1 ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

1.1 Начальные понятия

Дискретный сигнал – это функция целочисленного аргумента n, например $x(n)$. Иногда вместо термина «дискретный сигнал» используют термин «последовательность». Дискретный сигнал не определен в нецелые моменты времени, поэтому графически его изображают в виде стеблевого графика (*stem plot*). Каждому отсчету сигнала соответствует вертикальная линия, оканчивающаяся кружком. Пример стеблевого графика показан на рисунке 1.1.

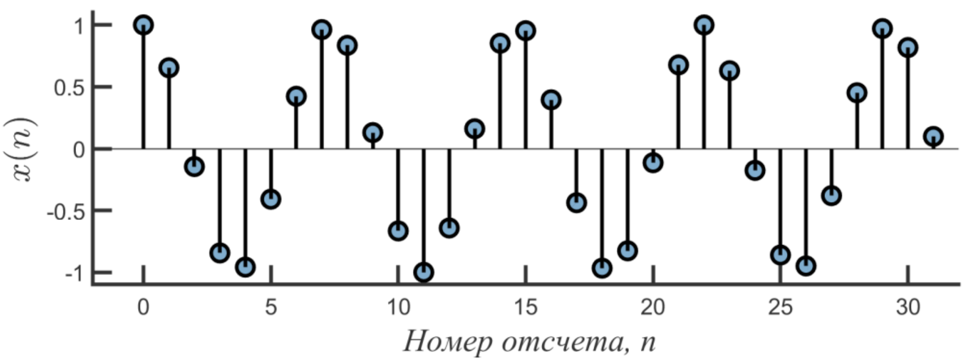

Рисунок 1.1 – Пример дискретного сигнала

В некоторых случаях на $x(n)$ смотрят как на вектор:

$$\boldsymbol{x} = [x(0)\ x(1) \ldots x(N-1)]^T. \quad (1.1)$$

Дискретные сигналы часто возникают при дискретизации аналоговых сигналов (реального мира). Например, $x_a(t)$, который дискредитируется с частотой (скоростью) $f_s = 1/T$ (шаг дискретизации T) отсчетов в секунду производит сигнал $x(n)$, который связан с $x_a(t)$ следующим образом:

$$x(n) = x_a(nT), \quad n = 0,1, \ldots , \quad (1.2)$$

где nT – *дискретное время*; n – *дискретное нормированное время*.

Однако есть достаточно случаев, когда сигнал $x(n)$ порожден процессами дискретными по времени. Например, цена на товар или количество покупателей в магазине в зависимости от времени суток.

1.2 Понятие частоты для дискретных сигналов

Обратимся к вопросу о представлении частоты дискретного сигнала. Рассматривая данный вопрос важно выяснить взаимосвязь таких понятий, как частота дискретизации и частота непрерывного и дискретного сигналов. Пусть имеется непрерывный (аналоговый) синусоидальный сигнал, который выражается как

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1.3}$$

где A – амплитуда; Ω – круговая частота синусоиды (рад/с); φ – начальная фаза (в радианах).

Для круговой частоты известно соотношение

$$\Omega = 2\pi F, \tag{1.4}$$

где F – частоты сигнала (Гц).

Подставляя (1.4) в (1.3) получаем

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1.5}$$

На рисунке 1.2 представлено синусоидальное колебание, описываемое выражением (1.5).

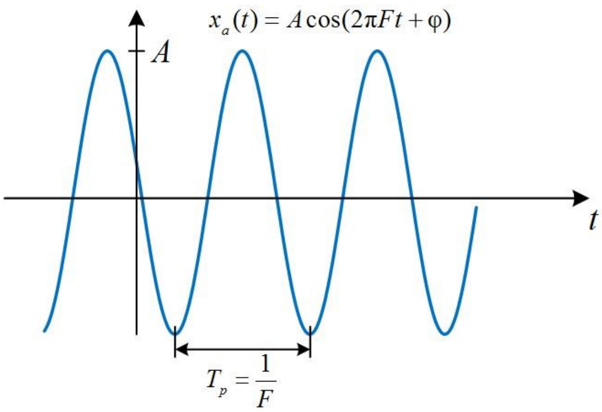

Рисунок 1.2 – Аналоговая синусоида с амплитудой A, частотой F (Гц) и фазой φ (радиан)

Синусоида (1.5) является периодическим сигналом с периодом T_0. Известно, что любой периодический сигнал удовлетворяет свойству

$$x_a(t) = x_a(t + T_0).$$

Это означает, что сигнал повторяется после каждого периода в T_0 секунд. Частота непрерывной синусоиды может быть неограниченно увеличена (до бесконечности) или уменьшена до нуля, т. е. частота F удовлетворяет условию $0 \leq F < \infty$.

Выполним дискретизацию непрерывной синусоиды (1.5) при помощи выражения (1.2):

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi FnT + \varphi) = A\cos\left(2\pi\frac{F}{f_s}n + \varphi\right). \tag{1.6}$$

Заметим, что получившаяся синусоида имеет вид

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad \omega = 2\pi\frac{F}{f_s}. \tag{1.7}$$

Частоту дискретного сигнала ω по аналогии с непрерывным сигналом (1.3) называют круговой частотой. Однако между Ω в (1.3) и ω в (1.7) имеется существенная разница. Аналоговая круговая частота Ω измеряется в радианах в секунду, а ω – в радианах на отсчет, причем величина n (в отличие от переменной времени t) является безразмерной (иногда говорят, что n измеряется в отсчетах).

Тот факт, что переменная n в формуле (1.7) принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $\omega + 2\pi$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n).$$

То есть для дискретного синусоидального сигнала частоты ω и $\omega + 2\pi$ неразличимы. По этой причине при рассмотрении дискретных синусоидальных последовательностей мы должны ограничиться интервалом частот величиной 2π. Обычно ограничиваются положительными частотами в интервале $\omega \in [0,\ 2\pi]$, либо выбирают симметричный интервал $\omega \in [-\pi,\ \pi]$.

Важным выводом данного подраздела является то, что существует разница между понятием частоты для непрерывного и дискретного сигнала. Круговая частота Ω непрерывного сигнала может находится в интервале от 0 до ∞, в то время как частота дискретного сигнала ω ограничена интервалом величиной 2π.

1.3 Периодические и апериодические последовательности

Сигналы дискретного времени всегда можно классифицировать, как *периодические* или *апериодические*. Дискретный сигнал считается периодическим, если

$$x(n) = x(n + N), \qquad \forall n, \tag{1.8}$$

где N – период (обязательно целый).

Это эквивалентно тому, что сигнал повторяет сам себя каждые N отсчетов. Если сигнал имеет период N, то его также можно считать периодическим с периодом $2N$, с периодом $3N$ и любым другим периодом kN, где k – целое число. *Основным периодом* (*fundamental period*) называется наименьшее значение N_0, удовлетворяющее условию (1.8).

Пример 1.1. Определить являются ли периодическими сигналы

а) $x_1(n) = \cos(n^2)$; б) $x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$.

