2 ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1 Общие сведения о дискретных системах

С математической точки зрения *система с дискретным временем* определяется как *преобразование*, или *оператор*, переводящий входную последовательность $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ – отклик (или реакцию) системы, что можно обозначить как

$$y(n) = T\{x(n)\}. \tag{2.1}$$

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x(n)$. В некоторых случаях система не имеет входного сигнала. Примером служит генератор синусоидального колебания. Тем не менее, для генератора может служить входом частота, фаза, амплитуда. Такие генераторы являются базовыми элементами для трансмиттеров, радаров и музыкальных синтезаторов.

Рассмотрим несколько примеров примитивных систем.

1) Система, генерирующая постоянный сигнал на выходе (игнорирование входа):

$$y(n) = C.$$

При помощи такой системы можно моделировать источник питания.

2) Система, реализующая тождество:

$$y(n) = x(n).$$

3) Усилитель:

$$y(n) = Ax(n).$$

Далее рассматриваются примеры более сложных систем.

1) *Идеальная система задержки* (ИСЗ) определяется по формуле

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty,$$

где n_d – фиксированное натуральное число, называемое *задержкой* системы.

Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов.

2) Общая система с*кользящего среднего* имеет следующий вид

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k) =$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \left(x(n + M_1) + x(n + M_1 - 1) + \cdots + x(n) + \cdots + x(n - M_2)\right).$$

Она вычисляет n-й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ отсчетов входной последовательности, расположенных вокруг n-го отсчета.

2.2 Свойства дискретных систем

2.2.1 Системы без памяти

Для системы без памяти характерно, что ее текущий отклик $y(n)$ зависит только от текущего входного значения $x(n)$ для любого n.

Например, система

$$y(n) = x^2(n),$$

является системой без памяти, а система

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

является системой с памятью.

Характерно, что системы без памяти при технической реализации не требуют сохранения контекста своей работы. Выходной результат в них зависит только от текущего входа.

2.2.2 Обратимость

Обратимость системы – важное свойство в таких приложениях как частотная коррекция канала и обратная фильтрация. Говорят, что система является *обратимой*, если вход системы можно восстановить единственным образом – зная выход системы. Для того чтобы система была обратимой, она должна для различных входов производить различные выходы. Другими словами, если есть два входа $x_1(n)$ и $x_2(n)$, причем $x_1(n) \neq x_2(n)$, то должно выполняться неравенство $y_1(n) \neq y_2(n)$.

Система, определенная как

$$y(n) = x(n)g(n),$$

является обратимой только тогда, когда $g(n) \neq 0 \ \forall n.$ В частности зная, $y(n)$ и $g(n)$, которые не равны нулю для всех n, вход $x(n)$ можно восстановить по $y(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}.$$

2.2.3 Детерминированность (каузальность)

Систему называют *детерминированной*, если выходной отсчет системы с номером n_0 зависит только от входных отсчетов с номерами $n \leq n_0$.

Например, *компрессор (уплотнитель)* – это система, определяемая соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Компрессор отбрасывает $M - 1$ из каждых M отсчетов входной последовательности.

Компрессор не является детерминированной системой, поскольку $y(1) = x(M)$, т. е. выход в момент времени $n = 1$ зависит от входного отсчета в момент времени $n = M$.

2.2.4 Аддитивность

Под аддитивностью понимается суперпозиция причин и результатов. Так, если причина «x_1» вызывает результат «y_1» и если причина «x_2» вызывает результат «y_2», то суперпозиция причин и результатов означает, что причина «x_1+x_2» вызовет результат «$y_1 + y_2$».

Выражаясь математически, система называется *аддитивной*, если

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

для любых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

2.2.5 Однородность (гомогенность)

Под однородностью понимается наличие пропорциональности между входным и выходным сигналами. Дадим этому понятию более точное определение.

