Теория и применение цифровой обработки сигнала

Корреляционная функция

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Ковариация

Пусть $X = [x_1,\ x_2, \dots, x_N]$ *и* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ – *случайные величины.*

Ковариация

Пусть $X = [x_1,\ x_2, \dots, x_N]$ *и* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ *– случайные величины.*

Ковариация между случайными величинами X и Y:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\},$$

где $\mu_X = E\{X\}$, $\mu_Y = E\{Y\}$.

Ковариация

Пусть $X = [x_1,\ x_2, \dots, x_N]$ *и* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ *– случайные величины.*

Ковариация между случайными величинами X и Y:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y),$$

$\mu_X = E\{X\} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$ – ***выборочное среднее*** является оценкой мат. ожидания X.

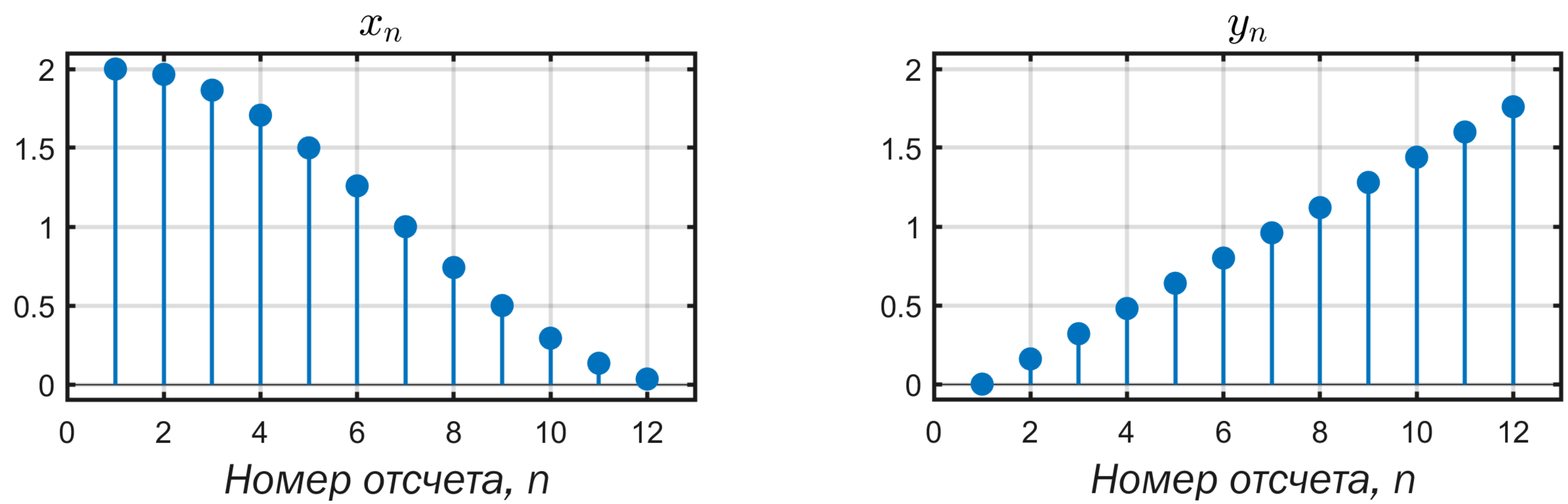
Ковариация

Пусть $X = [x_1,\ x_2, \dots, x_N]$ *и* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ – *случайные величины.*

Ковариация между случайными величинами X и Y:

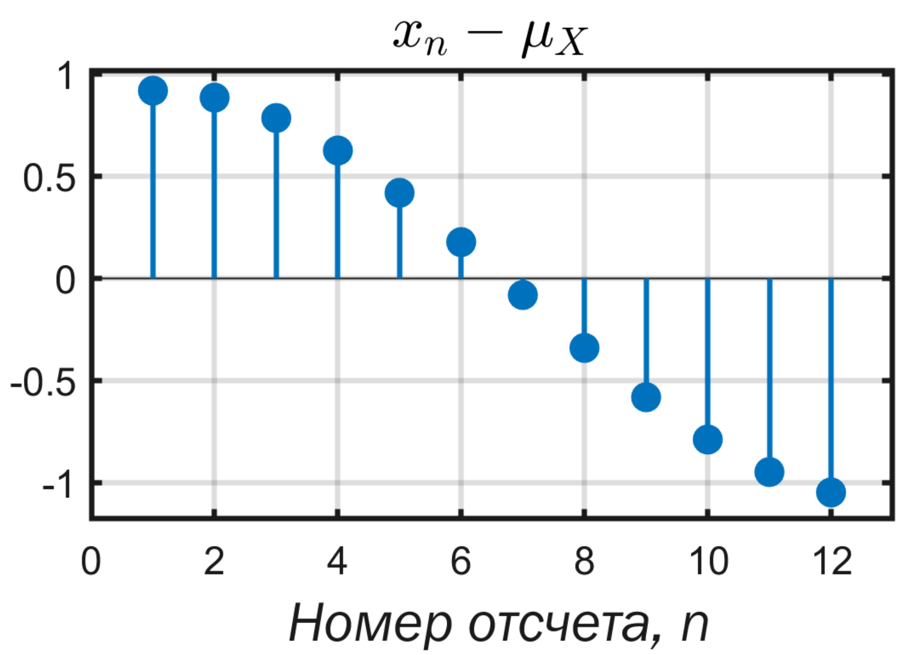
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y), \qquad (1)$$

$$\mu_X \approx 1.08, \qquad \mu_Y \approx 0.88$$



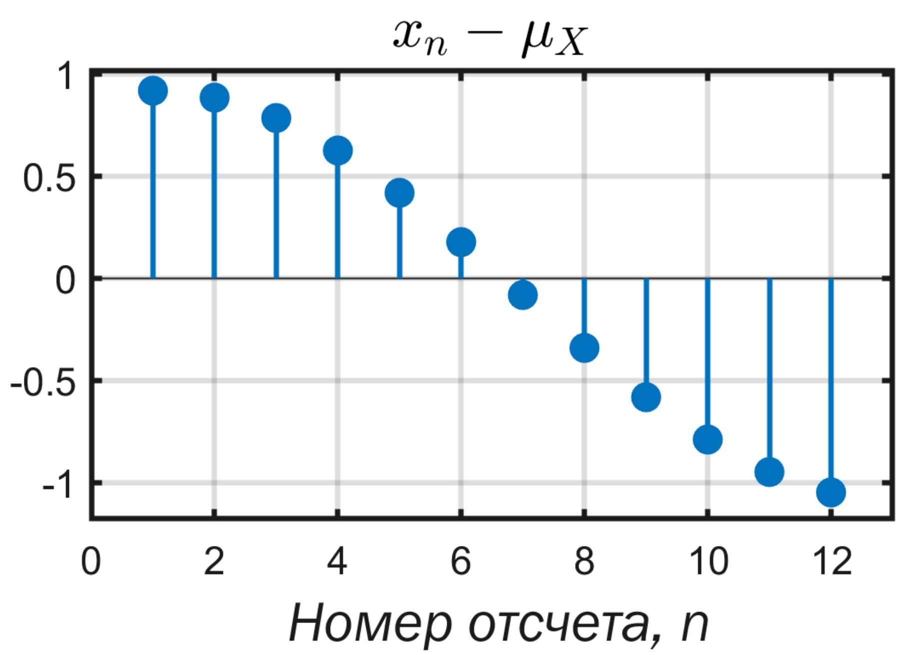
Вычисление ковариации

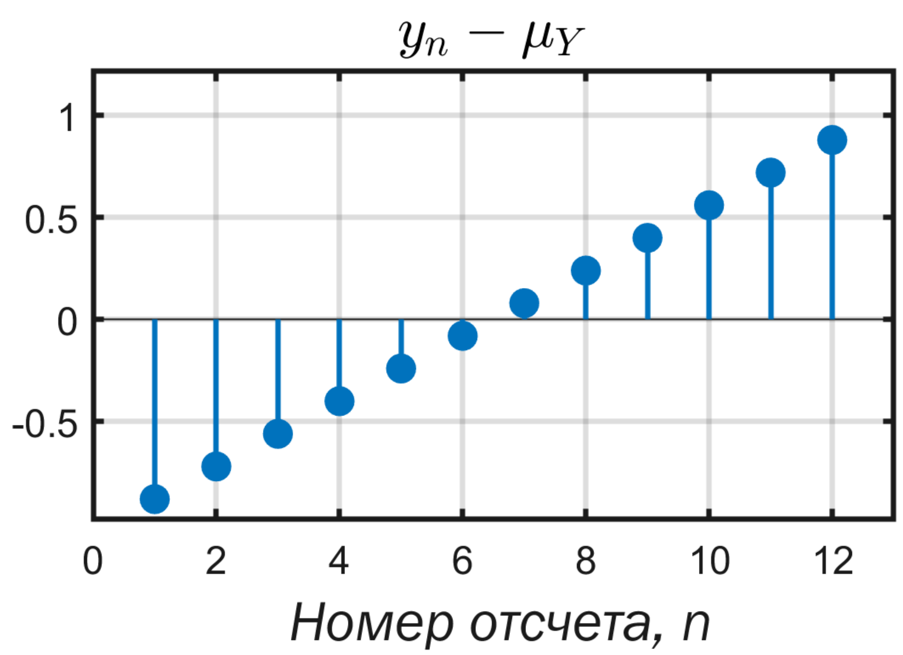
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y),$$



