

Учреждение образования  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Объект авторского права

УДК 629.735.33

**БУМАЙ**  
Андрей Юрьевич

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ И СИНТЕЗ  
АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ  
АППАРАТОМ ПРИ ОБЛЕТЕ ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЫ**

**Автореферат**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата технических наук**  
**по специальности 05.13.01 – системный анализ,**  
**управление и обработка информации (промышленность)**

Минск 2023

Научная работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете.

Научный руководитель **Лобатый Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры робототехнических систем Белорусского национального технического университета

Официальные оппоненты: **Татур Михаил Михайлович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электронных вычислительных машин учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

**Ильев Игорь Георгиевич**, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры информационно-вычислительных систем учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»

Оппонирующая организация Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Защита состоится 26 октября 2023 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.15.01 при учреждении образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» по адресу: 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, корп. 1, ауд. 232, тел. (8-017) 293-89-89, e-mail: dissovet@bsuir.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Автореферат разослан «25» сентября 2023 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций  
кандидат технических наук, доцент



В. А. Рыбак

## **ВВЕДЕНИЕ**

Одним из путей повышения эффективности беспилотного летательного аппарата (БЛА) является обоснование принципов формирования траекторий полета БЛА, обеспечивающих оптимальное управление. Формирование траектории представляет собой сложную задачу, которая включает в себя соблюдение физических ограничений БЛА, ограничений операционной среды и других эксплуатационных требований. Основное ограничение, которое необходимо выполнить, заключается в том, что траектории должны быть реализуемыми при реальном полете и соответствовать кинематическим ограничениям БЛА. В диссертации рассмотрены вопросы обоснования принципов формирования оптимальных траекторий БЛА, учитывающих наличие областей воздушного пространства, в которых запрещен полет любых БЛА (запретные зоны), а также предлагаются алгоритмы комплексирования источников информации, методики расчета эффективности и пути ее повышения на этапе предварительного проектирования БЛА.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Тема работы соответствует научному направлению кафедры «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета и государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность общества и государства» по заданию 1.10.8 «Повышение надежности функционирования и совершенствование конструкции и систем управления беспилотных летательных аппаратов на основе цифровых моделей» и заданию 8 ГНТП «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 годы и ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 годы.

### **Цель, задачи, объект и предмет исследования**

*Цель* исследования заключается в разработке методик и алгоритмов формирования траектории и синтеза элементов системы управления беспилотным летательным аппаратом, а также оценки его эффективности при облете бесполетных запретных зон.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ методик формирования траекторий беспилотных летательных аппаратов.
2. Разработать методики и алгоритмы построения оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства при облете запретных зон.
3. Провести аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата.
4. Провести анализ и исследование особенностей алгоритмической фильтрации в комплексах ориентации и навигации БЛА.
5. Разработать методику и алгоритмы оценки вероятности попадания беспилотного летательного аппарата в запретную зону.

*Объект исследования* – система управления БЛА.

*Предмет исследования* – алгоритмы формирования оптимальной траектории полета БЛА при облете запретных зон.

### **Научная новизна**

1. Обоснованы и разработаны методики и алгоритмы построения оптимальных параметров траектории пролета БЛА при облете запретных зон автоматически, отличающиеся аналитическим решением задачи оптимизации и заданием запретной зоны в виде заданных точек пространства, через которые должна проходить траектория БЛА, позволяющие учесть динамические характеристики БЛА и обеспечивающие экономию энергетических затрат на управление.

2. Разработана методика поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА на начальных этапах разработки системы управления БЛА, учитывающая стохастическую постановку задачи и обеспечивающая выполнение заданных требований к устойчивости и динамической точности управления БЛА, полученного на основе методов модального управления, и позволяющая на этапе предварительного проектирования произвести аналитический синтез математической модели автопилота БЛА.

3. Разработана методика апостериорного оценивания посредством фильтрации навигационных параметров БЛА на основе предложенного критерия максимума апостериорного правдоподобия, позволяющая обеспечить эффективную работу системы управления БЛА в условиях наличия неопределенностей в выходной информации датчиков и наличии случайных изменений режимов работы подсистем БЛА.