Система называется *однородной*, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, c \in \mathbb{C}.$$

для входной последовательности $x(n)$. То есть для любого комплексного числа c реакция системы на входной сигнал $cx(n)$ в c раз больше реакции системы на входной сигнал $x(n)$.

Например, система, описываемая выражением

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)},$$

не аддитивна, поскольку

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = \frac{\left(x_1(n) + x_2(n)\right)^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)},$$

что не то же самое, что

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}.$$

Данная система является однородной, поскольку

$$T\{cx(n)\} = \frac{\left(cx(n)\right)^2}{cx(n-1)} = c\,\frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT\{x(n)\}.$$

Рассмотрим дополнительный пример.

Пример 2.1 Является ли система, описываемая выражением

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1),$$

аддитивной и/или однородной?

Решение:

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1),$$

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1)$$

Аддитивность подтверждается.

$$T\{cx(n)\} = cx(n) + \left(cx(n-1)\right)^* = cx(n) + c^*x^*(n-1).$$

Очевидно, что это не равно

$$cT\{x(n)\} = cx(n) + cx^*(n-1).$$

Однородность не подтверждается.

2.2.6 Линейные системы

Класс линейных систем определяется по принципу суперпозиции, т. е. обладает одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\}. \qquad (2.2)$$

Свойство линейности существенно упрощает вычисление отклика системы на заданный вход:

$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\},$$

поскольку коэффициенты $x(k)$ – константы, то мы можем использовать свойство однородности:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\}. \qquad (2.3)$$

Если обозначить через $h_k(n)$ отклик системы на единичный импульс в момент время $n = k$:

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\},$$

то (2.3) преобразуется:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n). \qquad (2.4)$$

2.2.7 Стационарные системы

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности приводит к появлению такого же сдвига выходной последовательности.

Более формально, если $y(n) = T\{x(n)\}$, то для стационарной системы справедливо тождество

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0). \qquad (2.5)$$

Стационарные системы еще называют *инвариантными относительно сдвига*. Большинство рассмотренных ранее систем стационарны.

Пример 2.2. Определить является ли компрессор стационарной системой.

Решение. Компрессор описывается соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Показать, что компрессор не является стационарным можно следующим образом. Рассмотрим реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1(n) = x(n-n_0)$. Если бы система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1(n) = y(n-n_0)$. Однако

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn-n_0) \neq y(n-n_0) = x\big(M(n-n_0)\big),$$

т. е. соотношение (2.5) не выполняется и, следовательно, компрессор не является стационарной системой.

2.2.8 Линейные стационарные системы

Линейные стационарные системы (ЛС-системы) представляют собой особо распространенный класс систем. Наличие этих свойств позволяет описывать системы в удобном виде. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов.

Если $h(n)$ – реакция системы на единичный импульс $\delta(n)$, то ее отклик на $\delta(n-k)$ будет $h(n-k)$. Поэтому, возвращаясь к формуле (2.4), мы получим:

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\} = h(n-k),$$

следовательно

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется *сверткой* и обозначается как

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad (2.7)$$

где символ «∗» обозначает операцию свертки.

Последовательность $h(n)$ называется импульсной характеристикой системы. Таким образом, ЛС-система полностью определяется своей импульсной характеристикой $h(n)$, в том смысле, что, опираясь на (2.6), можно вычислить отклик $y(n)$ на *любой* поданный сигнал $x(n)$.

Пример 2.3. Первый ненулевой элемент последовательности $x(n)$ появляется на индексе $n = -6$ и имеет значение $x(-6) = 3$, последний ненулевой элемент имеет индекс $n = 24$ и значение $x(24) = -4$. Пусть

$$y(n) = x(n) * x(n).$$

Какой индекс будет у первого ненулевого элемента последовательности $y(n)$ и какое он будет иметь значение? Какой индекс будет у последнего ненулевого элемента $y(n)$ и какое он будет иметь значение?