Вычисление ковариации

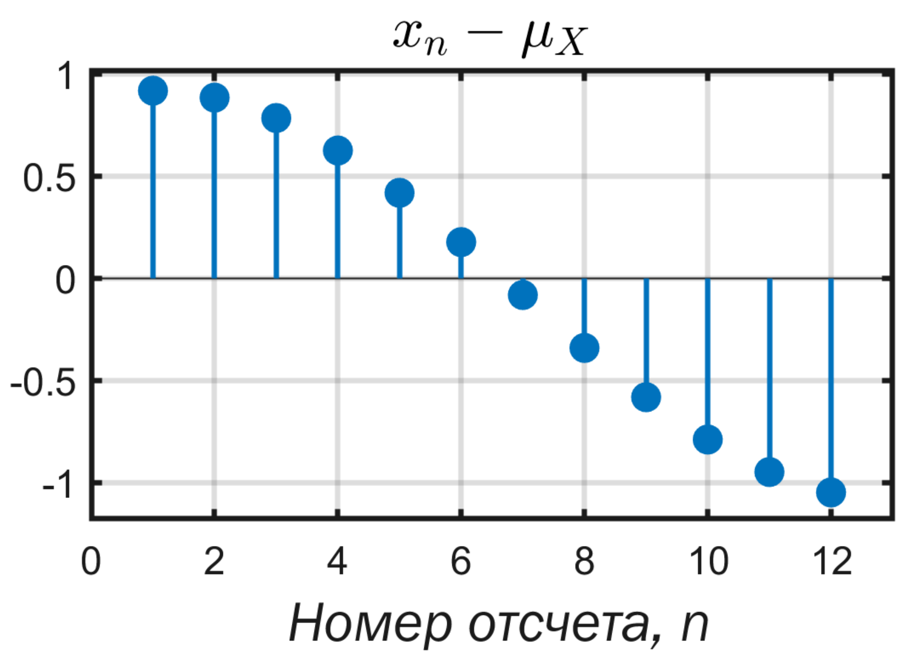
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y),$$

