

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛА

ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

д.т.н. Дашкевич Максим Юсифович



Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Энергия сигнала

- Пусть $x(t)$ – напряжение на резисторе R .
- По закону Ома: $i(t) = \frac{x(t)}{R}$.

Энергия сигнала

- Пусть $x(t)$ – напряжение на резисторе R .
- По закону Ома: $i(t) = \frac{x(t)}{R}$.
- Мгновенная мощность: $p(t) = x^2(t)/R$.

Энергия сигнала

- Пусть $x(t)$ – напряжение на резисторе R .
- По закону Ома: $i(t) = \frac{x(t)}{R}$.
- Мгновенная мощность: $p(t) = x^2(t)/R$.
- **Мощность сигнала** измеряется при $R = 1$ Ом: $p(t) = x^2(t)$.

Энергия сигнала

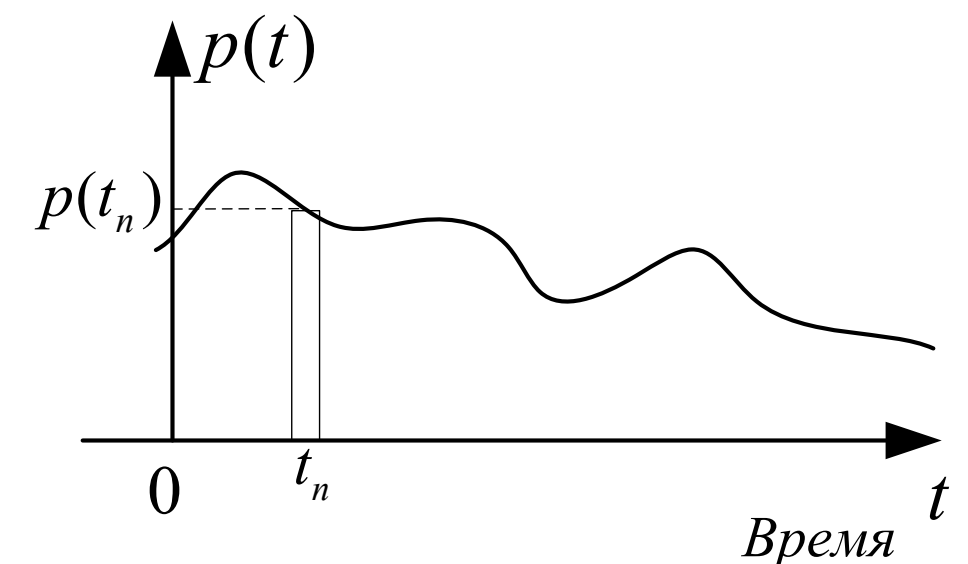
- Пусть $x(t)$ – напряжение на резисторе R .
- По закону Ома: $i(t) = \frac{x(t)}{R}$.
- Мгновенная мощность: $p(t) = x^2(t)/R$.
- **Мощность сигнала** измеряется при $R = 1$ Ом: $p(t) = x^2(t)$.

– Энергия сигнала на интервале $[t_n, t_n + \Delta t]$:

$$E_n \approx p(t_n)\Delta t$$

– **Общая энергия сигнала:**

$$E = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t_n)\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt$$



Энергия дискретного сигнала

Энергия дискретного сигнала $x(n)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Сигналы с конечной энергией называются ***энергетическими сигналами***.

Энергия дискретного сигнала

Энергия дискретного сигнала $x(n)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Сигналы с конечной энергией называются **энергетическими сигналами**.

Мощность дискретного сигнала $x(n)$

Апериодический сигнал

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2,$$

Задача. Найти мощность сигнала $x(n) = u(n)$.

Энергия дискретного сигнала

Энергия дискретного сигнала $x(n)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Сигналы с конечной энергией называются **энергетическими сигналами**.