Решение. Поскольку сворачиваются две последовательности конечной длины, то индекс первого ненулевого значения будет равен сумме индексов первых ненулевых элементов двух сворачиваемых последовательностей. В нашем случае, это индекс $n = -12$, а значение

$$y(-12) = x^2(-6) = 9.$$

Аналогичным образом, индекс последнего ненулевого элемента равен $n = 48$, и значение

$$y(48) = x^2(24) = 16.$$

2.2.9 Устойчивость

Говорят, что система устойчива, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Последовательность $x(n)$ называется *ограниченной*, если найдется такое конечное положительное число B_x, что

$$\forall n \quad |x(n)| \le B_x < \infty.$$

Таким образом, в устойчивой системе для *каждой* ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y, что

$$\forall n \quad |y(n)| \le B_y < \infty.$$

Важно понять, что устойчивость – свойство именно системы, а не входных последовательностей. Можно и для неустойчивой системы найти входную последовательность, для которой выход будет ограниченным. Для устойчивости важно, что выход ограничен для *любой* ограниченной входной последовательности.

Почти все рассмотренные прежде системы – устойчивы. Вот пример неустойчивой системы:$y(n) = \lg(x(n)) = -\infty$ для любого $x(n) = 0$.

Для линейной стационарной системы устойчивость гарантируется, если ее импульсная характеристика представляет собой абсолютно сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Пример 2.4. Является ли устойчивой ЛС-система с импульсной характеристикой: а) $h_1(n) = u(n)\alpha^n$ при $|\alpha| < 1$; б) $h_2(n) = u(n)n$?

Решение. а) Является устойчивой, поскольку импульсная характеристика $h_1(n)$ представляет собой сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|} \quad |\alpha| < 1.$$

б) Не является устойчивой, поскольку импульсная характеристика возрастает неограниченно.

2.3 Умножение полиномов при помощи свертки

Операция свертки тесно связана с умножением полиномов. Одним из важных применений свертки является умножение полиномов с постоянными коэффициентами. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – полиномы K-й и L-й степени, определяемые как

$$A(x) = a_0 x^K + a_1 x^{K-1} + \cdots + a_{K-1} x + a_K,$$
$$B(x) = b_0 x^L + b_1 x^{L-1} + \cdots + b_{L-1} x + b_K.$$

Коэффициенты произведения $A(x)B(x)$ получаются путем свертки соответствующих коэффициентов:

$$[a_0, a_1, \dots, a_{K-1}, a_K] * [b_0, b_1, \dots, b_{L-1}, b_L].$$

Пример 2.5. Вычислить $(x^2+2x+1)(3x+4)$, используя обычное правило умножения полиномов и свертку.

Решение

$$(x^2+2x+1)(3x+4) = 3x^3 + 10x^2 + 11x + 4.$$

Используем *MATLAB* для вычисления свертки:

```
conv([1 2 1],[3 4])
ans = 3 10 11 4
```

Таким образом, при помощи операции свертки находятся коэффициенты полинома-произведения.

2.4 Свойства ЛС-систем

Свойства ЛС-систем определяются свойствами операции свертки, поскольку ЛС-система полностью описывается сверткой. Таким образом, импульсная характеристика конкретной системы содержит всю информации о ней.

2.4.1 Коммутативность

Свертка коммутативна (подчинена переместительному закону):

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n).$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в (2.6): $m = n - k$, тогда

$$y(n) = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n), \qquad (2.8)$$

т. е. роли последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ поменялись.

Данное свойство также можно доказать, используя полиномы. Если $A(x)$ и $B(x)$ – полиномы, то коэффициенты полинома $C(x) = A(x)B(x)$ будут являться сверткой коэффициентов полиномов $A(x)$ и $B(x)$. Отсюда понятно, что свертка подчинена переместительному закону.

2.4.2 Дистрибутивность

Свертка удовлетворяет распределительному закону относительно сложения:

$$x(n) * \big(h_1(n) + h_2(n)\big) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n).$$

Это свойство является прямым следствием линейности и коммутативности свертки.