Решение:

а) сигнал $x_1(n)$ является апериодическим, поскольку условие (1.8) для него удовлетворяется только в при $N = 0$;

б) сигнал $x_2(n)$ является периодическим. Значение $N = 16$ является минимальным, при котором для $x_2(n)$ выполняется условие (1.8).

Основной частотой (*fundamental frequency*) дискретного периодического сигнала называют величину

$$f_0 = \frac{1}{N_0} \text{ или } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}. \tag{1.9}$$

В выражении (1.9) единицей измерения f_0 являются *периоды на отсчет*, а единицей измерения ω_0 – *радианы на отсчет*.

Если $x_1(n)$ является периодической последовательностью с периодом N_1, а $x_2(n)$ – другой периодической последовательностью с периодом N_2, то их сумма

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \tag{1.10}$$

будет также периодической последовательностью с периодом

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{НОД}(N_1, N_2)}, \tag{1.11}$$

где $\text{НОД}(N_1, N_2)$ – наибольший общий делитель N_1 и N_2.

Аналогичное выражение справедливо и для произведения двух последовательностей:

$$x(n) = x_1(n) x_2(n). \tag{1.12}$$

В данном случае последовательность будет иметь период N, определяемый выражением (1.11). Однако, *основной период* $x(n)$ может быть меньше.

1.4 Базовые сигналы ЦОС

В данном подразделе приводятся наиболее важные базовые сигналы ЦОС, которые используются для описания сложных сигналов реального мира.

1.4.1 Единичный скачок

Важным базовым сигналом ЦОС является ***единичный скачок*** (рисунок 1.3), который описывается как

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

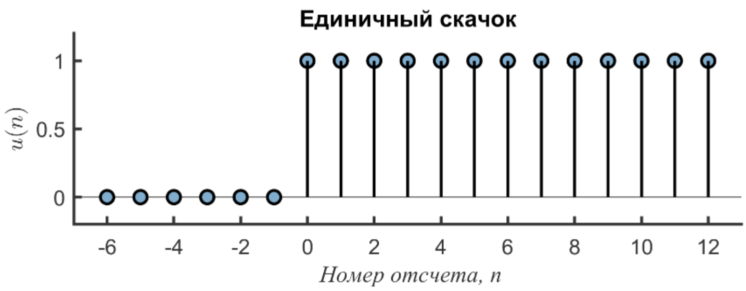

Рисунок 1.3 – График единичного скачка $u(n)$

Если необходимо, чтобы сигнал начинался в момент времени $n = 0$ (то есть, чтобы он имел нулевые значение для всех $n < 0$), то достаточно умножить его на единичный скачок $u(n)$.

Комбинация единичного скачка и его сдвинутой версии позволяют выделить определенный временной интервал. Так, например, сигнал

$$u(n) - u(n-10)$$

равняется единице в интервале $0 \leq n \leq 9$ и нулю во всех остальных случаях (рисунок 1.4).

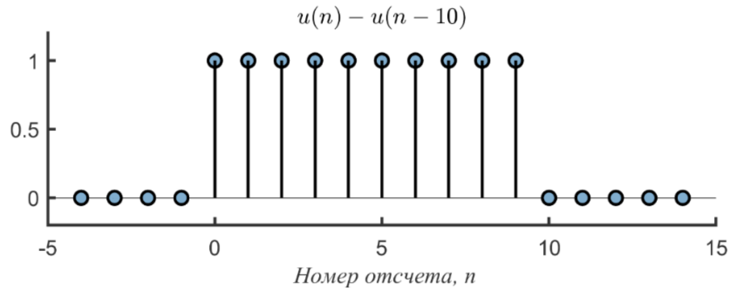

Рисунок 1.4 – Комбинация $u(n) - u(n-10)$

1.4.2 Единичный импульс (дельта-функция)

Единичный импульс (рисунок 1.5), обозначается как

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \qquad (1.13)$$

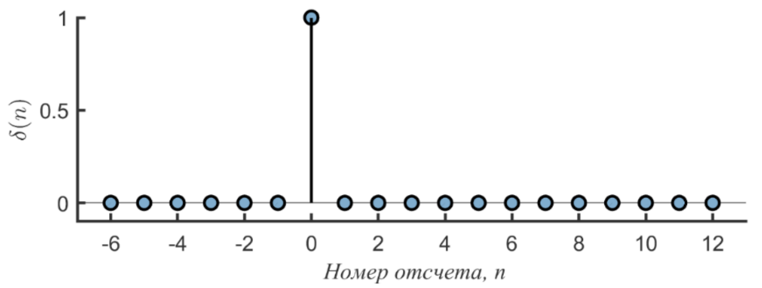

Рисунок 1.5 – Единичный импульс

Единичный импульс играет ту же роль, что и дельта-функция Дирака для представления непрерывных сигналов. Напомним, что по определению дельта-функция должна обладать двумя свойствами:

– $\delta(t)$ равна нулю повсюду за исключением точки $t = 0$;

– интеграл дельта-функции равен единице $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Очевидно, что такой функции не существует, однако это настолько полезная абстракция, что она принимается без дополнительных пояснений.

Подобно дельта-функции Дирака единичный импульс обладает несколькими важными свойствами:

1. *Умножение на единичный импульс*: если дискретный сигнал $x(n)$ умножить на сдвинутый единичный импульс, то сохранится только то значение сигнала, которое совпадает с позицией данного импульса:

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m). \tag{1.14}$$

2. *Свойство просеивания*: следствием (1.14) является то, что *любой дискретный сигнал может быть выражен в виде линейной комбинации сдвинутых единичных импульсов*:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k), \tag{1.15}$$

где каждый член суммы $x(k)\delta(n-k)$ является сигналом, который имеет амплитуду $x(k)$ в момент времени $n = k$ и нулевое значение во все прочие моменты времени.

3. *Взаимосвязь между* $\delta(\mathrm{n})$ *и* $\mathrm{u}(\mathrm{n})$: единичный скачек можно выразить через единичный импульс следующим образом:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k), \tag{1.16}$$

Похожим образом, единичный импульс можно выразить, как разницу между двумя единичными скачками:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1). \tag{1.17}$$

Пример 1.2. Изобразить график дискретного сигнала

$$p(n) = 2\delta(n+3) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-4).$$

Решение

Дискретный сигнал $p(n)$ состоит из четырех сдвинутых по времени единичных импульсов с различными амплитудами. Результирующий график приведен на рисунке 1.6.