Мощность дискретного сигнала $x(n)$

Апериодический сигнал

N -периодический сигнал

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2,$$

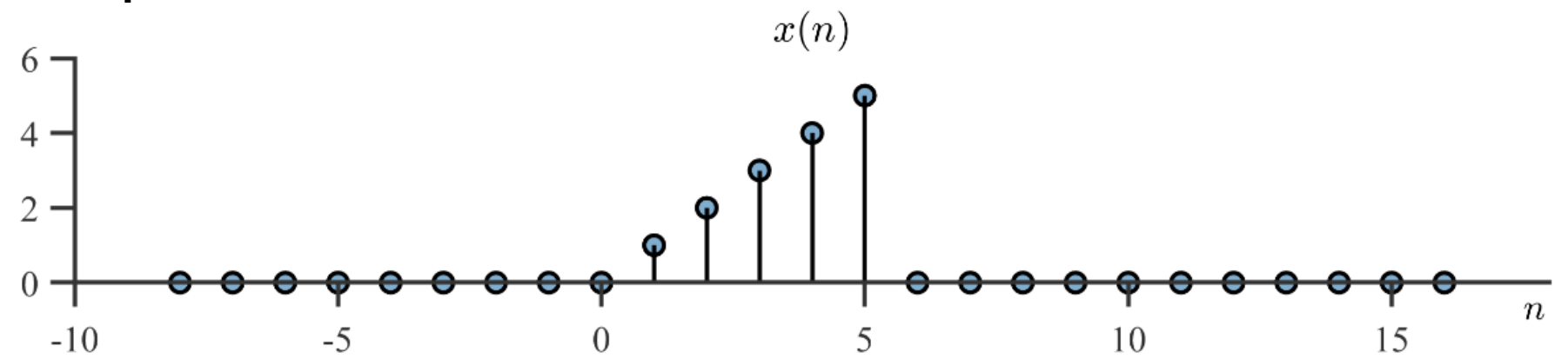
$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2.$$

Сигнал для которого P_x имеет конечное ненулевое значение называют **мощностным**.

Пример: вычисление энергии и мощности

Найти энергию и мощность дискретного сигнала

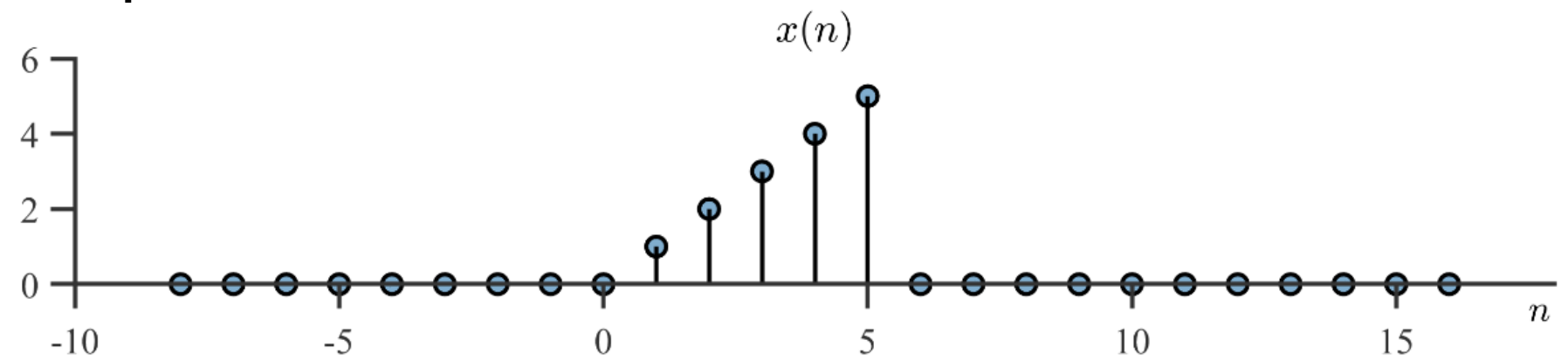
$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Пример: вычисление энергии и мощности

Найти энергию и мощность дискретного сигнала

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

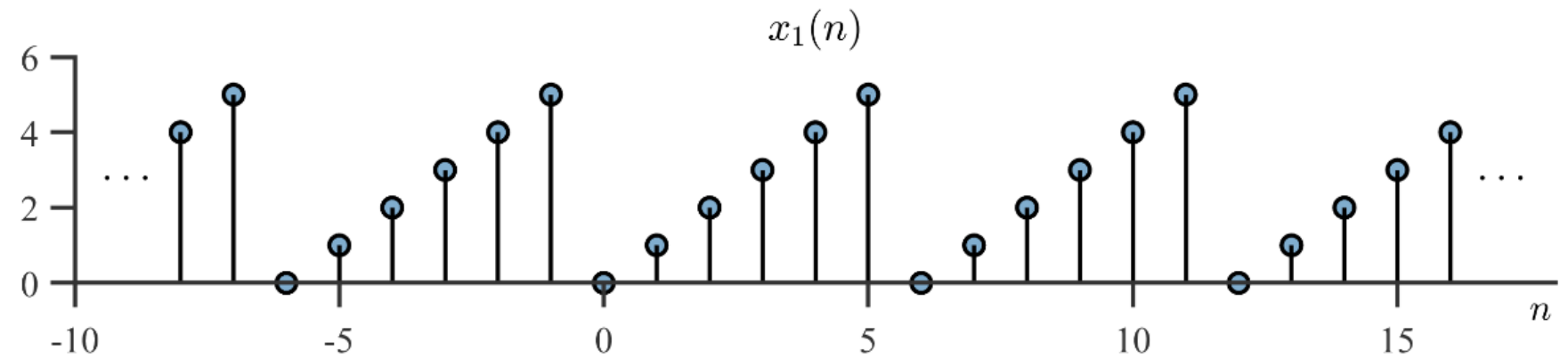


$$E_x = \sum_{n=0}^5 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Пример: вычисление энергии и мощности