4. Предложена общая методика оценки эффективности применения БЛА, отличающаяся учетом стохастической постановки задачи и всех возможных случайных факторов, позволяющая при однократном интегрировании системы дифференциальных уравнений для вероятностных моментов оценить вероятность попадания БЛА в запретную зону и невыхода из нее в течении заданного времени, характеризующего инерционность соответствующих контролируемых систем.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1. Методика определения оптимальных параметров траектории пролета БЛА через заданные точки пространства при облете запретных зон.

2. Методика поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА на основе методов модального управления и позволяющая на этапе предварительного проектирования произвести аналитический синтез математической модели автопилота БЛА.

3. Метод комплексирования источников информации системы управления БЛА на основе алгоритма оценивания навигационных параметров, отличающийся учетом неопределенностей в выходной информации различных датчиков и случайных изменений режимов работы подсистем БЛА.

4. Методика вероятностного анализа попадания БЛА в область пространства, запрещенную для полетов любых летательных аппаратов, позволяющая оценить выполнение заданных ограничений на траекторию полета БЛА.

#### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Все основные результаты и положения, выносимые на защиту, получены лично автором. Научный руководитель А. А. Лобатый принимал участие в постановке задач, определении возможных путей их решения, предварительном анализе, обсуждении результатов исследований, проведенных автором. В публикациях с соавторами вклад соискателя определяется рамками диссертационной работы.

Автор самостоятельно получил основные результаты диссертационной работы. Общая концепция исследований и отдельные теоретические методы разработаны совместно с научным руководителем.

## **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на седьмой, восьмой международных научно-технических интернет-конференциях БНТУ «Информационные технологии в образовании, науке и производстве» 2019–2020 гг.; Международной конференции «Математическое моделирование», Московский авиационный институт, 2020 г.; 19-й Международной конференции «Авиация и космонавтика», Московский авиационный институт, 2020 г.; Международной конференции «Беспилотные летательные аппараты», Московский авиационный институт, 2020 г.; IX международной научно-практической конференции «Инновационные технологии, автоматизация и мехатроника в машино- и приборостроении», БНТУ, 2020 г.; 10-й Международной научно-технической конференции «Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере», ОИПИ НАН Беларуси, 2021 г.

Результаты диссертации также докладывались на научных семинарах кафедры «Информационные системы и технологии» БНТУ.

Получен акт внедрения результатов научных исследований, приведенных в диссертационной работе в заключительном отчете ОКР «Шторм» по заданию 8 ГНТП «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 годы и ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 годы, на Республиканском унитарном предприятии «Научно-производственный центр многофункциональных беспилотных комплексов» Национальной академии наук Беларуси, что подтверждает научную и практическую значимость диссертации.

## **Опубликованность результатов диссертации**

По результатам выполненных исследований опубликовано 13 научных работ общим объемом 3,9 авторского листа. Из них 6 статей объемом 2,8 авторского листа в научных изданиях, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, 7 статей в сборниках тезисов докладов конференций объемом 1,1 авторского листа.

## **Структура и объем диссертации**

Работа состоит из введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения, списка использованных источников, 7 приложений. Список использованных источников включает библиографический список из 136 наименований и список публикаций соискателя ученой степени из

13 наименований. Общий объем – 158 страниц, в том числе 51 рисунок на 38 страницах, 7 приложений на 16 страницах.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во введении показана актуальность темы, обоснована необходимость проведения работы по анализу и аналитическому синтезу построенных на новых принципах систем управления (СУ) БЛА, показана практическая значимость работы.

**В первой главе** представлено современное состояние изучаемого вопроса, проводится анализ БЛА и принципов построения систем управления БЛА.

Анализ технических моделей БЛА и их летно-технических характеристик позволяет сделать вывод о том, что беспилотные авиационные системы вытесняют пилотируемую авиацию, так как позволяют предоставлять удаленно оперативную информацию в режиме реального времени, при этом не требуют высоких летно-технических навыков операторов БЛА. Анализ задач БЛА позволяет сделать вывод о том, что основной целью беспилотной авиации является передача актуальной информации об объектах в режиме реального времени и замена человека при выполнении монотонных задач. Решение данных задач требует разработки новых методик формирования траекторий, учитывающих пространственно-временные ограничения.

