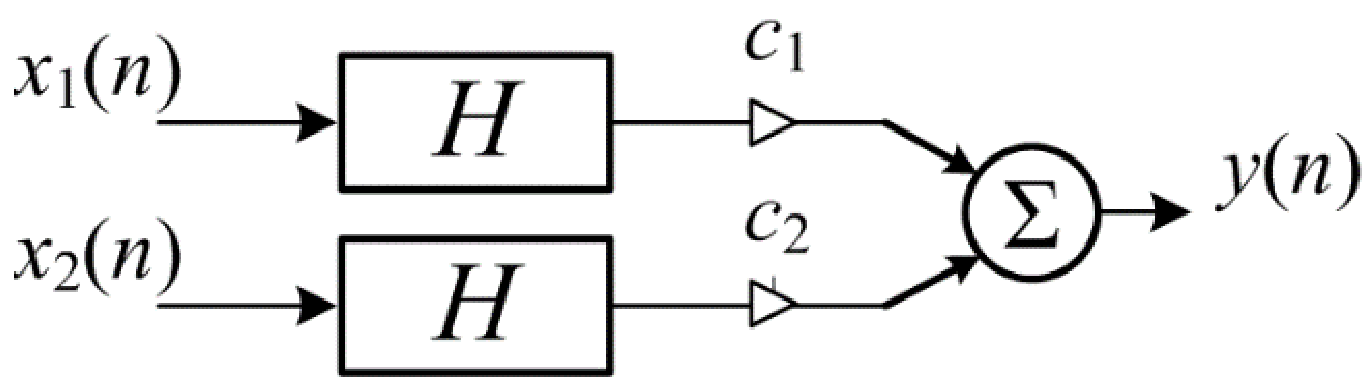
***Линейная*** система должна обладать одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

$$H\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = c_1H\{x_1(n)\} + c_2H\{x_2(n)\}. \qquad (5)$$

Линейность подразумевает, что системный оператор $H$ **коммутирует** с операциями суммирования и масштабирования.




Для линейной системы не важно в каком порядке выполнять суммирование и масштабирование до либо после системного оператора.



# 8. Инвариантность во времени

В ***инвариантных во времени*** системах временной сдвиг входного сигнала $x(n)$ приводит к появлению такого же сдвига выходного сигнала $y(n)$.

Если $y(n) = H\{x(n)\}$, то для инвариантной во времени системы справедливо

$$H\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0).$$

Инвариантные во времени системы также называют ***стационарными***.

# 8. Инвариантность во времени

В ***инвариантных во времени*** системах временной сдвиг входного сигнала $x(n)$ приводит к появлению такого же сдвига выходного сигнала $y(n)$.

Если $y(n) = H\{x(n)\}$, то для инвариантной во времени системы справедливо

$$H\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0).$$

Инвариантные во времени системы также называют ***стационарными***.

## Задача

Система, определенная соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$, называется компрессором частоты дискретизации. Она отбрасывает $M - 1$ из каждых $M$ отсчетов входной последовательности. Является ли компрессор инвариантной во времени системой?