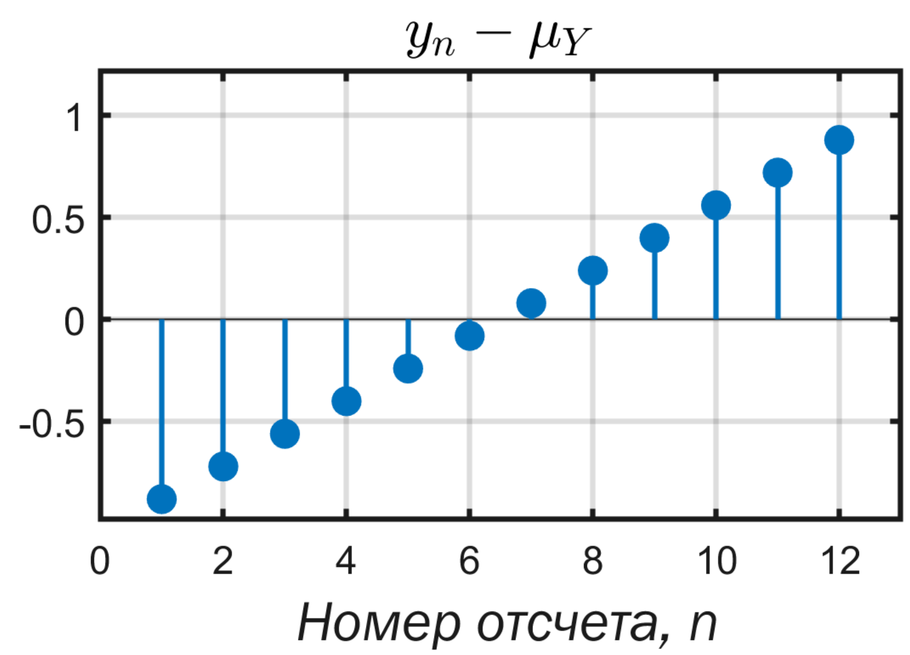


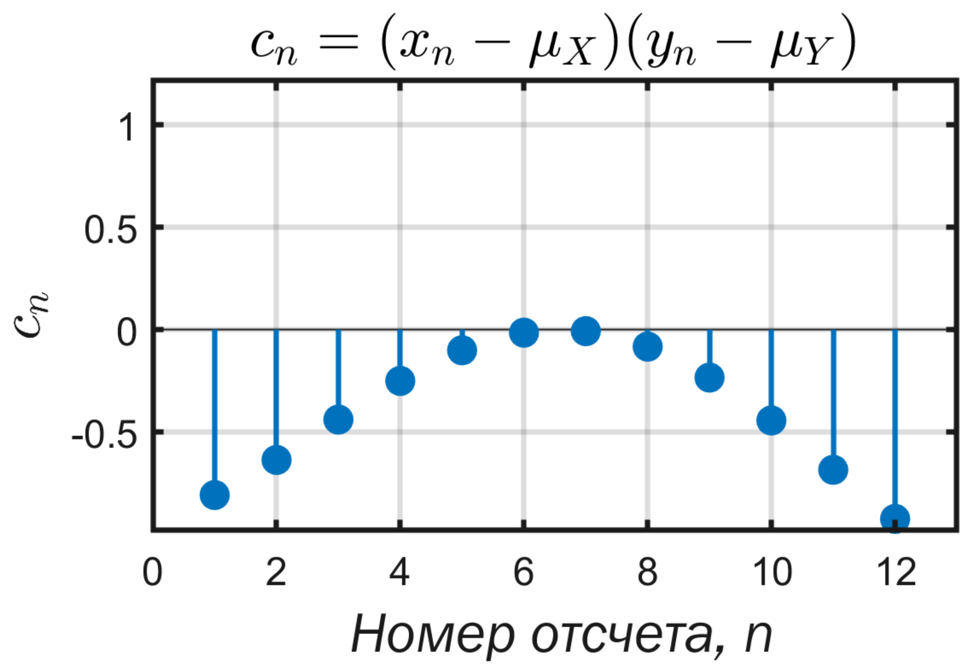


Вычисление ковариации

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y),$$

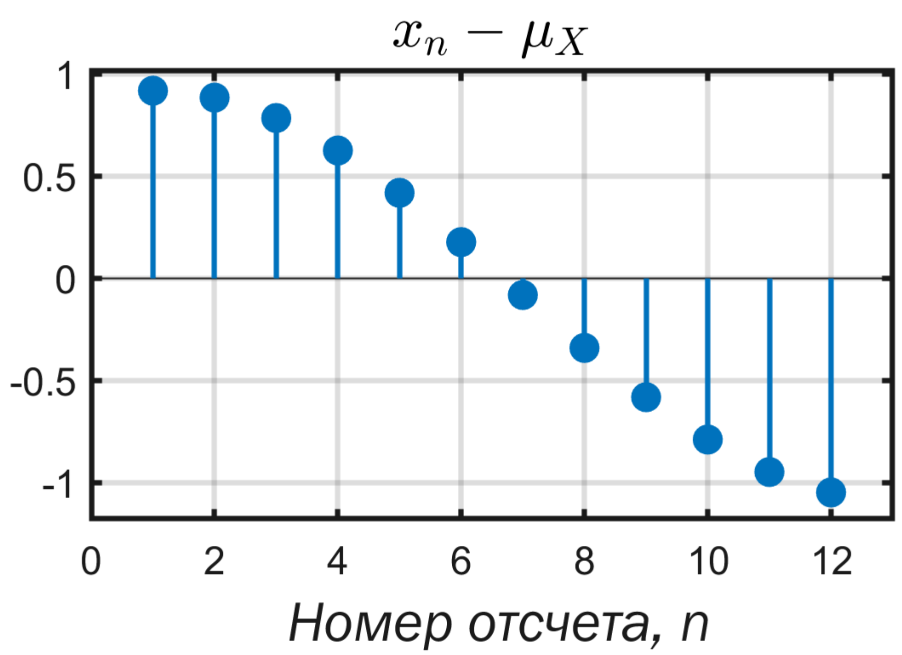


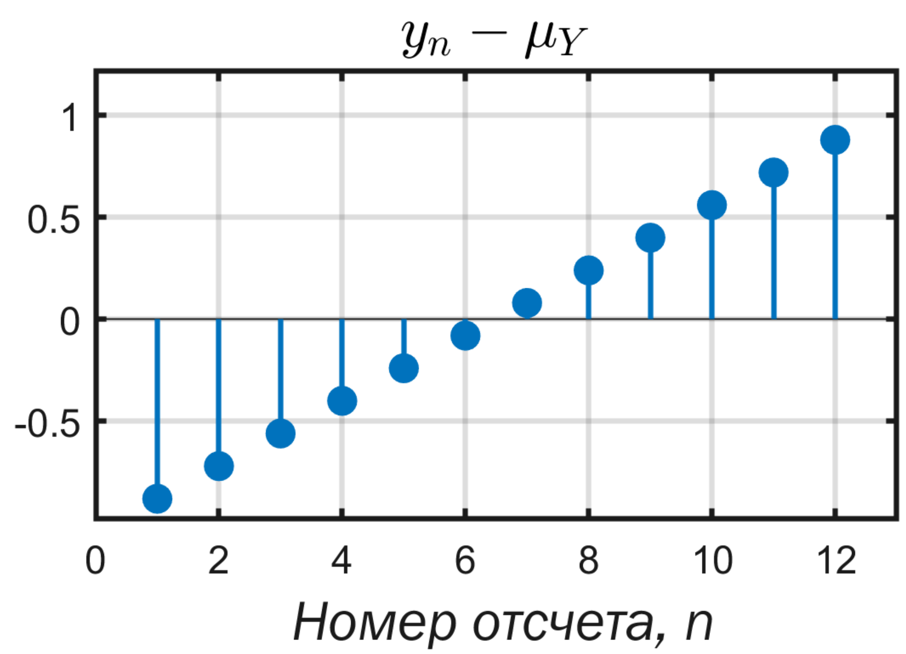


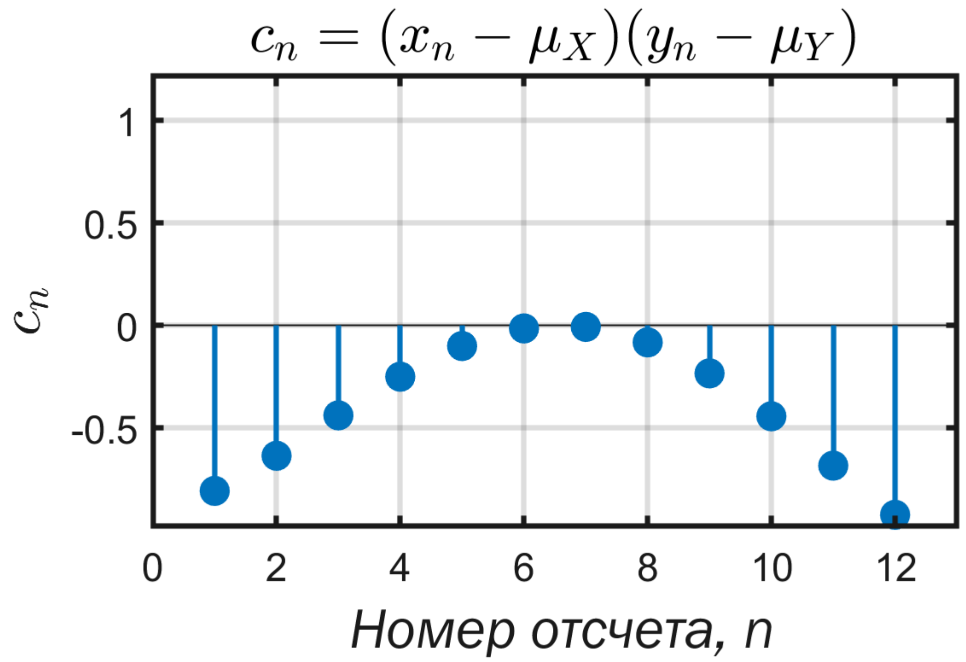


Вычисление ковариации

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y),$$







$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{12}(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y) \approx -0.38.$$

Недостаток ковариации

Использование ковариации $\mathrm{Cov}(X,Y)$ в качестве показателя зависимости имеет недостаток: значение $\mathrm{Cov}(X,Y)$ может меняться при изменении единиц измерения X и Y.

Недостаток ковариации

Использование ковариации $\operatorname{Cov}(X,Y)$ в качестве показателя зависимости имеет недостаток: значение $\operatorname{Cov}(X,Y)$ может меняться при изменении единиц измерения X и Y.

Коэффициент корреляции

Этот эффект можно исключить, если разделить ковариацию на произведение среднеквадратических отклонений (СКО) $\sigma_X\sigma_Y$:

$$r_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu_X)^2\sum_{n=1}^{N}(y_n-\mu_Y)^2}}.$$

Для нашего примера имеем: $\sigma_X \approx 0{,}702,\ \sigma_Y \approx 0.552$

$$r_{X,Y} = \frac{-0.38}{0{,}702\cdot 0{,}552} \approx -0.99.$$

Достоинства коэффициента корреляции

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)^2 \sum_{n=1}^{N}(y_n - \mu_Y)^2}}.$$

- Корреляция имеет нормированное значение от -1 до 1

Достоинства коэффициента корреляции

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)^2 \sum_{n=1}^{N}(y_n - \mu_Y)^2}}.$$

- Корреляция имеет нормированное значение от -1 до 1
- Корреляция безразмерная величина

Достоинства коэффициента корреляции

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)^2 \sum_{n=1}^{N}(y_n - \mu_Y)^2}}.$$

- Корреляция имеет нормированное значение от -1 до 1
- Корреляция безразмерная величина
- Значения близкие к -1 говорят об отрицательной зависимости, а близкие к $+1$ говорят о положительной зависимости.

Достоинства коэффициента корреляции

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_X)^2 \sum_{n=1}^{N}(y_n - \mu_Y)^2}}.$$

- Корреляция имеет нормированное значение от -1 до 1
- Корреляция безразмерная величина
- Значения близкие к -1 говорят об отрицательной зависимости, а близкие к $+1$ говорят о положительной зависимости
- Если корреляция близка к 0, то считается, что X и Y не связаны между собой **линейной зависимостью**

Корреляционная функция

В ЦОС дискретные сигналы часто нормированы (находятся в диапазоне $[-1, \quad 1]$) и имеют среднее значение равное 0 и приблизительно одинаковые СКО, поэтому для оценки их корреляции можно использовать сумму произведений отсчетов сигнала

$$r_{x,y} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

Корреляционная функция

В ЦОС дискретные сигналы часто нормированы (находятся в диапазоне $[-1, \quad 1]$) и имеют среднее значение равное 0 и приблизительно одинаковые СКО, поэтому для оценки их корреляции можно использовать сумму произведений отсчетов сигнала

$$r_{x,y} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

Корреляционная функция

$$r_{x,y}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell)y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-\ell)$$

Корреляционная функция

Чем более похожи два сигнала при конкретной временной задержке ℓ, тем больше значение принимает корреляционная функция $r_{x,y}(\ell)$.

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-\ell), \qquad -(N-1) \le \ell \le (N-1).$$

Пример

Рассчитайте корреляционную функцию для сигналов:

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \ \text{ и } \ y(n) = u(n-3) - u(n-9).$$

Построить график корреляционной функции ($N = 10$).

Корреляционная функция

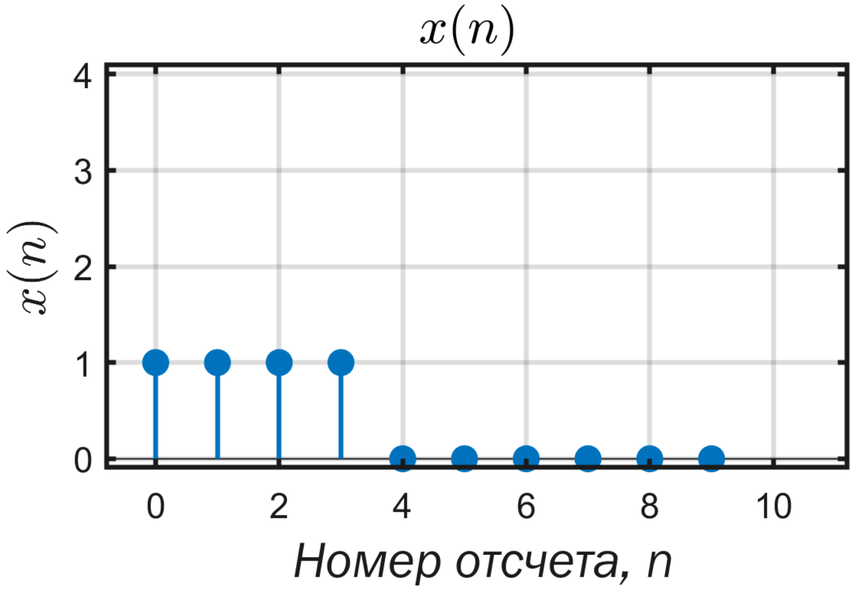
$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-\ell), \qquad -(N-1) \le \ell \le (N-1).$$

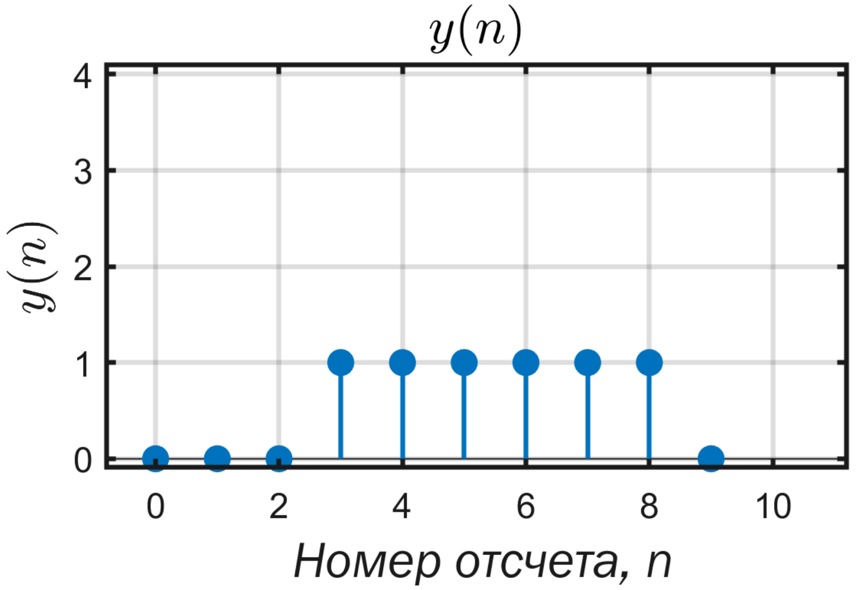
Пример

Рассчитайте корреляционную функцию для сигналов:

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \;\text{ и }\; y(n) = u(n-3) - u(n-9).$$

Построить график корреляционной функции ($N = 10$).