Формирование траектории БЛА является актуальной задачей, которая зависит от множества факторов и ограничений. В ряде научных исследований рассматриваются различные методы формирования траекторий, основывающиеся в большинстве случаев на принципах, не учитывающих время полета, затраты энергии, скорости и летно-технических характеристик. Задание траектории в пространстве, а также критериев оптимальности зависит от функционального назначения БЛА и решаемой им задачи. По этой причине представляется целесообразным для обоснования оптимального управления БЛА сформировать минимизируемый функционал качества и систему ограничений, накладываемую на реальную траекторию полета БЛА.

**Во второй главе** представлен метод для аналитического синтеза закона управления БЛА, и на основе этого метода сформирована траектория полета БЛА, проходящая через определенные точки пространства. Данный метод дает возможность на стадии предварительного обоснования общего вида системы управления БЛА получить закон управления, являющийся оптимальным для математически определенного критерия качества управления.

Рассмотрена задача формирования траектории, представляющей собой отдельные интервалы, на каждом из которых обеспечивается наведение БЛА оптимальным образом и выполняются основные требования к СУ. Необходимо обеспечить заданную точность приближения траектории полета к заданным точкам пространства, а также минимизировать интегральные потери, обусловленные маневрированием и изменениями управляющей перегрузки. Из поставленной задачи следует необходимость сформировать критерий оптимизации, который включает в себя как составляющую, характеризующую точность достижения поставленной цели, так и составляющую, характеризующую интегральные потери в течение времени управления процессом полета.

В кинематической схеме процесса наведения летательного аппарата отражено, что в каждой заданной точке пространства учитывается направление траектории на последующую точку, что обеспечивает оптимальную кривизну траектории при заданной скорости полета летательного аппарата. Для данной постановки задачи определен следующий критерий оптимальности – квадратичный функционал, который имеет вид

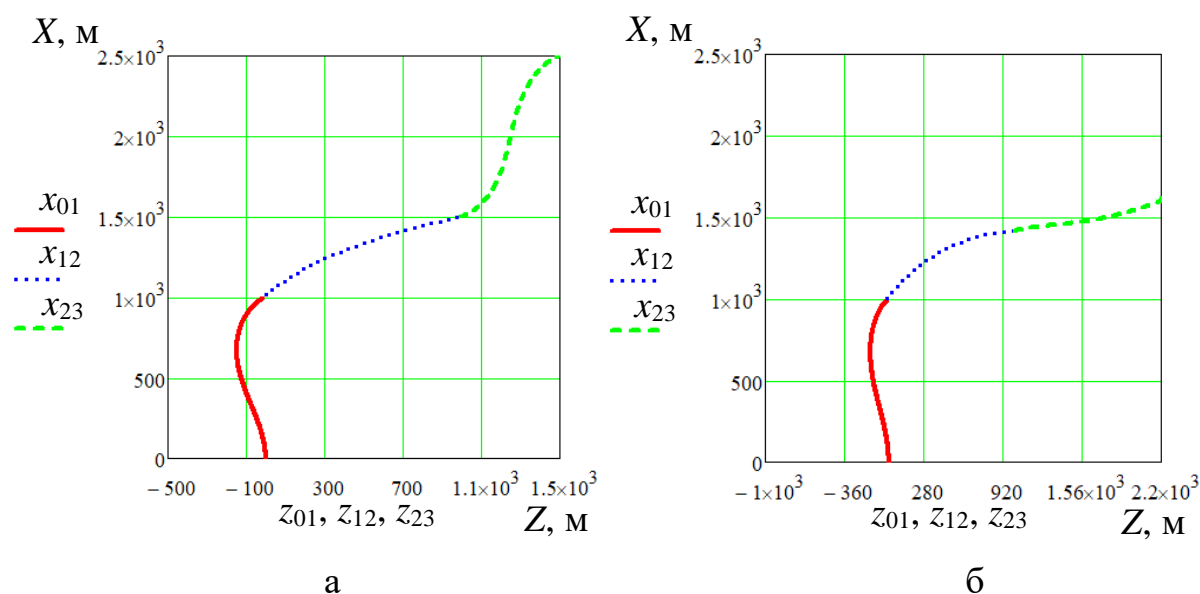
$$J = \frac{1}{2} \left[ c_1 (v_z^{(k)} - v_{\text{зад}}^{(k)})^2 + c_2 (z^{(k)} - z_{\text{зад}}^{(k)}) \right]_{t=t_k} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} c_3 (a_z^{(k)})^2 dt, \quad (1)$$