2.4.3 Каскадное соединение ЛС-систем

Две ЛС-системы, включенные последовательно, образуют одну ЛС-систему, чья импульсная характеристика совпадает со сверткой импульсных характеристик обеих систем (рисунок 2.1).

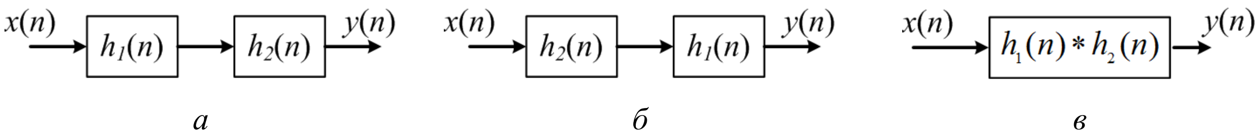


Рисунок 2.1 – Три линейные стационарные системы с одной и той же импульсной характеристикой

Реакция первой системы (см. рисунок 2.1, *а*) на вход $x(n) = \delta(n)$ равна $h_1(n)$. Поэтому последовательность из второй системы (см. рисунок 2.1, *б*) должна быть равна:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n).$$

Как следствие коммутативности свертки – порядок следования ЛС-систем в каскадном соединении не играет роли. По этой же причине импульсная характеристика каскада ЛС-систем не зависит от порядка, в котором они соединены. Этот факт отражен на рисунке 2.1, где три системы имеют одну и ту же импульсную характеристику.

2.4.4 Параллельное соединение ЛС-систем

При параллельном соединении системы имеют общий вход, а их выходы складываются и формируют реакцию всего соединения. Исходя из того, что свертка, описывающая работы ЛС-системы, подчинена дистрибутивному закону, параллельное соединение двух ЛС-систем можно заменить одной линейной стационарной системой, чья импульсная характеристика равна сумме характеристик компонент соединения (рисунок 2.2), т. е.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n).$$

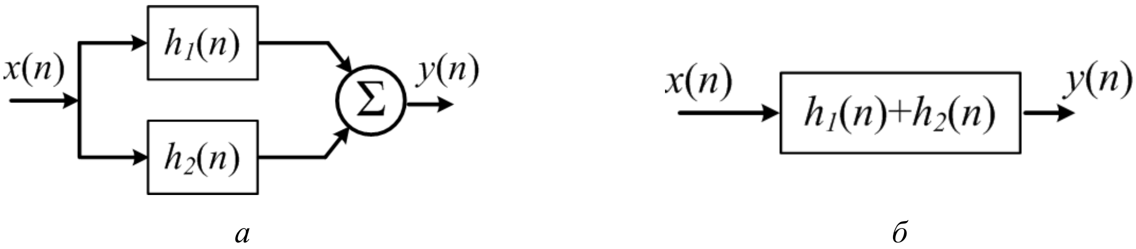


Рисунок 2.2 – Параллельное соединение линейных стационарных систем (*а*); система, эквивалентная системе *а* (*б*)

2.4.5 Устойчивость и детерминированность ЛС-систем

Устойчивость и детерминированность представляют собой вспомогательные свойства, и часто необходимо знать является ли конкретная система устойчивой и детерминированной. ЛС-система является *устойчивой* тогда, когда ее импульсная характеристика – абсолютно суммируемая последовательность, т. е. если

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

Для *детерминированной* ЛС-системы должно выполнятся условие:

$$h(n) = 0, \quad n < 0,$$

которое проистекает из выражения для свертки.

2.4.6 КИХ- и БИХ-системы

Система, чья импульсная характеристика имеет конечное число ненулевых отсчетов, называется *системой с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-системой). КИХ-системой, например, является система скользящего среднего ()

Система, чья импульсная характеристика не ограничена по длительности, называется *системой с бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-системой). Примером БИХ-системы является «сумматор» из примера 2.6.

Пример 2.6. Система «сумматор» описывается выражением

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Чему равна ее импульсная характеристика?