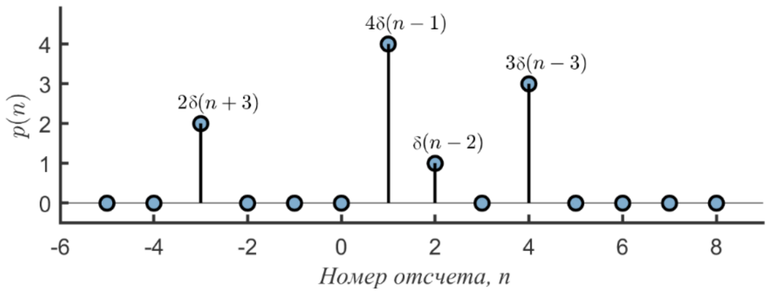

Рисунок 1.6 – График дискретного сигнала

Пример 1.3. Представить сигнал, показанный на рисунке 1.7 в виде комбинации единичных скачков и единичных импульсов.

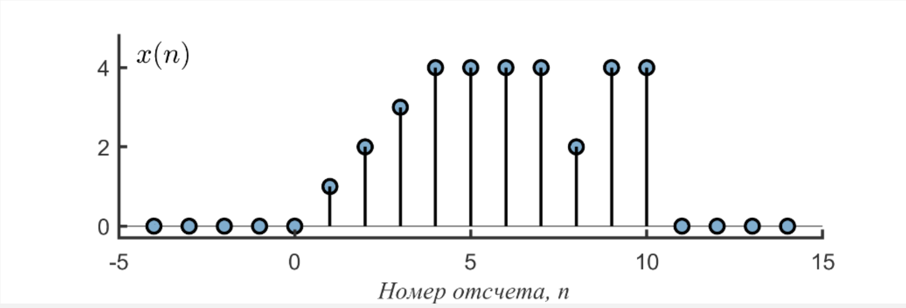

Рисунок 1.7 – Представление сигнала через единичные скачки и импульсы

Решение

Существует много способов представить сигнал $x(n)$, каждый из которых будет давать свое выражение. Рассмотрим один из возможных вариантов записи сигнала $x(n)$.

Данный сигнал можно разбить на три компоненты: 1) линейно нарастающая компонента $x_1(n)$, $n \in [0, 4]$; 2) ступенчатая компонента $x_2(n)$, $n \in [5, 10]$; 3) импульсная компонента $x_3(n)$, представляющая собой импульс с отрицательной амплитудой при $n = 8$. Рассмотрим каждую компоненту в отдельности.

Положим $x_1(n) = n(u(n) - u(n-5))$, чтобы описать сигнал на интервале $n \in [0, 4]$. Предположим, что всплеска на 8-м отсчете нет, тогда для описания сигнала на интервале $n \in [5,\ 10]$ подойдет выражение

$$x_2(n) = 4\big(u(n-5) - u(n-10)\big).$$

Описать импульсный сигнал с амплитудой -2 при $n = 8$ можно при помощи выражения $x_3(n) = -2\delta(n-8)$. Складывая все выражения вместе получаем ответ:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) =$$
$$= n\big(u(n) - u(n-5)\big) + 4\big(u(n-5) - u(n-11)\big) - 2\delta(n-8).$$

Обратим внимание, что полученное выражение справедливо для любых значений n.

1.4.3 Убывающая экспонента

Рассмотрим вещественную последовательность:

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1.$$

Поскольку значение a ограничено, то сигнал $x(n)$ всегда представляет собой убывающую экспоненту. Наличие в правой части выражения единичного скачка обеспечивает то, что ненулевые значения $x(n)$ могут иметь место только при $n \geq 0$. На рисунке 1.8 приведен пример убывающей экспоненты.

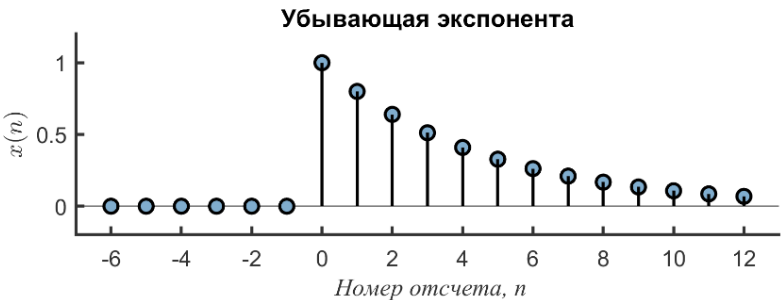

Рисунок 1.8 – Убывающая экспонента (a = 0,8)

Экспоненциальные последовательности хорошо себя ведут для значений параметра a, которые по модулю меньше единицы. В противном случае ($|a| > 1$) они имеют нестабильное поведение (их энергия и мощность бесконечно растут).

1.4.4 Синусоидальная последовательность

Синусоидальная последовательность описывается выражением:

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos(\omega n + \varphi), \tag{1.18}$$

где A – амплитуда; f – частота; ω – круговая частота; φ – начальная фаза.

Непрерывная синусоида $\cos(2\pi Ft + \varphi)$ всегда является периодическим сигналом независимо от того какое значение имеет ее частота F. Также основной период всегда является величиной обратной частоте, т. е. $T_0 = \frac{1}{F}$. Можно также сказать, что основная частота синусоиды F_0 всегда равна частоте F синусоиды (см. выражение (1.5)).

Синусоида дискретного времени (1.18) является периодической, только если ее частота f является рациональным числом. Это свойство является прямым следствием того, что величина периода N в выражении (1.8) должна быть целым числом.

Опустим для простоты в выражении (1.18) начальную фазу φ и применим к нему условие (1.8). Дискретная синусоида является N_0-периодической, если

$$\cos(2\pi fn) = \cos\big(2\pi f(n + N_0)\big) = \cos(2\pi fn + 2\pi fN_0).$$

Данный результат возможен, только если fN_0 является целым числом. Это целое число, которое можно обозначить через m, должно быть наименьшим из возможных, поскольку N_0 является основным периодом. Таким образом, синусоида дискретного времени является периодической, если

$$f = \frac{m}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi\frac{m}{N_0}. \tag{1.19}$$

Выражение (1.19) говорит, что дискретная синусоида является периодической, только если f – рациональное число. Более того, выражение (1.19) показывает, что за исключением случая, когда $m = 1$, частота дискретной синусоиды $f = m/N_0$ не равна частоте соответствующей непрерывной синусоиды $F = 1/N_0$. Основной период дискретной синусоиды легко определить, если записать f в сокращенной форме, как в выражении (1.19), где числитель и знаменатель являются взаимно простыми числами. Следующий пример поясняет изложенный материал.

Пример 1.4. Построить графики дискретной синусоиды $\cos(2\pi f n)$ для случаев: а) $f = 3/15$; б) $f = \frac{1}{1{,}7\pi}$; в) $f = \frac{1}{5{,}5}$. Для каждого случая определить является ли сигнал периодическим. В случае, если это верно, определить основной период N_0 и определить является ли основная частота сигнала равной частоте синусоиды f.

Решение

Используя *MATLAB* можно построить графики трех дискретных синусоид, выполнив следующий код:

```
n=-12:12; subplot(311); stem(n, cos(2*pi*3/15*n));
subplot(312); stem(n, cos(2*pi*1/(1.7*pi)*n));
subplot(313); stem(n, cos(2*pi*1/5.5*n));
```

На рисунке 1.9 показаны непрерывные синусоиды $\cos(2\pi f t)$, которые в случае дискретизации с временным шагом $T = 1$ становятся дискретными синусоидами $\cos(2\pi f n)$.