Найти энергию и мощность дискретного сигнала

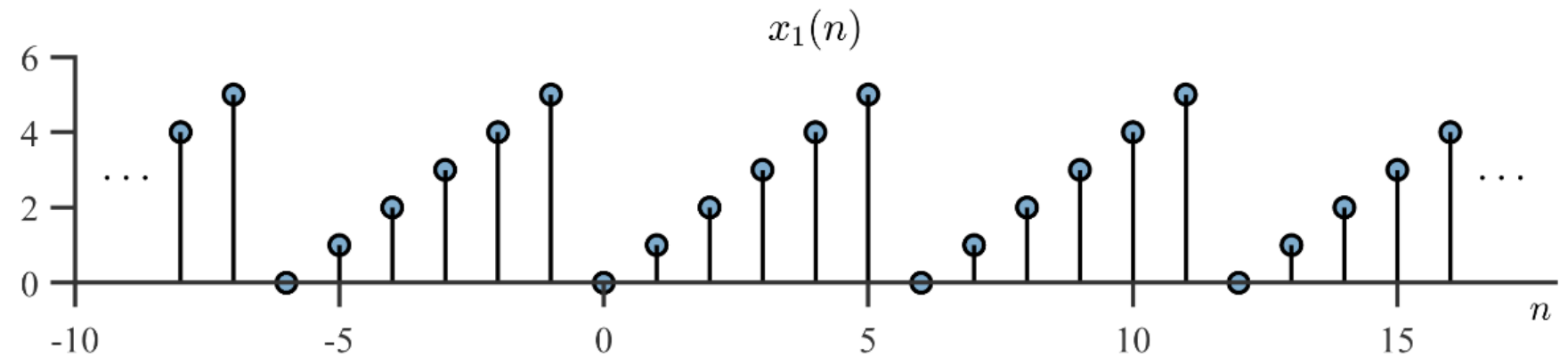
$$x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + 6k)$$



Пример: вычисление энергии и мощности

Найти энергию и мощность дискретного сигнала

$$x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + 6k)$$



$$E_{x_1} = \infty$$

$$P_{x_1} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 n^2 = \frac{1}{6} E_x = \frac{55}{6} = 9 \frac{1}{6} \approx 9,1667.$$

Ортогональность дискретных сигналов

Два дискретных сигнала **ортогональны**, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{xy} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = 0. \quad (1)$$

Энергия и мощность ортогональных сигналов **аддитивны**, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) + y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2. \quad (2)$$

Итого

Тип сигнала	Обозначение	Энергия	Мощность
Конечный сигнал	$x(n),$ $n = 0, 1, \dots, N - 1$	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	Не определена
Апериодический сигнал	$x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x(n) ^2,$
Периодический сигнал	$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$ $k \in \mathbb{Z}$	∞	$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) ^2.$
Сигнал с компактным носителем	$\bar{x}(n)$ $= \begin{cases} x(n), & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	0

Применение: отношение сигнал/шум

Аддитивная модель сигнала

$$x(n) = \underbrace{s(n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{r(n)}_{\text{шум}}$$

Применение: отношение сигнал/шум

Аддитивная модель сигнала

$$x(n) = \underbrace{s(n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{r(n)}_{\text{шум}}$$

Отношение сигнал/шум (SNR = signal-to-noise-ratio)

$$\text{SNR}_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_r}$$

Применение: RMS (root-mean-square)

RMS – среднеквадратичное значение сигнала

$$RMS_x = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2}$$

Применение: RMS (root-mean-square)