Корреляционная функция

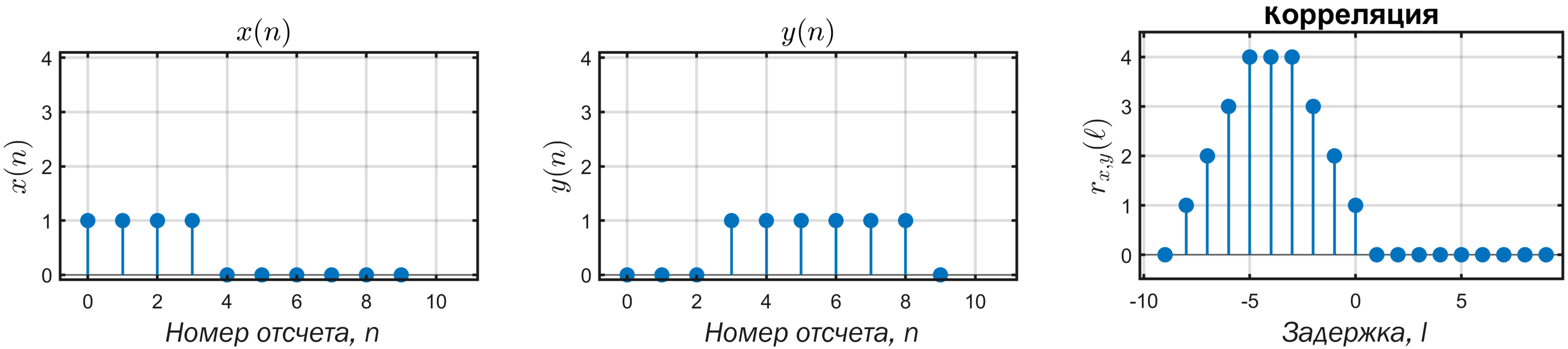
$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-\ell), \qquad -(N-1) \le \ell \le (N-1).$$

Пример

Рассчитайте корреляционную функцию для сигналов:

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \ \text{ и } \ y(n) = u(n-3) - u(n-9).$$

Построить график корреляционной функции ($N = 10$).



Автокорреляционная функция (АКФ)

АКФ последовательности длины N позволяет оценить зависимость между её отсчетами при различных временных сдвигах по времени ℓ:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\ell), -(N-1) \leq \ell \leq (N-1).$$

Автокорреляционная функция (АКФ)

АКФ последовательности длины N позволяет оценить зависимость между её отсчетами при различных временных сдвигах по времени ℓ:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\ell), -(N-1) \le \ell \le (N-1).$$

- АКФ является мерой самоподобия (self-similarity) сигнала на различном временном удалении ℓ.

Автокорреляционная функция (АКФ)

АКФ последовательности длины N позволяет оценить зависимость между её отсчетами при различных временных сдвигах по времени ℓ:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\ell), -(N-1) \leq \ell \leq (N-1).$$

- АКФ является мерой самоподобия (self-similarity) сигнала на различном временном удалении ℓ.
- Когда значение $r_{xx}(\ell)$ велико для какого-то ℓ, то говорят, что отсчеты расположенные на расстоянии ℓ имеют высокую корреляцию.

Автокорреляционная функция (АКФ)

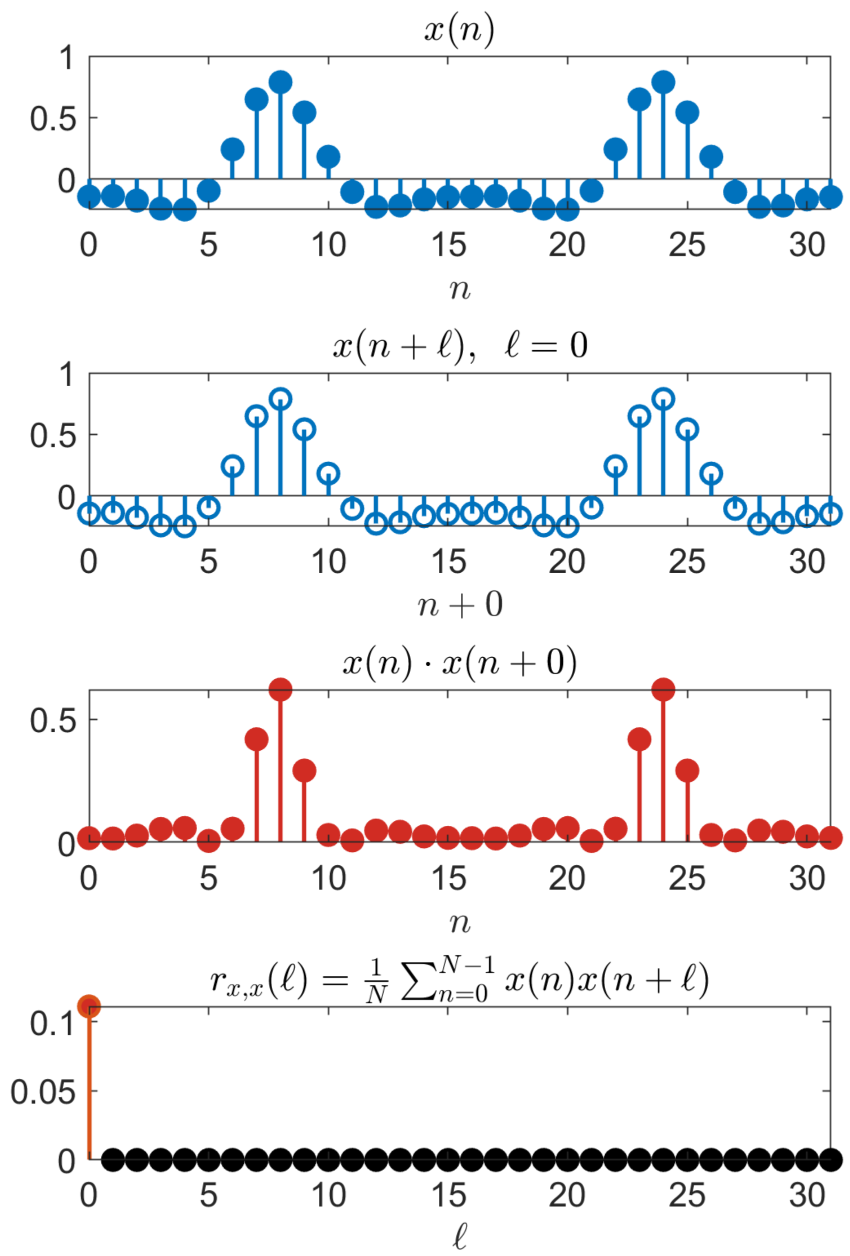
АКФ последовательности длины N позволяет оценить зависимость между её отсчетами при различных временных сдвигах по времени ℓ:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+\ell), -(N-1) \leq \ell \leq (N-1).$$

- АКФ является мерой самоподобия (self-similarity) сигнала на различном временном удалении ℓ.
- Когда значение $r_{xx}(\ell)$ велико для какого-то ℓ, то говорят, что отсчеты расположенные на расстоянии ℓ имеют высокую корреляцию.
- Энергия сигнала сконцентрирована на 0-м отсчете АКФ:

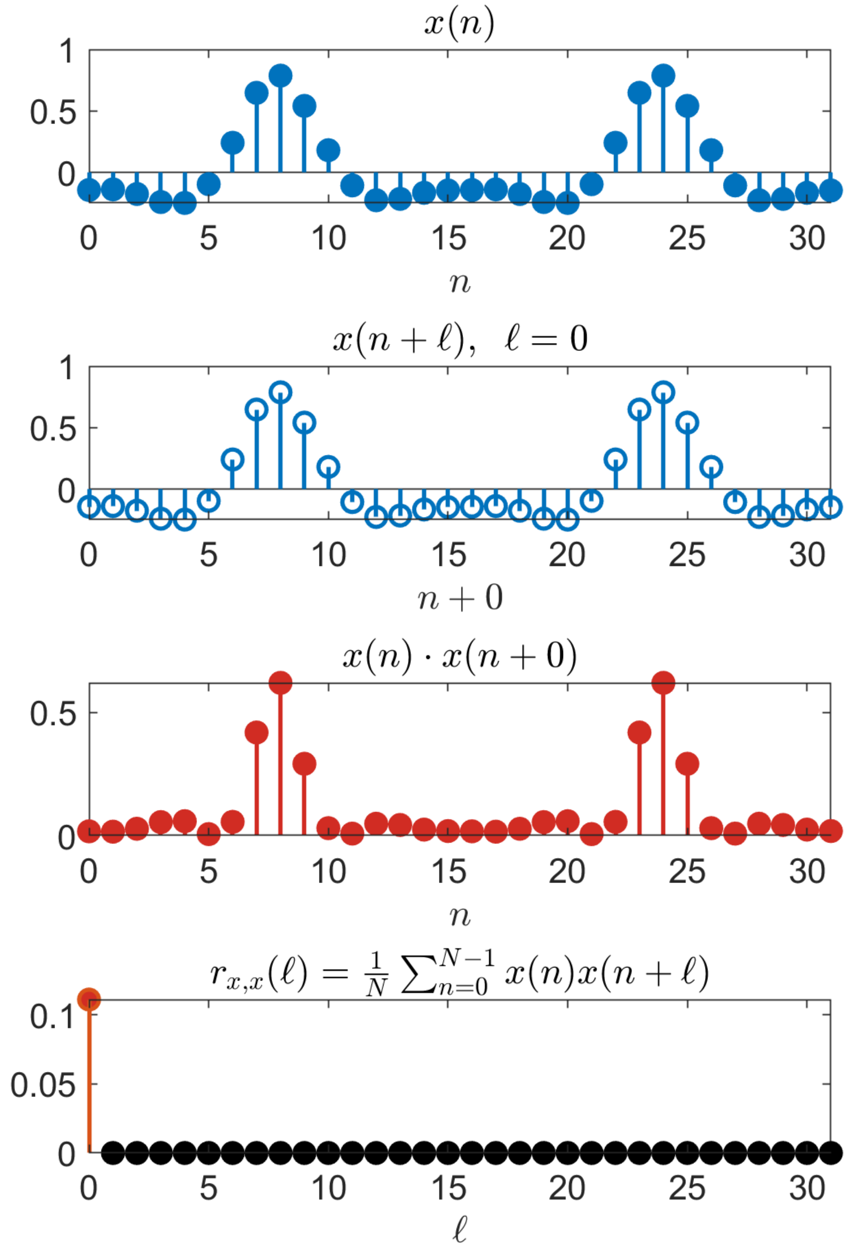
$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = r_{xx}(0)$$