где  $t_k$  – момент времени достижения летательным аппаратом определенной  $k$ -й точки пространства;  $v_{\text{зад}}^{(k)}$  – указанная величина проекции скорости летательного аппарата на ось  $O^{(k)}Z^{(k)}$  для инерциальной системы отсчета на  $k$ -м участке в момент  $t_k$ ;  $z_{\text{зад}}^{(k)}$  – боковая координата определенной  $k$ -й точки траектории полета летательного аппарата в момент времени  $t_k$ ;  $c_1, c_2, c_3$  – коэффициенты, которые задаются с учетом размерности параметров функционала (1). Так как общего теоретического подхода для получения коэффициентов нет, то они выбираются исходя из конкретной постановки задачи. В данном случае  $c_1 = 1/(v_{z\text{max}})^2$ ,  $c_2 = 1/(z_{\text{max}})^2$ ,  $c_3 = 1/a_{z\text{max}}^2 (t_k - t_0)$ . При определенных условиях интегральное слагаемое функционала (1) можно проигнорировать, предлагается считать, что  $c_1 \rightarrow \infty$  и  $c_2 \rightarrow \infty$ , это означает, что терминальные составляющие функционала существенно значимее интегральной составляющей.

Для того чтобы решить поставленную задачу, где необходимо определить оптимальное боковое ускорение  $a_z^{(k)}$ , которое, в свою очередь, минимизирует функционал (1), применяются разнообразные методы аналитического конструирования.



В качестве примера рассмотрено изменение траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости при пролете БЛА через заданные точки пространства со следующими координатами:  $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 1000$  м,  $z^{(1)} = 0$ ;  $x^{(2)} = 1500$  м,  $z^{(2)} = 1000$  м;  $x^{(3)} = 2500$  м,  $z^{(3)} = 1500$  м; (рисунок 1, а) и  $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 1000$  м,  $z^{(1)} = 0$ ;  $x^{(2)} = 1500$  м,  $z^{(2)} = 1000$  м;  $x^{(3)} = 1600$  м,  $z^{(3)} = 2200$  м (рисунок 1, б). Представленные результаты рассчитаны в компьютерной среде Mathcad для математической модели траектории БЛА.



а – траектория (вариант 1); б – траектория (вариант 2)

Рисунок 1 – Траектории полета БЛА

Как показали результаты моделирования данного примера, величины отклонений траектории БЛА от заданных промежуточных точек пространства составили от 7 до 20 м в зависимости от углов и ориентации вектора скорости  $\vec{v}$ . В реальных условиях применения БЛА для решения задач облета запретных зон на безопасном расстоянии такой результат может быть вполне приемлемым.

На следующем этапе решается задача аналитического синтеза управляющего ускорения БЛА при полете его по сложной траектории, состоящей из последовательно расположенных участков горизонтального полета, находящихся на разной высоте относительно земной поверхности. Задача решается как аналитическое определение оптимального управления линейной нестационарной системой при заданном минимизируемом функционале качества. При решении задач синтеза управления БЛА рассматривается «задача Больца», в которой минимизируемый функционал качества, как правило, представляется в виде квадратичного функционала

Летова – Калмана. Определяется оптимальное управление БЛА (ускорение  $a_y(t)$ ) на каждом из участков траектории его полета:

$$a_{yg} = -\frac{4v_{yg}}{t_{\text{ост}}} - \frac{6(y_g - y_{g\text{зад}})}{(t_{\text{ост}})^2} + g. \quad (2)$$

В данном случае в качестве критерия оптимизации рассматривается традиционный для данного типа задач – квадратичный функционал – аналогично функционалу (1) применительно для вертикальной плоскости.

Данный подход в определении управляющей перегрузки БЛА применим и для решения пространственной задачи наведения БЛА. Это может производиться отдельным решением двух плоских задач с последующим их объединением или решением задачи в новой введенной вращающейся системе координат, связанной с вектором дальности БЛА до очередной точки пространства, с последующим разделением по каналам управления БЛА с помощью матрицы преобразования координат (матрицы направляющих косинусов).