Решение. Для получения импульсной характеристики необходимо на вход системы подать единичный импульс $x(n) = \delta(n)$. В результате получаем:

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u(n).$$

2.5 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Свертка описывает выход ЛС-системы как линейную комбинацию входных значений $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Пусть $h(n) = u(n)a^n$, тогда

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)a^k u(k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)a^{n-k}. \quad (2.9)$$

Если предположить, что система детерминирована, то получим

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)a^{n-k}. \quad (2.10)$$

С вычислительной точки зрения уравнение (2.9) неэффективно. Поэтому иногда лучше выражать выход в терминах предыдущих отсчетов:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n). \quad (2.11)$$

Распишем несколько итераций для уравнения (2.11):

$y(0) = x(0)$

$y(1) = ay(0) + x(1) = ax(0) + x(1)$

$y(2) = ay(1) + x(2) = a^2x(0) + ax(1) + x(2)$

$$y(3) = ay(2) + x(3) = a^3x(0) + a^2x(1) + ax(2) + x(3)$$

…

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)a^{n-k}$$

Уравнение (2.11) – частный случай разностного уравнения с постоянными коэффициентами. В общем виде разностное уравнение *N*-го порядка имеет вид

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad (2.12)$$

где a_k и b_k – константы, которые определяют систему.

Чаще всего $a_0 = 1$ и тогда (2.12) принимает вид

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k). \qquad (2.13)$$

Если a_k ненулевые, то система называется рекурсивной (БИХ-система). Если ненулевыми являются только b_k, то система нерекурсивная (КИХ-система).

Начальными условиями для разностных уравнений являются значения $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$. Если они нулевые, то система находится в состоянии покоя.

Импульсная характеристика системы может быть найдена, если подать на вход системы дельта-импульс $\delta(n)$.

Пример 2.7. Найти разностное уравнение сумматора:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \qquad (2.14)$$

Решение. Чтобы найти разностное уравнение для сумматора, перепишем (2.14) в следующем виде:

$$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k].$$

Выделяя $x(n)$ из суммы в выражении (2.14), получаем

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x(n) + y(n-1).$$

Таким образом, мы показали, как сумматор может быть описан *линейным разностным уравнением*:

$$y(n) = x(n) + y(n-1). \qquad (2.15)$$

Разностное уравнение сумматора дает лучшее понимание возможного способа его реализации. Согласно этому уравнению при каждом значении n мы складываем отсчет выходной последовательности $x(n)$ с предыдущим отсчетом выхода сумматора $y(n-1)$. Данный процесс иллюстрируется блок-схемой на рисунке 2.3.

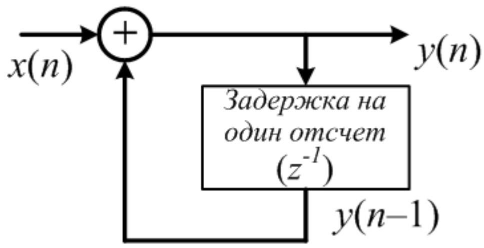


Рисунок 2.3 – Блок-схема рекуррентного разностного уравнения, представляющего сумматор

Уравнение (2.15) и блок-схему на рисунке 2.3 называют *рекуррентным представлением системы*, поскольку каждый отсчет реакции системы вычисляется с использованием найденных ранее отсчетов.

Рассмотрим систему скользящего среднего, при которой система становится детерминированной (т. е. $M_1 = 0$):

$$h(n) = \frac{1}{M_2 + 1}\big(u(n) - u(n - M_2 - 1)\big),$$

откуда

$$y(n) = \frac{1}{M_2 + 1}\sum_{k=0}^{M_2} x[n-k].$$

Импульсную характеристику можно переписать в виде

$$h(n) = \frac{1}{M_2 + 1}\big(\delta(n) - \delta(n - M_2 - 1)\big) * u(n),$$

что говорит от возможности представления детерминированной системы скользящего среднего в виде каскада систем.