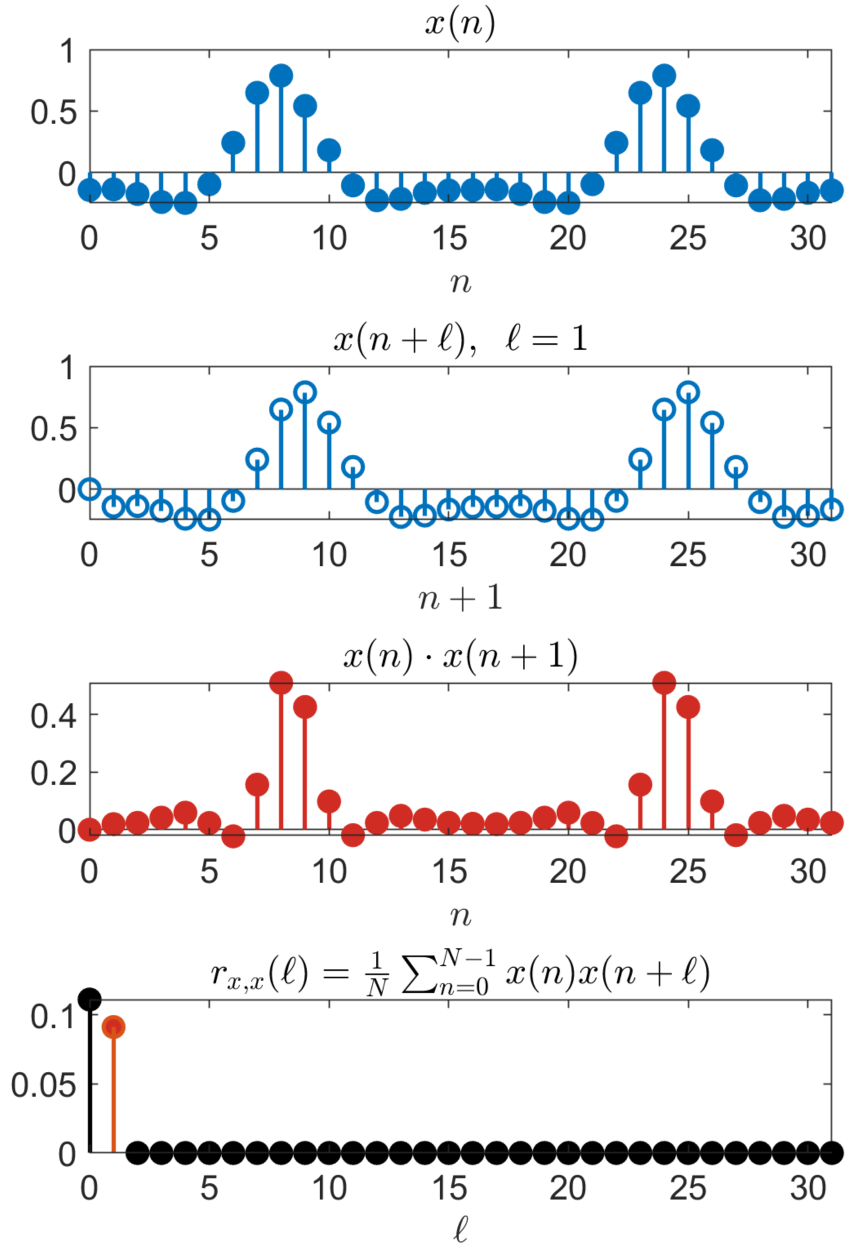
Пример АКФ



$$\ell = 0$$

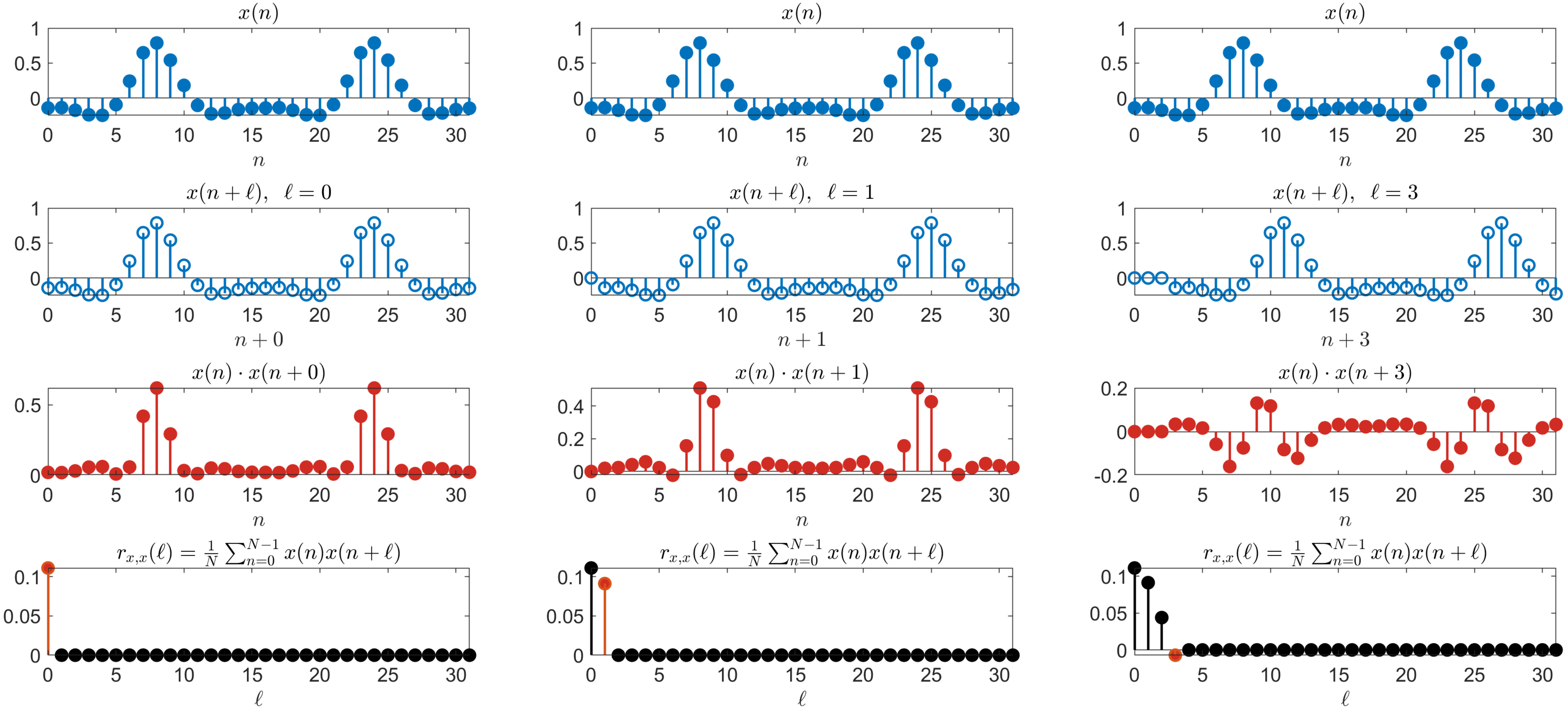
Пример АКФ





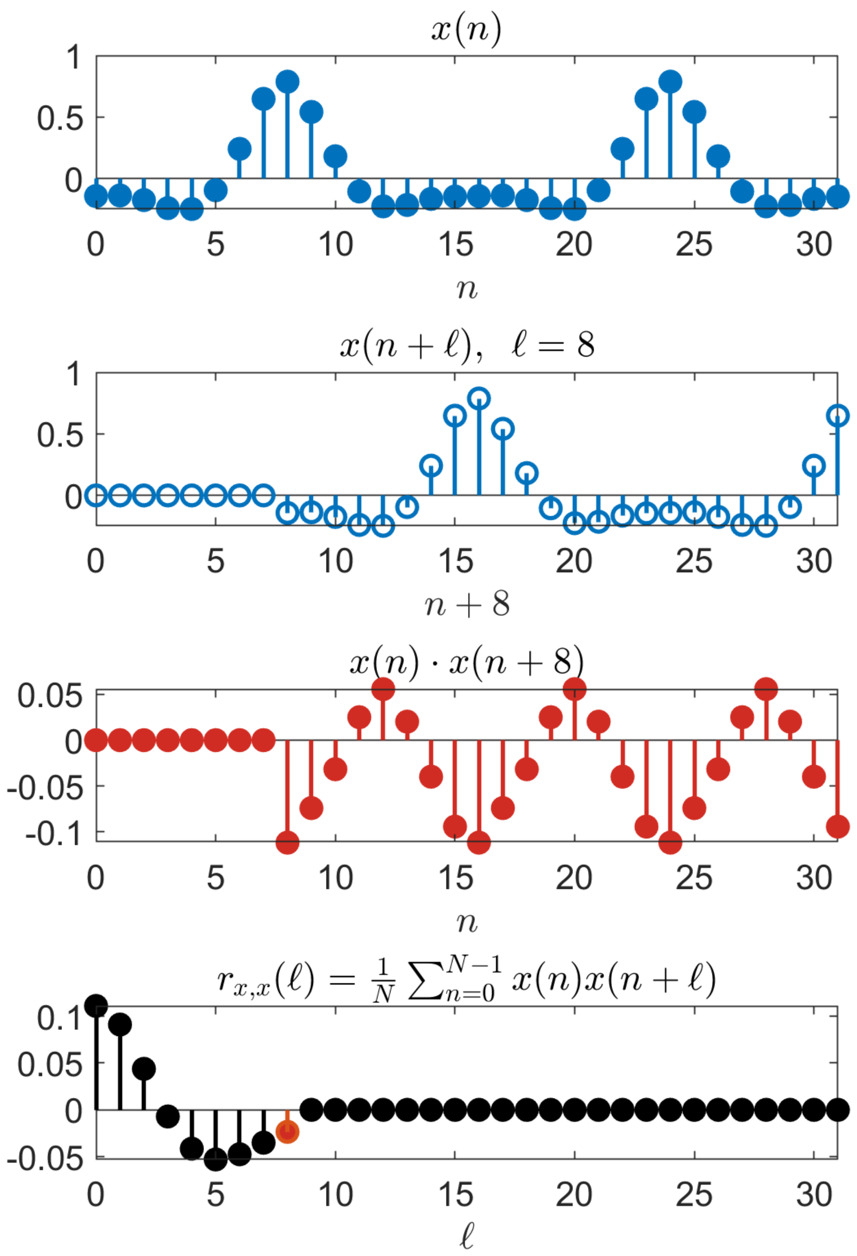
$\ell = 0$ $\ell = 1$

Пример АКФ



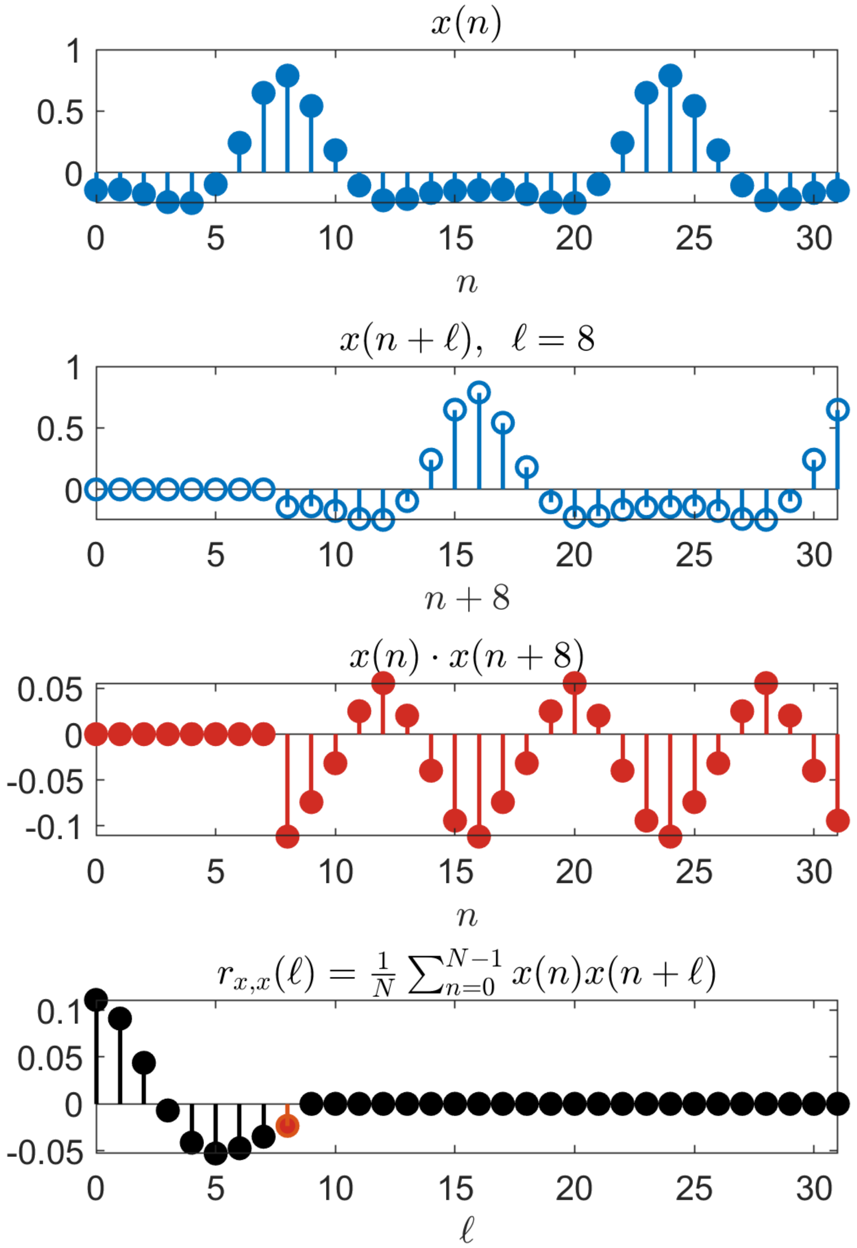
$\ell = 0$ $\ell = 1$ $\ell = 3$

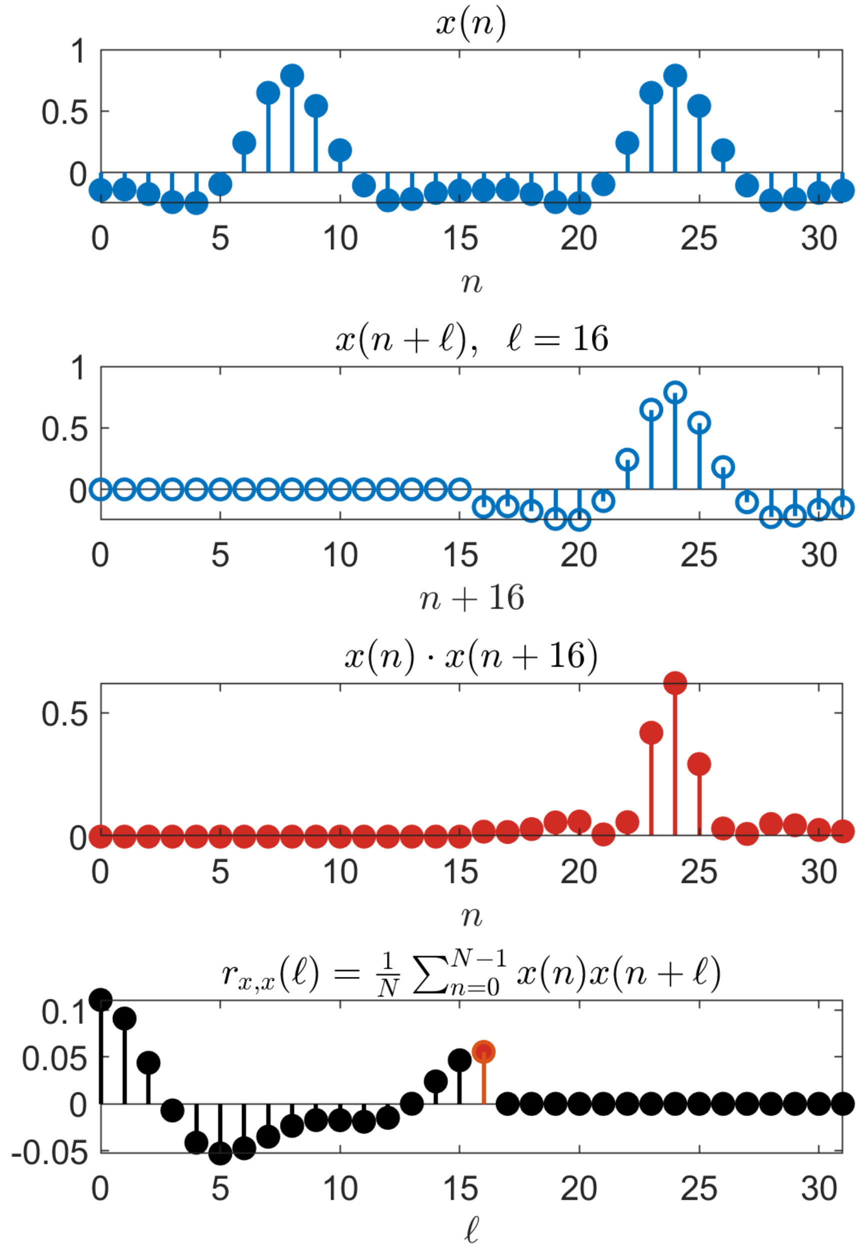
Пример АКФ



$$\ell = 8$$

Пример АКФ