В качестве примера рассмотрено математическое моделирование данной задачи в среде Mathcad при следующих заданных значениях:  $v = 50 \text{ м/с} = \text{const}$ ,  $D_{\text{ост}} = 50 \text{ м}$ . В соответствии с обозначениями, приведенными на рисунке 2, заданы следующие координаты точек, через которые должен пролететь БЛА:  $x_1 = 0 \text{ м}$ ,  $y_1 = 500 \text{ м}$ ;  $x_2 = 850 \text{ м}$ ,  $y_2 = 200 \text{ м}$ ;  $x_3 = 1700 \text{ м}$ ,  $y_3 = 200 \text{ м}$ ;  $x_4 = 2550 \text{ м}$ ,  $y_4 = 500 \text{ м}$ . На рисунке 2 представлена траектория БЛА, полученная в результате компьютерного моделирования.

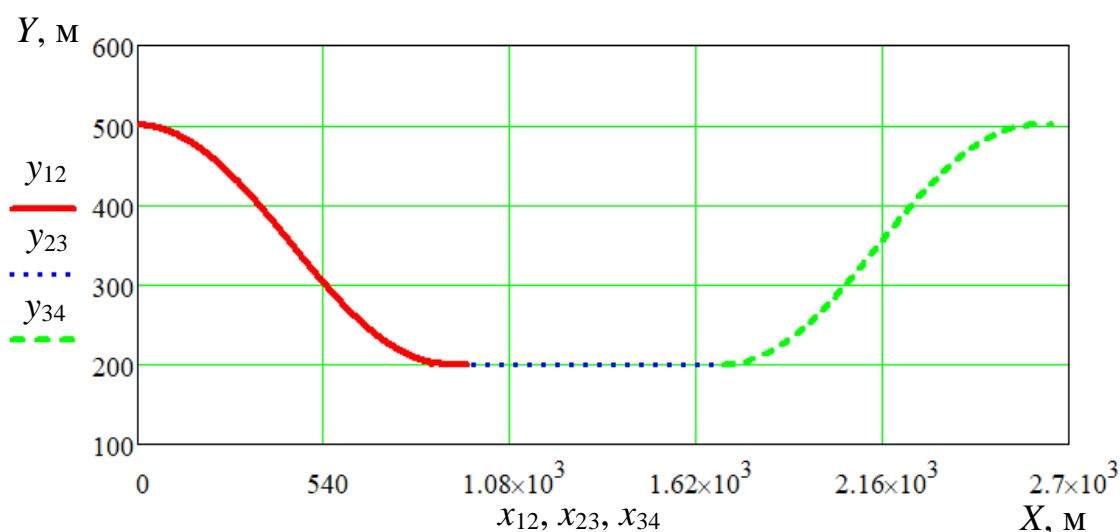
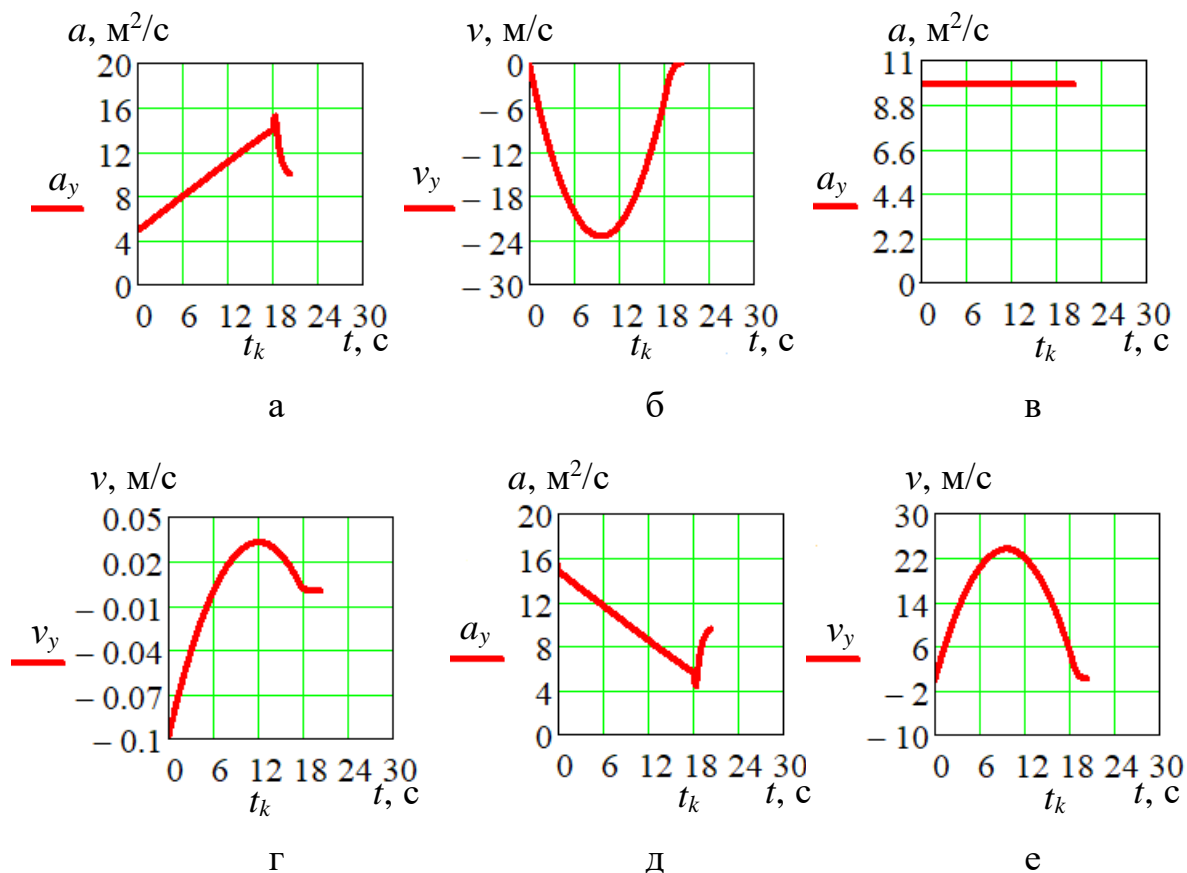