Чтобы получить разностное уравнение для этой блок-схемы, заметим сначала, что

$$x_1(n) = \frac{1}{M_2 + 1}\big(x(n) - x(n - M_2 - 1)\big).$$

С другой стороны, выход сумматора удовлетворяет уравнению

$$y(n) = x_1(n) + y(n-1),$$

следовательно,

$$y(n) = \frac{1}{M_2 - 1}\big(x(n) - x(n - M_2 - 1)\big) + y(n-1).$$

Блок-схема данной системы скользящего среднего представлена на рисунке 2.4.

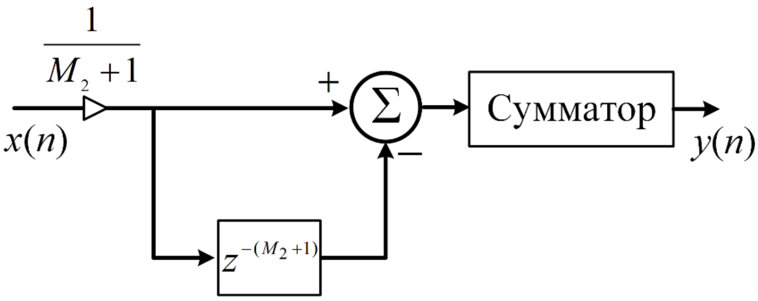


Рисунок 2.4 – Блок-схема системы скользящего среднего

2.6 Частотная характеристика дискретной системы

2.6.1 Понятие собственной функции

Синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что *комплексные экспоненты являются собственными функциями ЛС-систем*. Это означает, что реакция таких систем на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой определяется системой.

2.6.2 Эхо-система (пример)

Прежде, чем дать определение частотной характеристики ЛС-системы рассмотрим следующий пример. Представьте, что вы находитесь в большой пустой комнате (или пещере), в которой есть эхо. Если вы начнете петь или свистеть, то звук вернется к вам с некоторой задержкой τ. Вы заметите, что какие-то тоны резонируют, а какие-то поглощаются или ослабляются. Происходящий процесс можно описать следующим уравнением:

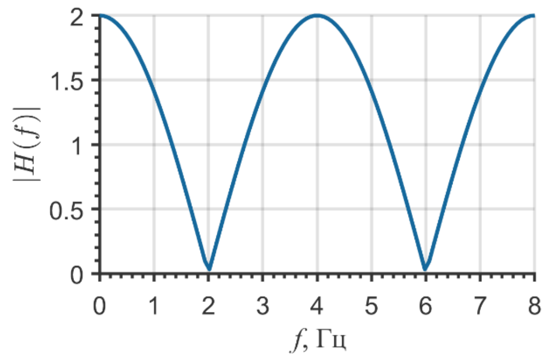
$$y(t) = x(t) + x(t - \tau). \qquad (2.16)$$

Следует заметить, что эхо-система (2.16) не пропускает все частоты (тоны) одинаково. Выход будет зависеть от частоты входного сигнала и временной задержки τ, которая соответствует различному сдвигу фазы для различных частот. Когда входной сигнал имеет частоту ω, такую, что τ в точности соответствует одному периоду (т. е. $\omega\tau = 2\pi$), то общий эффект работы системы состоит в удвоении амплитуды входного сигнала. Если входной сигнал имеет такую частоту, что τ соответствует половине периода ($\omega\tau = \pi$), то выходом системы будет нулевым. Это и есть причина того, что некоторые частоты «резонируют», а некоторые поглощаются.