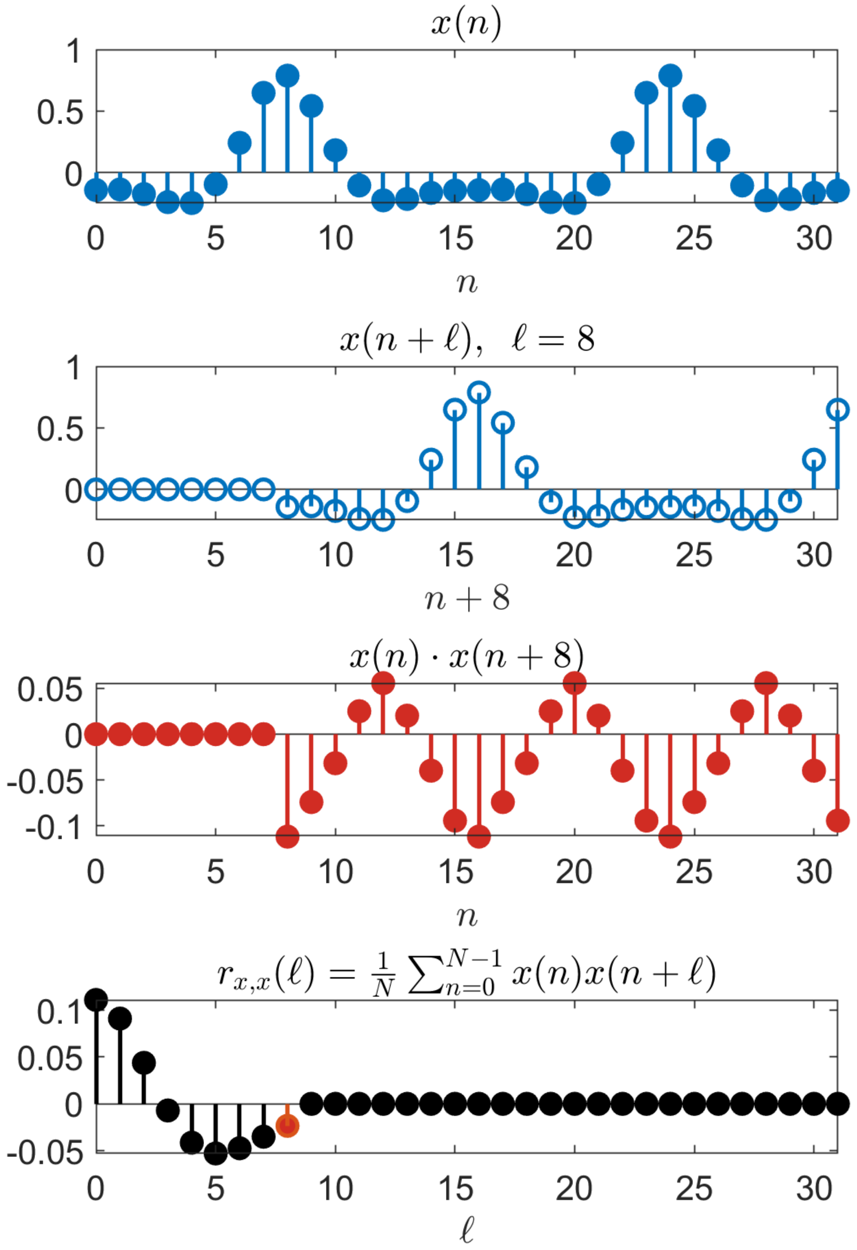




$\ell = 8$

$\ell = 16$

Пример АКФ



$\ell = 8$ $\qquad$ $\ell = 16$ $\qquad$ $\ell = 31$

Применение АКФ

С помощью автокорреляционной функции можно выявить скрытую в сигнале периодичность.

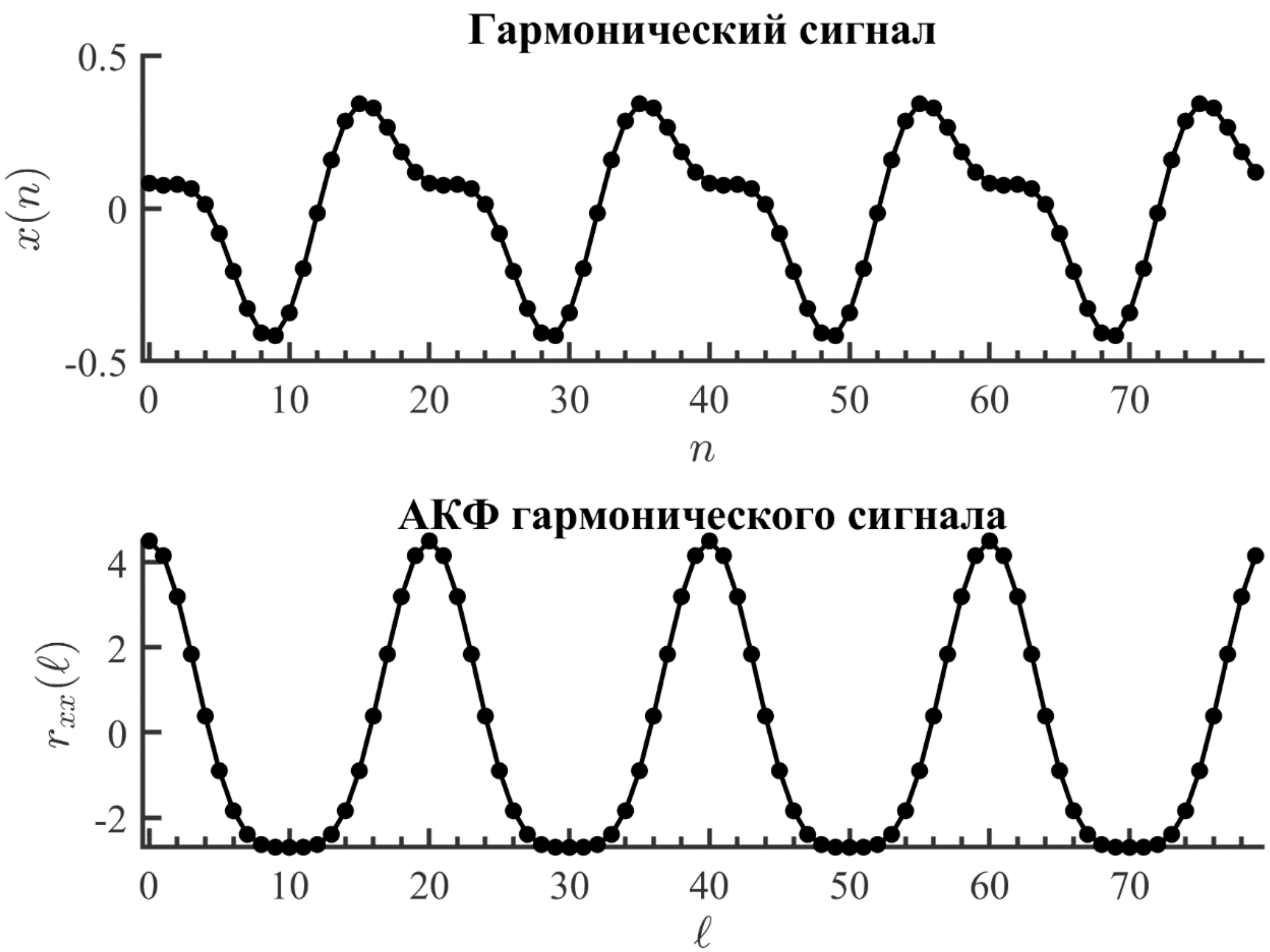
Применение АКФ

С помощью автокорреляционной функции можно выявить скрытую в сигнале периодичность.