а) Очевидно, что в первом случае частота $f = \frac{3}{15}$ имеет рациональное значение и, следовательно, дискретная синусоида является периодическим сигналом. Однако, $3/15$ можно сократить, получив $f = \frac{1}{5} = \frac{m}{N_0}$. Таким образом, легко найти, что основной период $N_0 = 5$. В рассмотренном случае основная частота равна $f_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{5}$ и совпадает с частотой синусоиды $f = \frac{1}{5}$. Можно заметить, что N_0 отсчетов дискретной синусоиды содержат ровно один период непрерывной синусоиды $\cos 2\pi f t$, лежащей в ее основе.

б) Поскольку иррациональное число π находится в знаменателе дроби, частота $f = \frac{1}{1{,}7\pi}$ не является рациональным числом. Следовательно, дискретная синусоида $\cos(2\pi \frac{1}{1{,}7\pi} n)$ не является периодическим сигналом. Хотя последовательность $\cos(2\pi \frac{1}{1{,}7\pi} n)$ содержит полную информацию о непрерывной синусоиде, лежащей в ее основе, дискретная синусоида никогда не повторяется. Заметим, что

$\cos(2\pi\frac{1}{1,7\pi}n)$ содержит в среднем $1,7\pi$ отсчетов на период и, следовательно, невозможно найти такого периода N_0, который бы содержал целое число периодов непрерывной синусоиды $\cos(2\pi f t)$.

в) В данном случае частота равна $f = \frac{1}{5,5}$. Умножая числитель и знаменатель на два, получаем рациональное значение $f = 2/11$. Следовательно, данная дискретная синусоида является периодическим сигналом. Поскольку 2 и 11 являются взаимно простыми числами, то согласно (1.19) получаем $m = 2$ и $N_0 = 11$. Поскольку $m \neq 1$, то основная частота $f_0 = 1/N_0 = 1/11$ не равна частоте синусоиды $f = 1/5,5$. Это просто отражение того факта, что дискретная синусоида повторяется только после $m = 2$ периодов непрерывной синусоиды $\cos(2\pi f t)$, которая лежит в ее основе. Данный случай подтверждает общее положение, что частота периодической дискретной синусоиды всегда является кратной основной частоте непрерывной синусоиды, лежащей в ее основании, то есть $f = m f_0$.

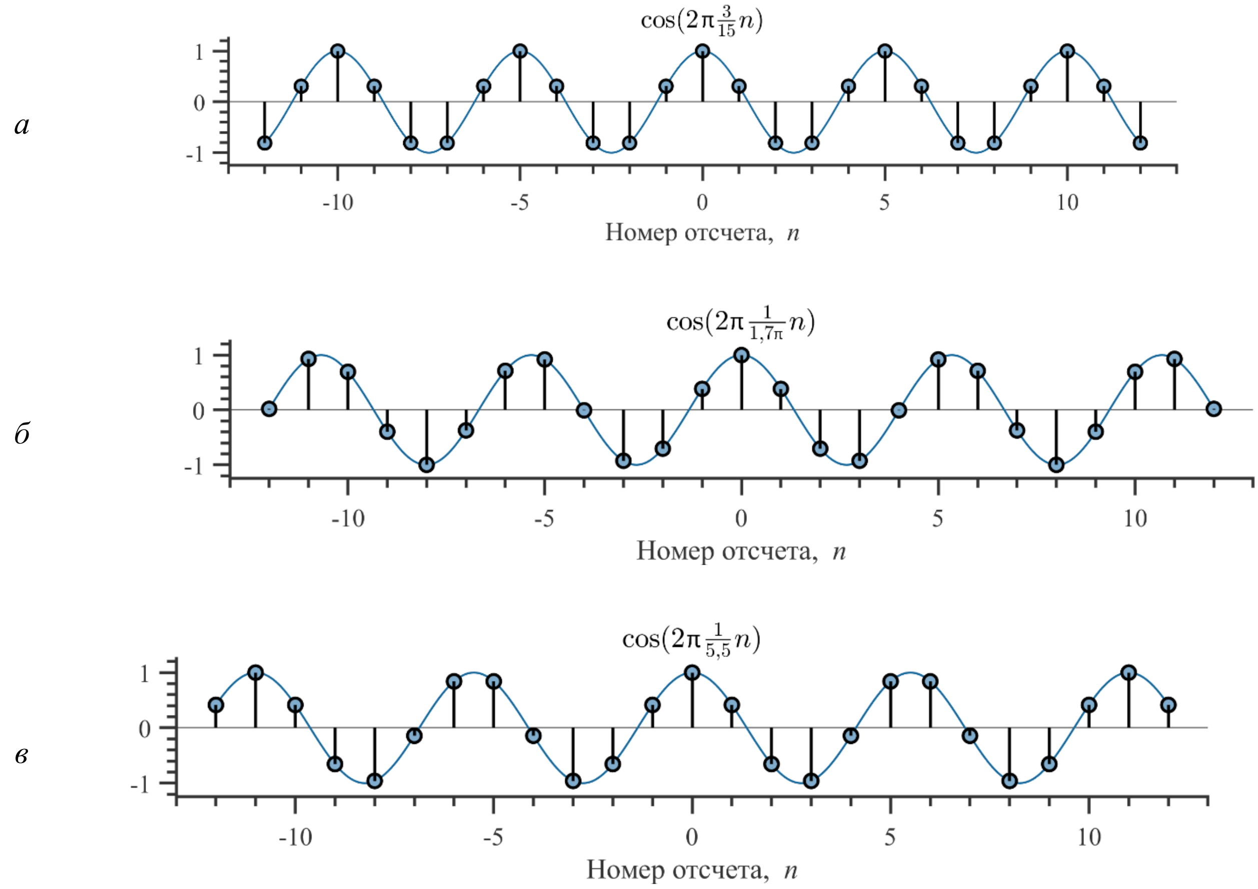

Рисунок 1.9 – Дискретные синусоиды из примера 1.4

1.4.5 Комплексная экспонента

Дискретная *комплексная экспонента* определяется выражением

$$x(n) = z^n,$$

где $z \in \mathbb{C}$. Если положить, что

$$|z| = r, \qquad \arg z = \omega,$$

то комплексную экспоненту можно представить в следующем виде:

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

Для получения последнего выражения использовалась формула Эйлера.