Рисунок 2 – Результаты моделирования траектории полета БЛА

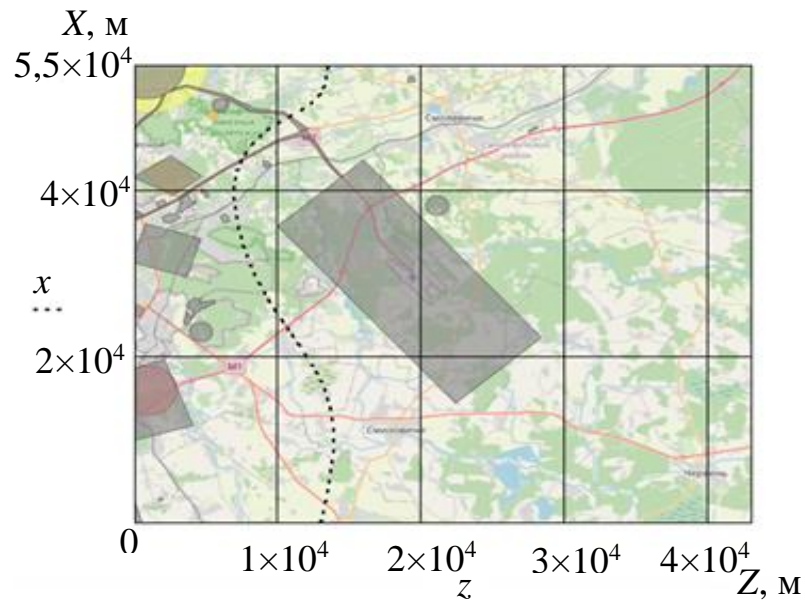
На рисунке 3 представлены графики изменения управляющей вертикальной перегрузки  $a_y(t)$  и вертикальной скорости  $v_y(t)$  БЛА на трех приведенных выше участках траектории полета.