Допустим, что сигнал содержит гармоническое колебание с периодом в 20 отсчетов. Можно смело предположить, что его АКФ $r_{xx}(\ell)$ будет иметь максимум в точке $\ell = 20$.

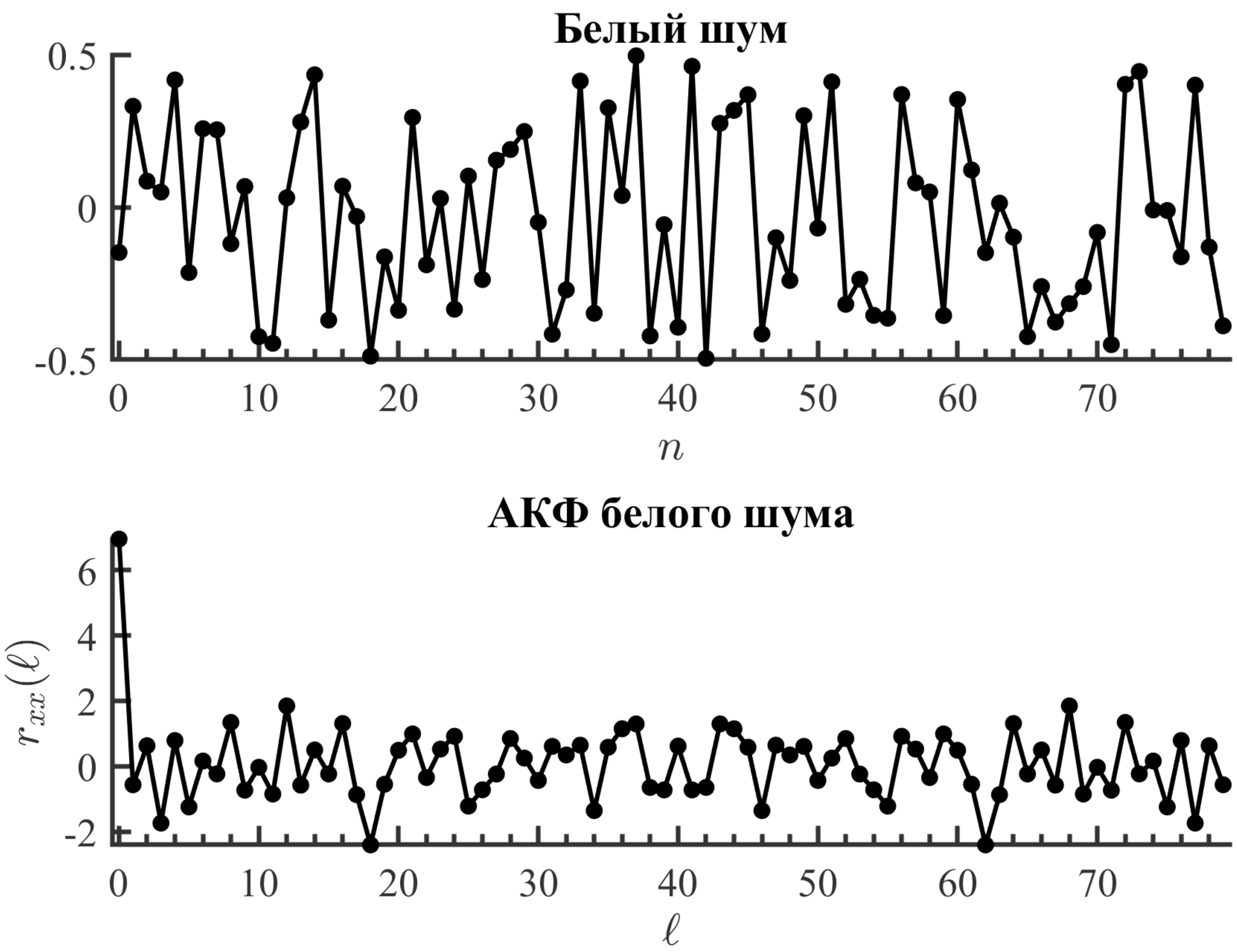
Применение АКФ

Допустим, что сигнал содержит гармоническое колебание с периодом в 20 отсчетов. Можно смело предположить, что его АКФ $r_{xx}(\ell)$ будет иметь максимум в точке $\ell = 20$.



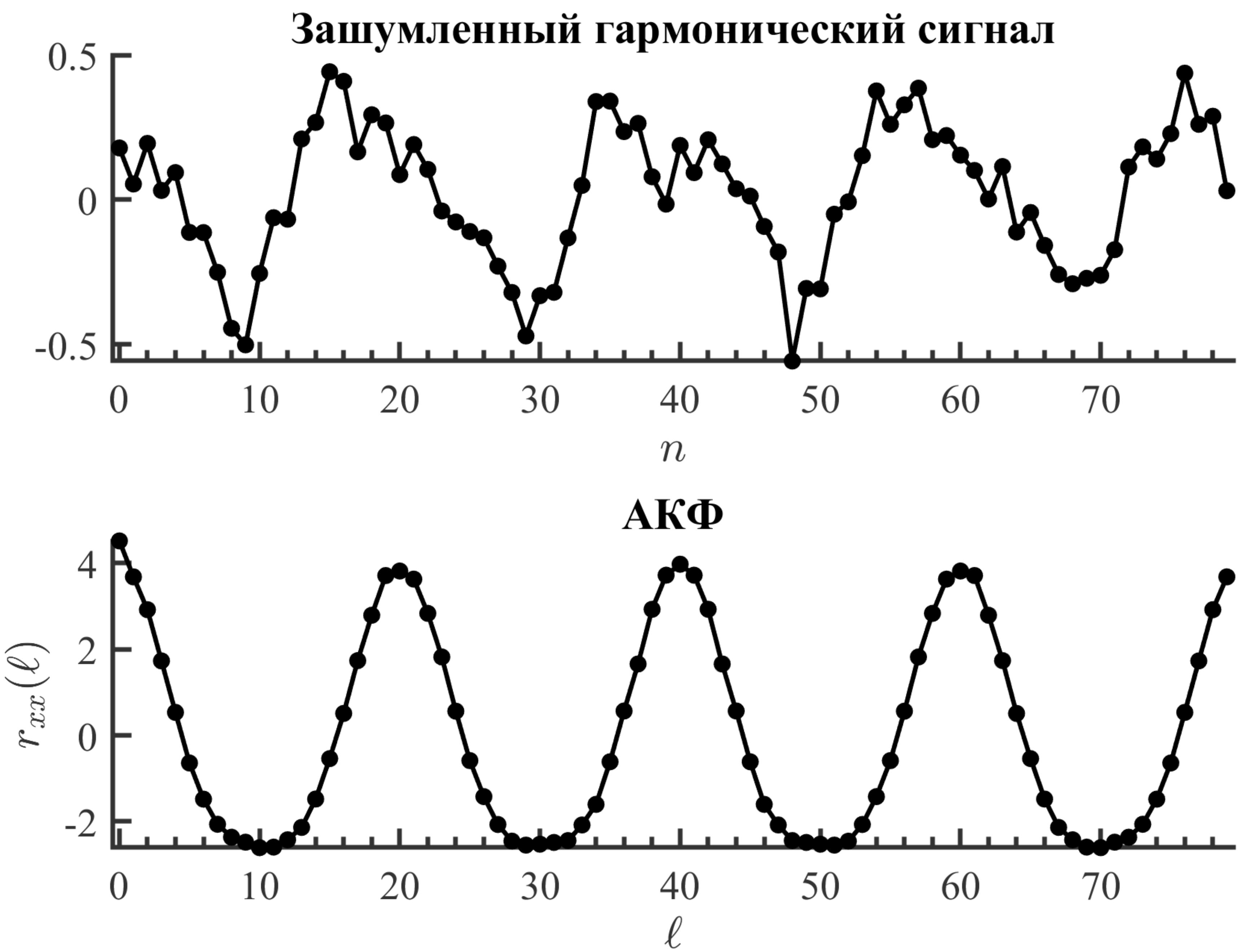
Применение АКФ

Белый шум представляет собой случайный сигнал. Известно, что каждый последующий отсчет белого шума не зависит от предыдущего.



Применение АКФ

Сигнал содержит гармоническое колебание с периодом в 20 отсчетов на который наложен белый шум.



Применение АКФ

АКФ используют для определения частоты основного тона речевого сигнала F_0. Для определения F_0 от фрейма речевого сигнала вычисляют АКФ. Положение первого пика АКФ для $\tau > 0$ определяет задержку соответствующую периоду основного тона T_0. Частота основного тона определялась как

$$F_0 = 1/T_0.$$