Частными случаями дискретной комплексной экспоненты z^n являются следующие четыре функции:

1) Константная функция при $z = 1e^{j0}$:

$$x(n) = k1^n = k;$$

2) Вещественная экспонента при $z = re^{j0}$:

$$x(n) = r^n;$$

3) Синусоида при $z = 1e^{j\omega}$:

$$x(n) = \mathrm{Re}\{z^n\} = \mathrm{Re}\left\{1^n e^{j\omega n}\right\} = \cos\omega n,$$

$$x(n) = \mathrm{Im}\{z^n\} = \mathrm{Im}\left\{1^n e^{j\omega n}\right\} = \sin\omega n\,;$$

4) Затухающая/возрастающая синусоида при $z = re^{j\omega}$:

$$x(n) = \mathrm{Re}\{z^n\} = \mathrm{Re}\left\{r^n e^{j\omega n}\right\} = r^n\cos\omega n,$$

$$x(n) = \mathrm{Im}\{z^n\} = \mathrm{Im}\left\{r^n e^{j\omega n}\right\} = r^n\sin\omega n.$$

Еще раз отметим, что переменная n в наших формулах принимает только целые значения, что подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных комплексных экспонент. Эта разница особенно заметна, если рассмотреть дискретную комплексную экспоненту, у которой $r = 1$, а частота равна $\omega + 2\pi$:

$$x(n) = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega n}.$$

Аналогичные рассуждения применялись и для дискретных синусоид. Так, что при рассмотрении дискретных экспонент мы должны ограничиться частотами в интервале 2π.

1.5 Операции над сигналами

1.5.1 Временной сдвиг

Сдвинутая на целое число отсчетов k последовательность $x(n)$ формируется как

$$y(n) = x(n-k).$$

Если k положительное, то сигнал $y(n)$ сдвигается вправо относительно $x(n)$, то есть $y(n)$ является *задержанной* версией $x(n)$. Если k отрицательное, то сигнал $y(n)$ сдвигается влево относительно $x(n)$, то есть $y(n)$ является *опережающей* версией $x(n)$. На рисунке 1.10 приведены примеры временного сдвига дискретного сигнала.

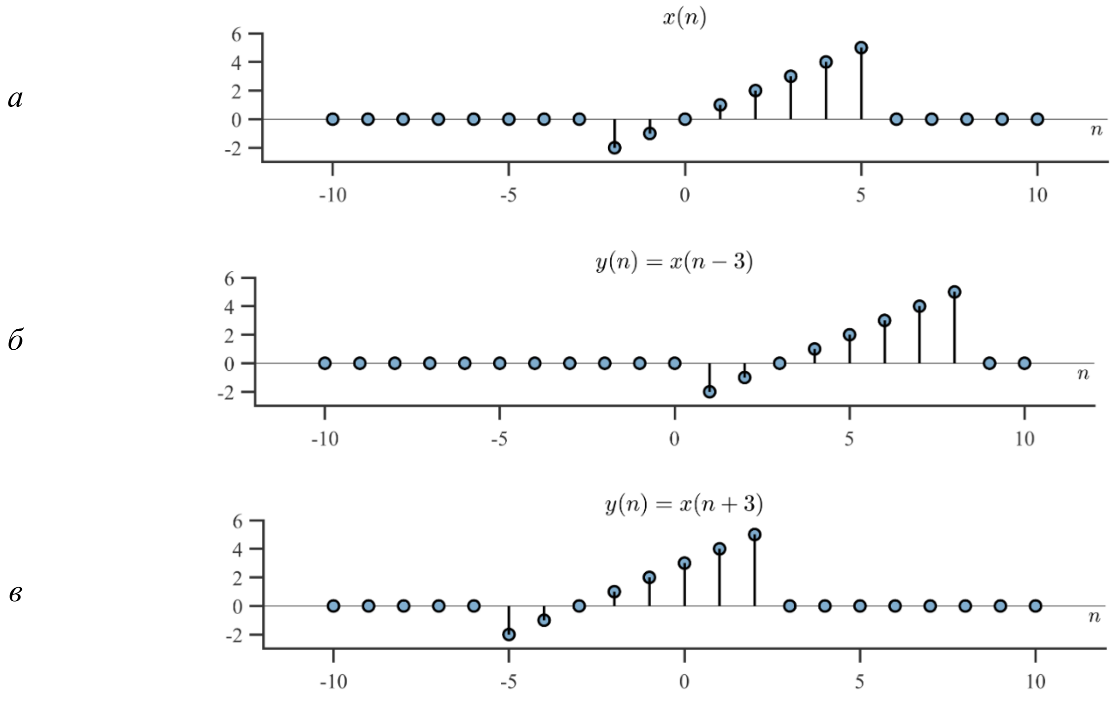

Рисунок 1.10 – Дискретные сигналы $x(n)$: *а* – исходный вид; *б* – задержанная версия на три отсчета; *в* – опережающая версия на три отсчета

При изучении и описании дискретных систем важным понятием является понятие *единичного оператора задержки* D. Действие данного оператора описывается следующим выражением:

$$D\{x(n)\} = x(n-1).$$

Повторное применение оператора задержки обозначается как $D(D) = D^2$ и приводит к следующему действию:

$$D^2\{x(n)\} = x(n-2).$$

При обозначении операции временного сдвига на блок-схеме дискретной системы используют один из двух способов, показанных на рисунке 1.11.

Рисунок 1.11 – Варианты обозначения операции временного сдвига

1.5.2 Масштабирование

Операция масштабирования заключается в умножении сигнала на константу $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$y(n) = \alpha x(n).$$

Если α представляет собой действительное число, то масштабирование является обычным усилением (при $|\alpha| > 1$) или ослаблением (при $|\alpha| < 1$). На рисунке 1.12 приведено условное графическое обозначение операции масштабирования, используемое при описании блок-схем дискретных систем.

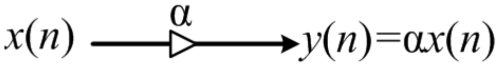

Рисунок 1.12 – Обозначение на блок-схеме операции масштабирования

1.5.3 Суммирование и произведение

Сумма двух последовательностей $x(n)$ и $w(n)$ определяется путем поэлементной операции суммирования:

$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Аналогично определяется произведение двух последовательностей:

$$y(n) = x(n)w(n).$$

Обозначение операций суммирования и умножения, используемое при описании блок-схем дискретных систем, приведено на рисунке 1.13.

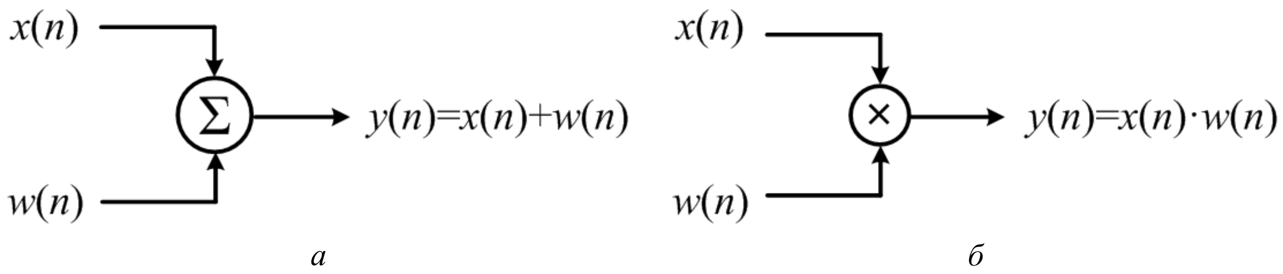

Рисунок 1.13 – Обозначение на блок схеме операций сложения (*а*) и масштабирования (*б*)

1.6 Симметричные последовательности

Дискретные сигналы часто обладают какой-либо формой симметрии, которую можно использовать при решении задач. Интерес представляют следующие два вида симметрии.