RMS – среднеквадратичное значение сигнала

$$RMS_x = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2}$$

Пример

Для $x(n) = A \sin(\omega n)$ среднеквадратичное значение равно

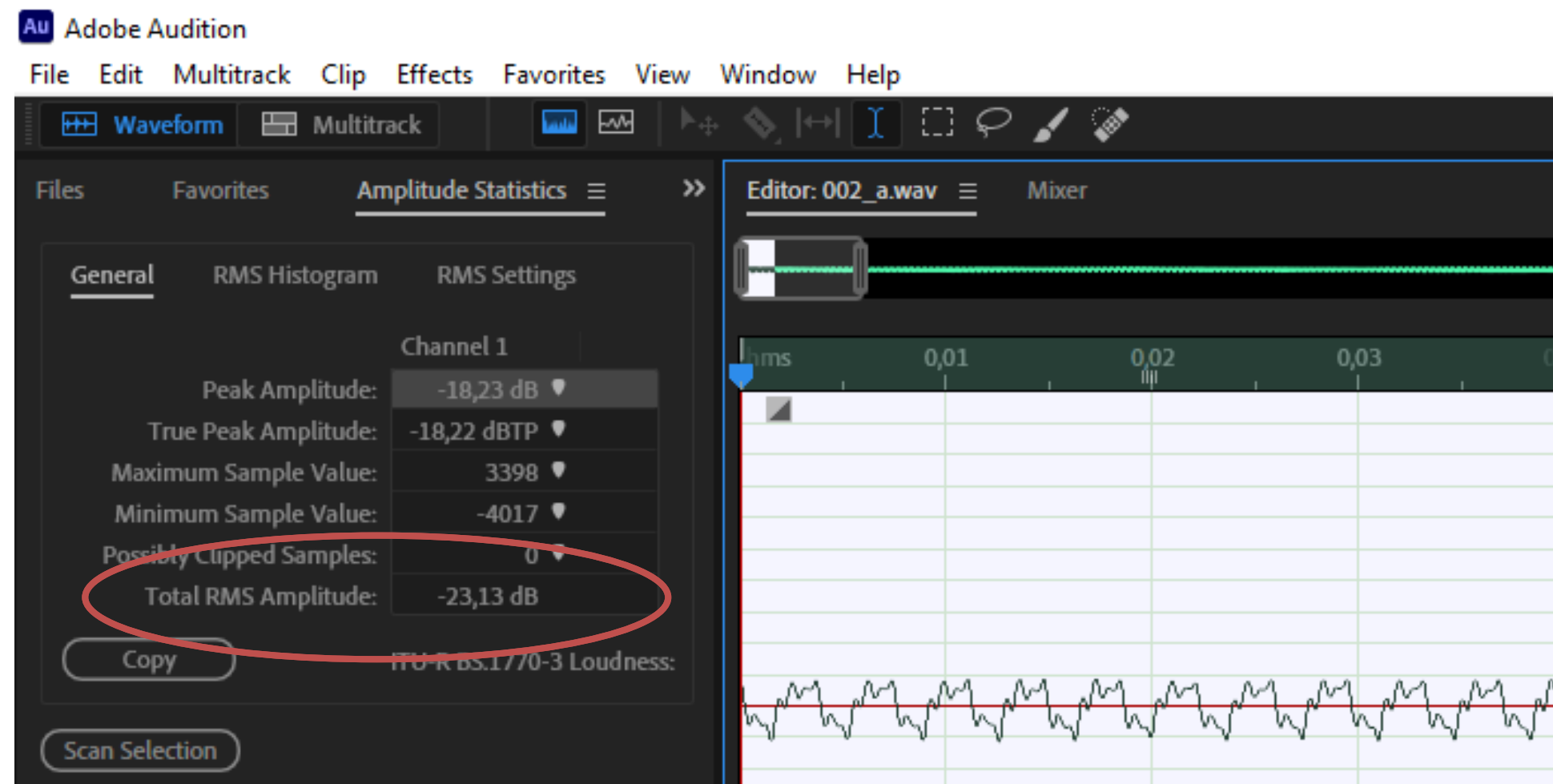
$$RMS_x = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Применение: RMS (root-mean-square)