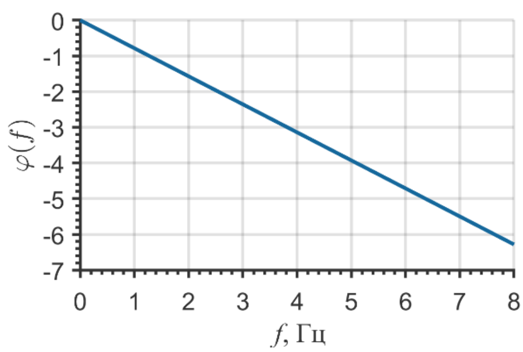
В общем случае мы можем найти частотную характеристику эхо-системы. Для этого предположим, что на вход подается синусоида $\sin \omega t$:

$$\sin \omega t + \sin\big(\omega(t - \tau)\big) = 2\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sin\left(\omega\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) = H(\omega)\sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big),$$

где $H(\omega) = 2\cos(\omega\tau/2)$ определяет амплитуду, а $\varphi(\omega) = -\omega\tau/2$ – начальную фазу выходного сигнала. Графики $H(\omega)$ $\varphi(\omega)$, иллюстрирующие работу эхо-системы, приведены рисунке 2.5 (на графиках вместо круговой частоты ω отображена линейная частота f).



а



б

Рисунок 2.5 – Зависимость амплитуды (*а*) и фазы (*б*) выходного сигнала эхо-системы ($\tau = 0{,}25$ с) от частоты входного синусоидального сигнала $\sin 2\pi f t$

Таким образом, можно сделать вывод, что в ответ на каждый синусоидальный сигнал с частотой ω будет получаться синусоидальный выход той же частоты, но с линейным фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$ и измененной амплитудой $H(\omega)$. Амплитуда будет максимальной для всех $\omega\tau = 2k\pi$ и будет равна нулю для $\omega\tau = \pi(2k+1)$. Частоты, которые подавляются системой, называются *нулями* системы.

2.6.3 Комплексная частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входной сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \qquad (2.17)$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с *импульсной характеристикой* $h(n)$, то на выходе появляется последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n) H\left(e^{j\omega}\right),$$

т. е.

$$y(n) = x(n) H\left(e^{j\omega}\right). \qquad (2.18)$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (2.17) выходной сигнал совпадает со входным с точностью до множителя $H\left(e^{j\omega}\right)$, который называется *комплексной частотной характеристикой* (КЧХ) системы или просто *частотной характеристикой* и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m}. \tag{2.19}$$

Частотная характеристика является периодической функцией ω, причем ее период равен 2π. Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой $\omega + 2m\pi$ $(m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ не отличается от входной последовательности с частотой ω, т. е.

$$\tilde{x}(n) = e^{j(\omega+2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π. Обычно для этой цели используют интервал $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

В общем случае $H(e^{j\omega})$ имеет комплексные значения, ее можно представить в алгебраической форме, но чаще всего используется показательный вид (или полярная система координат) в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{\arg H\left(e^{j\omega}\right)}.$$

Пример 2.8. Найти КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y(n) = x(n - n_d),$$

где n_d – фиксированное целое число.

Решение. Если $x(n) = e^{j\omega n}$ – сигнал, поданный на вход системы, то по формуле из условия получаем:

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Таким образом, видно, что при любом значении ω выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины задержки n_d. Следовательно, КЧХ ИСЭ равна

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega n_d}.$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h(n) = \delta(n - n_d)$ – импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (2.19), имеем:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_d) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера:

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d).$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d).$$

Ее модуль и фаза равны: $|H(e^{j\omega})| = 1$, $\arg H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$.

2.6.4 Синусоидальное представление ЛС-систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Согласно (2.18) реакцией системы на сигнал $x_1(n) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n},$$

а на сигнал $x_2(n) = \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 n}$ –

$$y_2(n) = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y(n) = \frac{A}{2}\left(H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}\right).$$

Если отчеты последовательности $h(n)$ вещественны, то $H(e^{-j\omega_0}) =$ $= H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y(n) = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta),$$

где $\theta = \arg H(e^{j\omega_0})$ – фаза КЧХ системы при частоте ω_0, или значение фазочастотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки имеем $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, (см. пример 2.9). Следовательно,

$$y(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) = A\cos(\omega_0(n - n_d) + \phi),$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ.