1) Действительный сигнал называется *четным*, если для всех n справедливо тожество

$$x(n) = x(-n);$$

2) Действительный сигнал называется *нечетным*, если

$$x(n) = -x(-n), \qquad \forall n.$$

Произвольный сигнал $x(n)$ может быть представлен в виде суммы его четной $x_e(n)$ и нечетной $x_o(n)$ части:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n), \qquad \forall n.$$

Чтобы найти четную часть вычисляется сумма:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) + x(-n)\big).$$

Нечетная часть находится в виде разности:

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) - x(-n)\big).$$

Для комплекснозначных последовательностей определение симметричности немного отличается.

Комплекснозначный сигнал называется *сопряженно симметричным*, если

$$x(n) = x^*(-n), \qquad \forall n,$$

где знак «*» означает операцию комплексного сопряжения.

Комплекснозначный сигнал называется *сопряженно антисимметричным*, если

$$x(n) = -x^*(-n), \qquad \forall n.$$

Комплекснозначный сигнал $x(n)$ всегда можно представить в виде суммы сопряженно симметричного $x_{\text{cs}}(n)$ и сопряженно антисимметричного сигналов $x_{\text{ca}}(n)$:

$$x(n) = x_{\text{cs}}(n) + x_{\text{ca}}(n),$$

где $x_{\text{cs}}(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n))$, $x_{\text{ca}}(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) - x^*(-n)\big)$.

1.7 Энергия и мощность дискретных сигналов

Важными характеристиками дискретных сигналов являются их энергия E_x и мощность P_x. Энергия дискретного сигнала определяется как

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n). \qquad (1.20)$$

Данное определение справедливо как для действительных, так и для комплексных сигналов $x(n)$. Чтобы данное определение имело смысл, энергия сигнала должна иметь конечное значение. Для этого амплитуда сигнала должна стремиться к нулю при $|n| \to \infty$ (необходимое условие). В противном случае числовой ряд (1.20) не будет сходиться. Сигналы, которые имею конечную энергию, называются *энергетическими сигналами*.

В некоторых случаях амплитуда сигнала $x(n)$ не стремится к нулю при $|n| \to \infty$ и энергия сигнала является бесконечной. В таких случаях более разумным является измерение мощности сигнала P_x, которая определяется как усредненное значение энергии:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2. \qquad (1.21)$$

В данном уравнении сумма делится на $2N + 1$ поскольку в интервал от $-N$ до N попадают $2N + 1$ отсчетов $x(n)$. Для N_0-периодических сигналов усреднение выполняется только на одном периоде:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2. \qquad (1.22)$$

Сигнал, для которого P_x имеет конечное ненулевое значение, называют *мощностным*.

Пример 1.5. На рисунке 1.14 показан дискретный сигнал $x(n)$, а также два периодических сигнала, полученных из $x(n)$ периодическим расширением:

$$x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+6k) \quad \text{и} \quad x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+7k).$$

Определить энергию и мощность каждого из трех сигналов.

Решение

Поскольку $x(n) = n$ при $0 \le 0 \le 5$ и нулю при всех других n, то его энергия может быть найдена, используя выражение (1.20):

$$E_x = \sum_{n=0}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Сигнал $x_1(n)$ является периодическим повторением $x(n)$ с периодом 6. Все периодические сигналы имеют бесконечную энергию, то есть $E_{x_1} = \infty$. Мощность $x_1(n)$ можно найти при помощи выражения (1.22):

$$P_{x_1} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{1}{6}E_x = \frac{55}{6} \approx 9{,}1667.$$

Сигнал $x_2(n)$ является периодическим повторением $x(n)$, но только с периодом 7. Его энергия также равна бесконечности. Мощность $x_2(n)$ можно вычислить по формуле (1.22):

$$P_{x_2} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{1}{7}E_x = \frac{55}{7} \approx 7{,}8571.$$

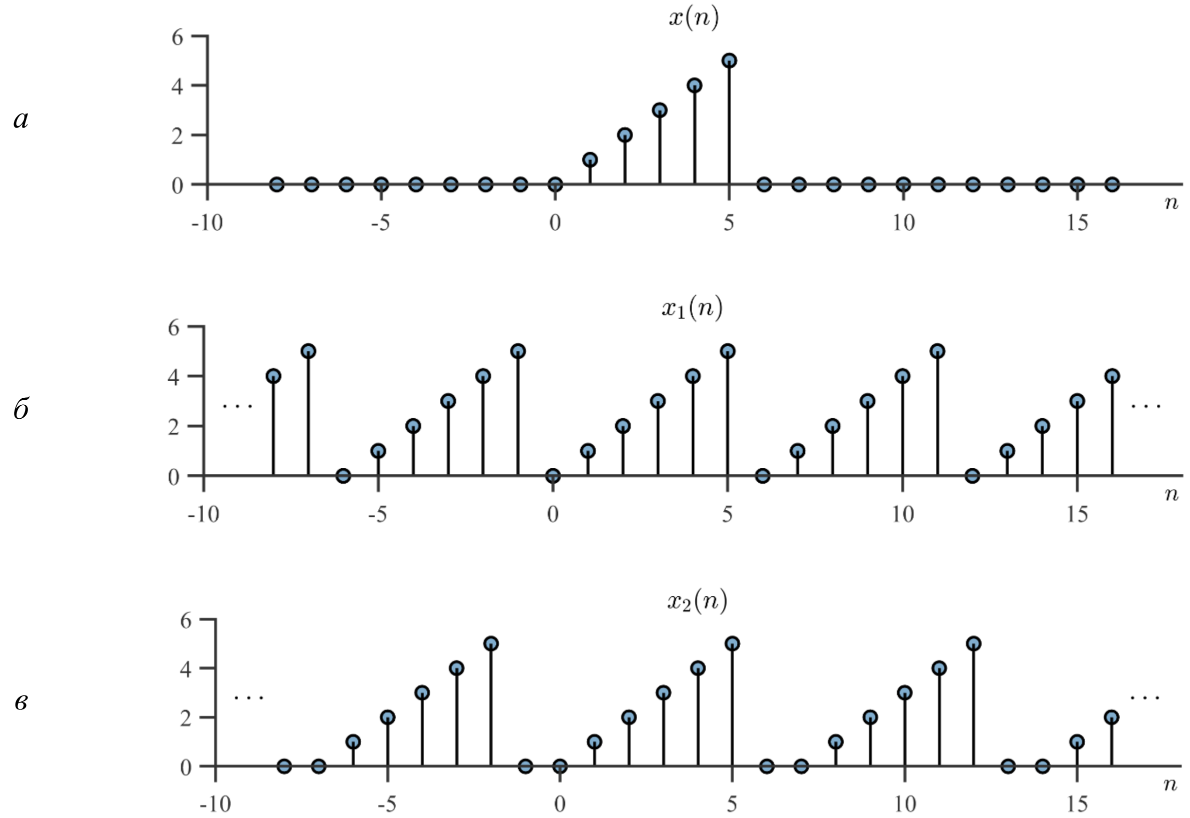

Рисунок 1.14 – Дискретные сигналы из примера 1.5

Два дискретных сигнала *ортогональны*, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = 0.$$

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны, то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) + y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2.$$

1.8 Классификация сигналов

В данном разделе рассмотрим классификацию дискретных сигналов бесконечной длины и их взаимосвязь с дискретными сигналами конечной длинны.