RMS – среднеквадратичное значение сигнала

$$RMS_x = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2}$$

Пример



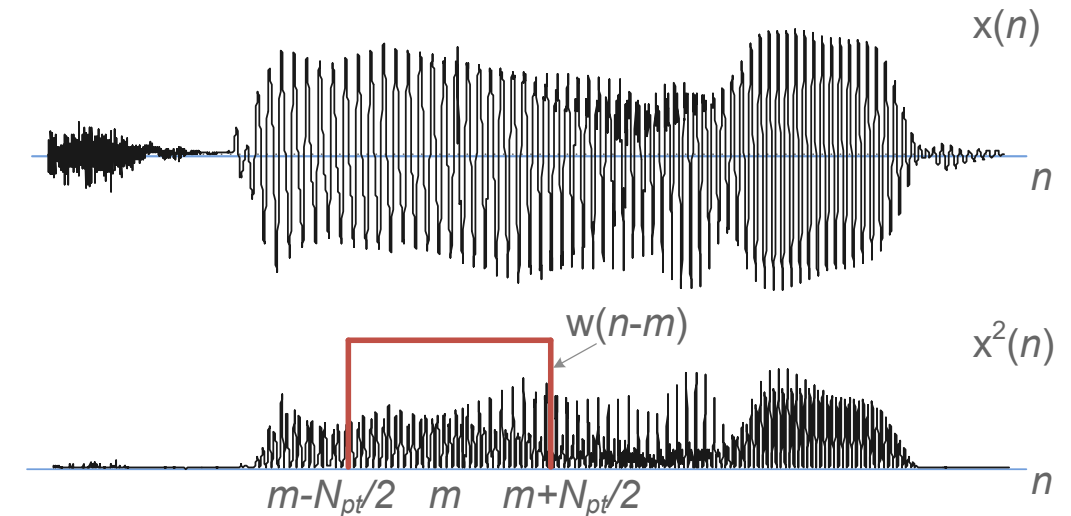
Применение: анализ речевого сигнала

Кратковременная мощность сигнала

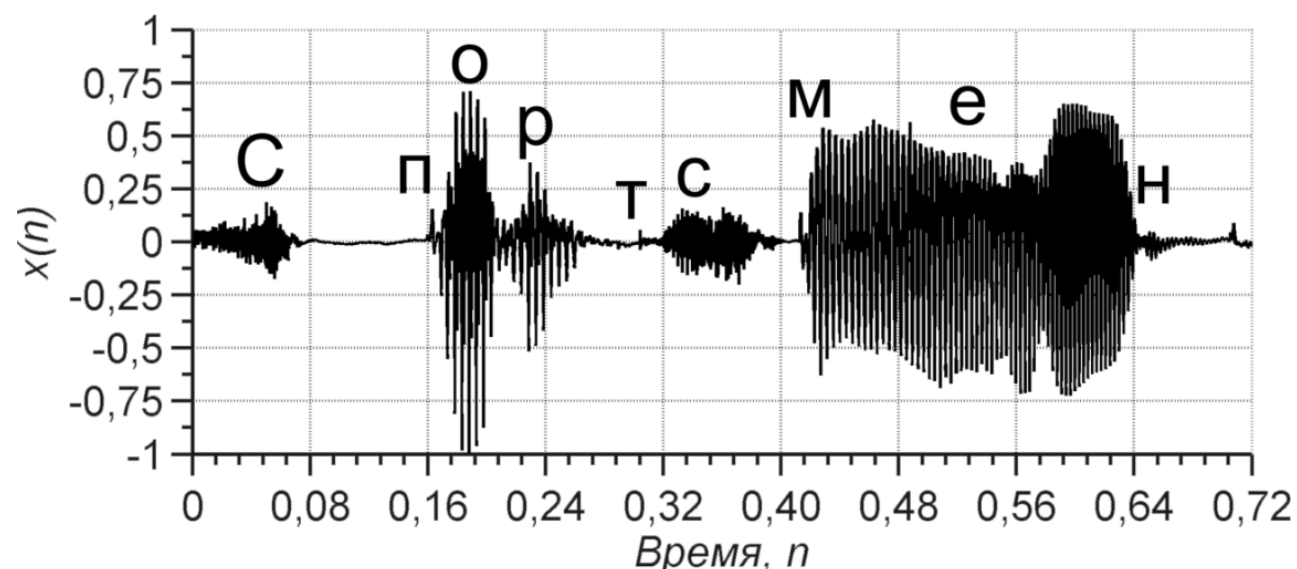
$$P(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=n-N/2}^{n+N/2} x^2(m)$$

$$P(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(m)w(n-m)$$

$$w(n) = \begin{cases} 1, & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Сепарация (вокализованный / невокализованный)



$$v(n) = \begin{cases} 1, & P(n) > P_{thr} \\ 0, & P(n) \leq P_{thr} \end{cases}$$

$$x_v(n) = x(n)v(n),$$

$$x_u(n) = x(n) - x_v(n),$$

Среднее значение и СКО сигнала

Среднее значение

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

Среднее значение и СКО сигнала

Среднее значение

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

Дисперсия сигнала

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \mu_x)^2$$

Среднее значение и СКО сигнала

Среднее значение

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

Дисперсия сигнала

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \mu_x)^2$$

Среднеквадратичное отклонение (СКО) сигнала

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \mu_x)^2}$$

Как соотносятся σ_x и RMS?