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π-периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, то достаточно определить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длиной 2π, например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi \leq \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi \leq \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называются частоты, близкие к нулю, а верхними – частоты, лежащие около $\pm\pi$. Учитывая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π, неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки чётным кратным π, в то время как верхние – к нечетным кратным π.

2.7 Задачи к разделу 2

1. Детерминирована ли система идеальной задержки из подраздела 2.1?

2. Детерминирована ли система скользящего среднего из подраздела 2.1?

3. Вычислите свертку для ЛС-системы с импульсной характеристикой $h(n) = 0{,}25\delta(n) + 0{,}75\delta(n-1) - 0{,}75\delta(n-2) - 0{,}25\delta(n-3)$ и входного сигнала $x(n) = u(n-1) - u(n-7)$.

4. Определите свойства следующих систем (запоминание, устойчивость, детерминированность, аддитивность, однородность, линейность, стационарность):

а) $y(n) = \lg x(n)$;

б) $y(n) = \mathrm{median}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$;

в) $y(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$, $n_0 > 0$.

5. Определите, какие из систем являются линейными. Ответ поясните. Вход системы обозначен как $x(n)$, а выход как $y(n)$.

а) $y(n) + 2y(n-1) = x^2(n)$; б) $y(n) + 3ny(n-1) = n^2x(n)$;

в) $y^2(n) + 2y(n-1) = x(n)$; г) $y(n) = y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}$;

д) $3y(n) + 2 = x(n)$; е) $y(n) + 2y(n-1) = x(n)x(n-1)$;

ж) $y(n) = x(2-n)$; з) $y(n) = \sum_{n=-\infty}^{n} x(n)$.

6. Определите импульсную характеристику следующих систем:

а) $y(n) = x(n-1)$; б) $y(n) = x(n+1)$;

в) $y(n) = n^2x(n-1)$; г) $y(n) = x(-n)$;

д) $y(n) = x(n/L)$, где $L \in \mathbb{Z}$; е) $y(n) = x(Mn)$, где $M \in \mathbb{Z}$;

ж) $y(n) = \sum_{k=-5}^{5} x(n-k)$; з) $y(n) = x(n)x(n-1)$.

7. Определите, какие из перечисленных ниже систем являются стационарными/нестационарными, линейными/нелинейными, детерминированными/недетерминированными, устойчивыми/неустойчивыми, статическими/динамическими, обратимыми/необратимыми:

а) $y(n) = x(n-1)$; б) $y(n) = x(n+1)$;

в) $y(n) = n^2x(n-1)$; г) $y(n) = nx(n-1)$;

д) $y(n) = nx^2(n)$; е) $y(n) = x^2(n)$;

ж) $y(n) = x(2-n)$; з) $y(n) = x(n/L)$, где $L \in \mathbb{Z}$;

и) $y(n) = x(Mn)$, где $M \in \mathbb{Z}$; к) $y(n) = \sum_{k=-5}^{5} x(n-k)$;

л) $y(n) = x(n)x(n-1)$.

8. Определите, являются ли данные системы линейными либо нелинейными, инвариантными во времени или неинвариантными, детерминированными или недетерминированными:

а) $y(n) = x(n) - x(n-1)$; б) $y(n) = x(n+1) - x(n)$.

9. Вычислите произведения полиномов двумя способами: 1) используя обычное правило умножения полиномов; 2) используя операцию свертки в *MATLAB*:

а) $y_1(x) = (2x^3 - 4x^2 + x)(5x^2 - 8)$;

б) $y_2(x) = (-5x^4 - 3x^3)(2x^3 + 6x^2)$;

в) $y_3(x) = (3x^4 + 2x^2)(-2x^4 - x)$;

г) $y_3(x) = (7x^2 + 6x + 2)(-5x^3 + 3x^2 + 1)$.