1.8.1 Апериодические сигналы

Наиболее общим типом дискретных сигналов является произвольная комплексная последовательность бесконечной длины. Хотя такой сигнал невозможно полностью ни сохранить, ни обработать концепция сигнала с бесконечной длительностью является весьма важным предельным обобщением.

1.8.2 Периодические сигналы

В подразделе 1.3 уже приводилось определение периодического сигнала с периодом N. Ниже дается альтернативное определение периодического сигнала:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.23}$$

Знак тильды в обозначении $\tilde{x}(n)$ используется для того, чтобы подчеркнуть периодический характер сигнала. Ясно, что периодический сигнал полностью определен, когда известны все N значений, составляющих его период. Таким образом, периодический сигнал несет в себе не больше информации, чем сигнал конечной длительности длины N.

1.8.3 Периодически продолженные сигналы

Периодические сигналы бесконечны по длительности, однако информация, которую они несут находится в ограниченном числе отсчетов. В этом смысле, периодический сигнал играет связующую роль между сигналами с конечной и бесконечной длиной. Используя конечный сигнал $x(n)$, $n = 0,1,\dots,N$, можно получить его периодическую версию следующим образом:

$$\tilde{x}(n) = x(n \mod N), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.24}$$

Сигнал $\tilde{x}(n)$ из выражения (1.24) называется периодическим продолжением сигнала конечной длины $x(n)$. Данный тип расширения сигнала естественным образом возникает в различных контекстах. Особенно важным примером подобной периодичности является частотное представление дискретных сигналов. Нужно отметить, что энергия периодически продолженного сигнала становится бесконечной, в то время как мощность является просто энергией исходного сигнала с конечной длительностью, умноженной на $1/N$.

1.8.4 Сигналы с компактным носителем

Говорят, что дискретный сигнал $\bar{x}(n)$ с бесконечной длительностью имеет компактный носитель (*finite support*), если его значения равны нулю за пределами некоторого фиксированного интервала длины N. Другими словами, существуют такие $N, M \in \mathbb{Z}$, что

$$\bar{x}(n) = 0, \qquad \text{для } n < M \text{ и } n > M + N - 1. \tag{1.25}$$

Заметим, что поскольку $\bar{x}(n)$ имеет бесконечную длительность, то для полной спецификации всего сигнала требуется знание величины M и значений N

ненулевых отсчетов. Таким образом, возникает альтернативный подход к встраиванию сигнала конечной длины $x(n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$, в сигнал бесконечной длительности:

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n < N, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.26}$$

В выражении (1.26) выбрано значение $M = 0$ (хотя можно использовать любое другое значение). Заметим, что в данном случае, в отличие от периодического продолжения $x(n)$, была добавлена произвольная информация в виде нулевых значений за пределами конечного интервала.

Таблица 1.1 – Основные типы дискретных сигналов

Тип сигнала	**Обозначение**	**Энергия**	**Мощность**
Сигнал конечной длины	$x(n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n)\rvert^2$	Не определена
Апериодический сигнал	$x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$	Формула (1.20)	Формула (1.21)
Периодический сигнал	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+kN)$	∞	Формула (1.22)
Сигнал с компактным носителем	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) \neq 0$ для $M \le n \le M+N-1$	$\sum_{n=M}^{M+N-1} \lvert x(n)\rvert^2$	0

В таблице 1.1 суммируются базовые понятия о типах дискретных сигналов.

1.9 Задачи к разделу 1

1. Для сигнала $x(n)$, показанного на рисунке 1.7, изобразите графики следующий сигналов:

а) $x(-n)$; б) $x(n+6)$;

в) $x(n-6)$; г) $x(3-n)$;

д) $x(3n)$; е) $x(1-2n)$.

2. Изобразите графики следующих дискретных сигналов:

а) $x_1(n) = 2\delta(n+3) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$;

б) $x_2(n) = u(n-2) - u(n-6)$;

в) $x_3(n) = n(u(n) - u(n-7))$;

г) $x_4(n) = (8-n)(u(n-6) - u(n-9))$.

3. Определите являются ли следующие сигналы периодическими. При положительном ответе, определите период сигнала:

а) $\cos(0{,}5\pi n + 0{,}2)$;

б) $\sin\left(0{,}5n + \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\cos(\sqrt{2}\pi n + 1{,}2)$;

г) $e^{j\frac{22}{7}n}$;

д) $e^{-\left(1+j\frac{\pi}{3}\right)n}$;

е) $-6e^{j\frac{\pi}{7}n}$.

4. Докажите следующие равенства:

а) $\delta(n) + \delta(n-1) = u(n) - u(n-2)$;

б) $2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)u(n) = -0.5(2)^n \sin(\frac{5\pi n}{3})(u(n) - \delta(n))$;

в) $2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)u(n) = -0.5(-2)^n \sin(\frac{2\pi n}{3})u(n-1)$;

г) $n(n-1)\gamma^n u(n) = n(n-1)\gamma^n u(n-2)$;

д) $\left(u(n) + (-1)^n u(n)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$;

е) $\left(u(n) + (-1)^{n+1} u(n)\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$.

5. Для каждого из сигналов, показанных на рисунке 1.15 найдите аналитическое выражение, которое было бы верным для всех n. Используя только линейно нарастающую функцию и единичный скачок, приведите как минимум два выражения для описания каждого сигнала.

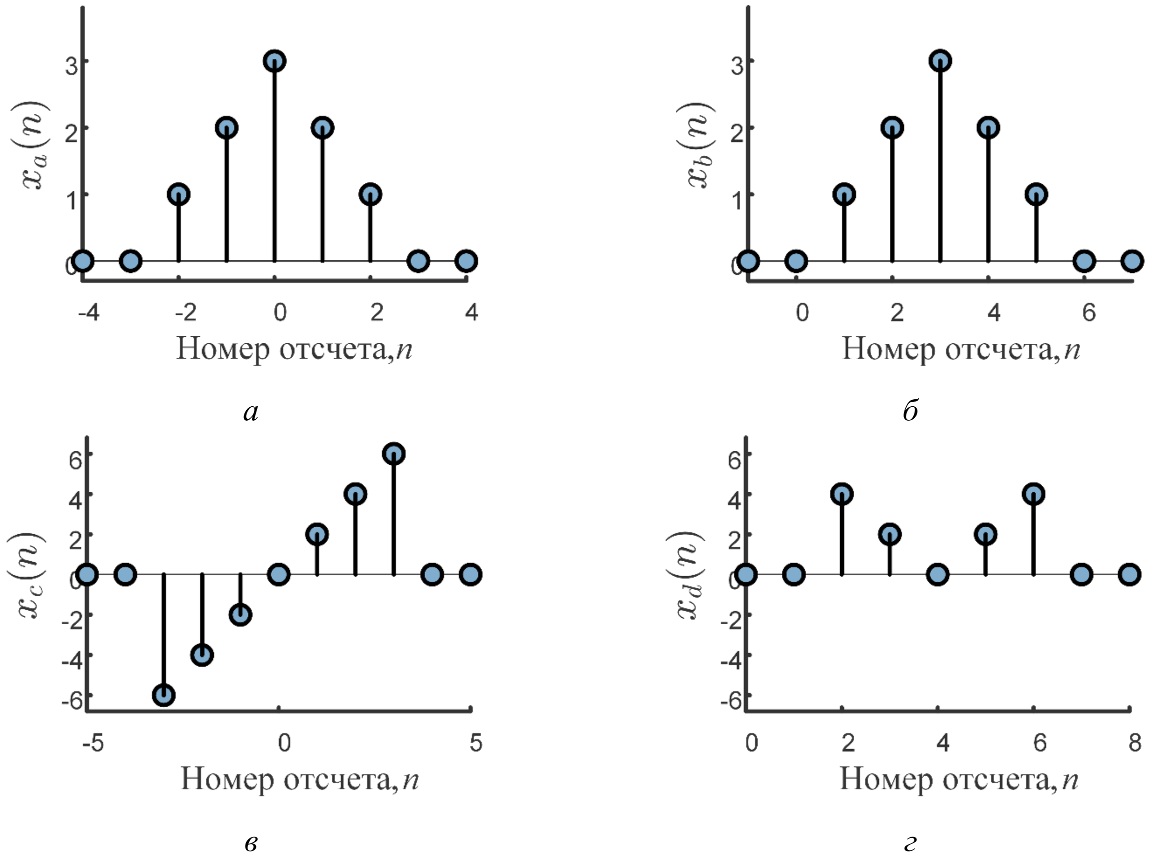

Рисунок 1.15 – Сигналы для задачи 5

6. Используя сигнал $x_c(n)$ из задачи 5, определяемый как $y(3-n) = x_c(n)$, изобразите следующие сигналы:

а) $y(-n)$; б) $y(2-n)$;

в) $y(n)\delta(n-2)$; г) $y(n+4)\delta(n)$;

д) $y(n)u(n-2)$; е) $y(n)u(4-n)$.

7. Представьте следующие экспоненты в виде $e^{j(\Omega n+\theta)}$, где $-\pi \leq \Omega < \pi$:

а) $e^{j(8,2\pi n+\theta)}$; б) $e^{j4\pi n}$;

в) $e^{-j1,95n}$; г) $e^{-j10,7\pi n}$.

Как в каждом случае изменится ответ, если на Ω накладывается ограничение $0 \leq \Omega < 2\pi$.

8. Найдите и изобразите четную и нечетную часть следующих сигналов:

а) $u(n)$; б) $nu(n)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$;

д) $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$;

е) $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$;

ж) $\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$;

з) $u(n+5)-u(n-5)$.

9. Определите являются ли следующие сигналы периодическими. При положительном ответе, определите период сигнала:

а) $\cos(0{,}6\pi n+0{,}3)+3\sin(0{,}5\pi n+0{,}4)$;

б) $\cos(1{,}5\pi n+0{,}3)+3\sin(1{,}5\pi n+0{,}4)+8\cos\left(1{,}5\pi n-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\cos(0{,}7\pi n-0{,}9)+3\sin(2{,}15\pi n+0{,}4)$.

10. Если $x_1(n)$ четный и $x_2(n)$ нечетный, то каким будет $y(n) = x_1(n)x_2(n)$? Ответ поясните.

11. Нотация $x(\langle n\rangle_N)$ используется, чтобы обозначить последовательность, которая формируется следующим образом:

$$x(\langle n\rangle_N)=x(n \bmod N),$$

где операция $(n \bmod N)$ дает положительное целое число в диапазоне $[0, N-1]$, равное остатку от деления n на N. Например, $\langle 3\rangle_8=3$, $\langle 12\rangle_8=4$ и $\langle -6\rangle_4=2$. Для сигнала $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n)$ изобразите графики следующих сигналов:

а) $x(\langle n\rangle_3)$;

б) $x(\langle n-2\rangle_3)$.

12. Найдите сопряженно симметрическую часть следующей последовательности:

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

13. Определите период следующих сигналов:

а) $x_1(t)=2\sin(2\pi f_1 t)+3\sin(2\pi f_2 t)+6\sin(2\pi f_3 t)$ при $f_1=2$ Гц, $f_2=3$ Гц, $f_3=8$ Гц;

б) $x_2(t)=3\cos(2\pi f_1 t)+5\sin(2\pi f_2 t)+7\cos(2\pi f_3 t)$ при $f_1=4$ Гц, $f_2=6$ Гц, $f_3=12$ Гц.

14. Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления единичного импульса. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$;

б) $y_2(n) = 2\delta(n+3) + 3\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1) - $
$-2\delta(n-2) - 3\delta(n-3)$.

15. Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления единичного скачка. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = (n-1)\big(u(n) - u(n-3)\big)$;

б) $y_2(n) = (3-n)\big(u(n+5) - u(n-8)\big)$.

16. Разработайте *MATLAB* -функцию вычисления убывающей экспоненты. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = 0{,}5^n u(n)$;

б) $y_2(n) = 0{,}8^n u(n-3)$.

17. Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления значений и отображения графиков следующих сигналов:

а) $y_1(n) = -0{,}5\sin(2\pi f_1 t + \phi_1)$ при $f_s = 1000$ Гц, $t \in [0,\ 0{,}5]$,
$f_1 = 5$ Гц, $\phi_1 = 0$.

б) $y_2(n) = \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + 0{,}35$ при $f_s = 1500$ Гц,
$t \in [-0{,}25,\ \ 0{,}25]$, $f_2 = 34$ Гц, $\phi_2 = 30$.

18. Вычислите энергию сигналов, показанных на рисунке 1.15.

19. Пусть $x(n) = n(u(n-1) - u(n-5))$, изобразите сигналы $x(n)$, $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n+1)$ и $3x(n)$ и вычислите их энергию.

20. Если E_x – это энергия сигнала $x(n)$, то чему равна энергия сигналов $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n-m)$ и $cx(n)$?