а, б – ускорение и скорость на участке 1 траектории полета; в, г – ускорение и скорость на участке 2 траектории полета; д, е – ускорение и скорость на участке 3 траектории полета

Рисунок 3 – Графики изменения вертикальной перегрузки и вертикальной скорости

Применяя методику построения траектории при пролете через заданные точки пространства и учитывая проведенный анализ бесполетных зон, предложен пример формирования траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости при облете БЛА запретной зоны № 181, которая представляет собой запретную зону аэропорта Минск-2, через заданные точки пространства со следующими координатами:  $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 17000$  м,  $z^{(1)} = 13000$  м;  $x^{(2)} = 40000$  м,  $z^{(2)} = 7000$  м;  $x^{(3)} = 53000$  м,  $z^{(3)} = 13000$  м. Моделирование проведено в компьютерной среде Mathcad для математической модели траектории БЛА. На рисунке 4 представлена траектория облета БЛА запретной зоны.



**Рисунок 4 – Траектория БЛА при облете запретной зоны**

**Третья глава** посвящена разработке методики поэтапного синтеза автопилота беспилотного летательного аппарата.

Рассмотрена задача синтеза скалярного управления БЛА в предположении наличия математической модели полностью измеряемого вектора состояния. Синтезированный аналитически закон управления перегрузкой БЛА представляется в виде выражения (2). Уравнения движения БЛА в вертикальной плоскости имеют вид

$$a_y = \frac{1}{m} (C_y^\alpha S q \alpha - C_x S_a q + P \cos \alpha), \quad (3)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{J_{zz}} (m_z^\alpha \alpha + m_z^\omega \omega_z + m_z^\delta \delta) S_a q l_a. \quad (4)$$

В выражениях (3) – (4)  $a_y$  – ускорение БЛА по оси  $Y$ ;  $\omega_z$  – угловая скорость вращения БЛА в вертикальной плоскости относительно оси  $Z$ ;  $m$  – масса БЛА;  $J_{zz}$  – момент инерции БЛА;  $S_a$  – площадь аэродинамической поверхности, создающей подъемную силу;  $l_a$  – характерный линейный размер (хорда крыла);  $\alpha$  – угол атаки;  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор;  $C_y^\alpha, C_x, m_z^\alpha, m_z^\omega, m_z^\delta$  – известные аэродинамические коэффициенты конкретного БЛА.

Уравнение состояния объекта управления (БЛА) имеет вид

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (5)$$

где матрицы  $A$  и  $B$  имеют вид  $A = \begin{bmatrix} -1,54 & 75 \\ -0,55 & -17 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -170 \end{bmatrix}$ .

Для заданной системы применив соответствующую методику проведен синтез модального регулятора, который обеспечил замкнутой системе желаемый спектр.

При сравнении характеристического полинома спроектированной замкнутой системы с желаемым полиномом подтверждено, что регулятор (автопилот) спроектирован и представлен верно ( $\varphi_{A+BK^T}(s) = \varphi^*(s)$ ). Таким образом, аналитически получен закон управления БЛА, который с учетом введенных обозначений для данной постановки задачи имеет вид

$$\delta = -0,003141a_y - 0,101\omega_z. \quad (6)$$

Данный закон управления (6) обеспечивает необходимую устойчивость БЛА и точность обработки управляющей перегрузки БЛА, при реализации которой БЛА осуществляет полет по заданной траектории.

В качестве примера рассмотрено математическое моделирование данной задачи в среде Mathcad. Требуемая перегрузка БЛА определялась на основе выражений (2) при следующих заданных значениях условий применения:  $v = 50 \text{ м/с} = \text{const}$ ,  $D_{\text{ост}} = 50 \text{ м}$ . Были заданы следующие координаты точек пространства, через которые должен пролететь БЛА:  $x_1 = 0 \text{ м}$ ,  $y_1 = 500 \text{ м}$ ;  $x_2 = 850 \text{ м}$ ,  $y_2 = 200 \text{ м}$ . Результаты математического (компьютерного) моделирования в виде графиков изменения во времени переменных, характеризующих полет БЛА, представлены на рисунке 5.

На рисунке 5, а – график изменения высоты (траектории) БЛА; на рисунке 5, б – вертикальная скорость БЛА; на рисунке 5, в – потребная перегрузка БЛА; на рисунке 5, г – фактическая перегрузка БЛА; на рисунке 5, д – угловая скорость вращения БЛА; на рисунке 5, е – угол отклонения управляющей рулевой поверхности.

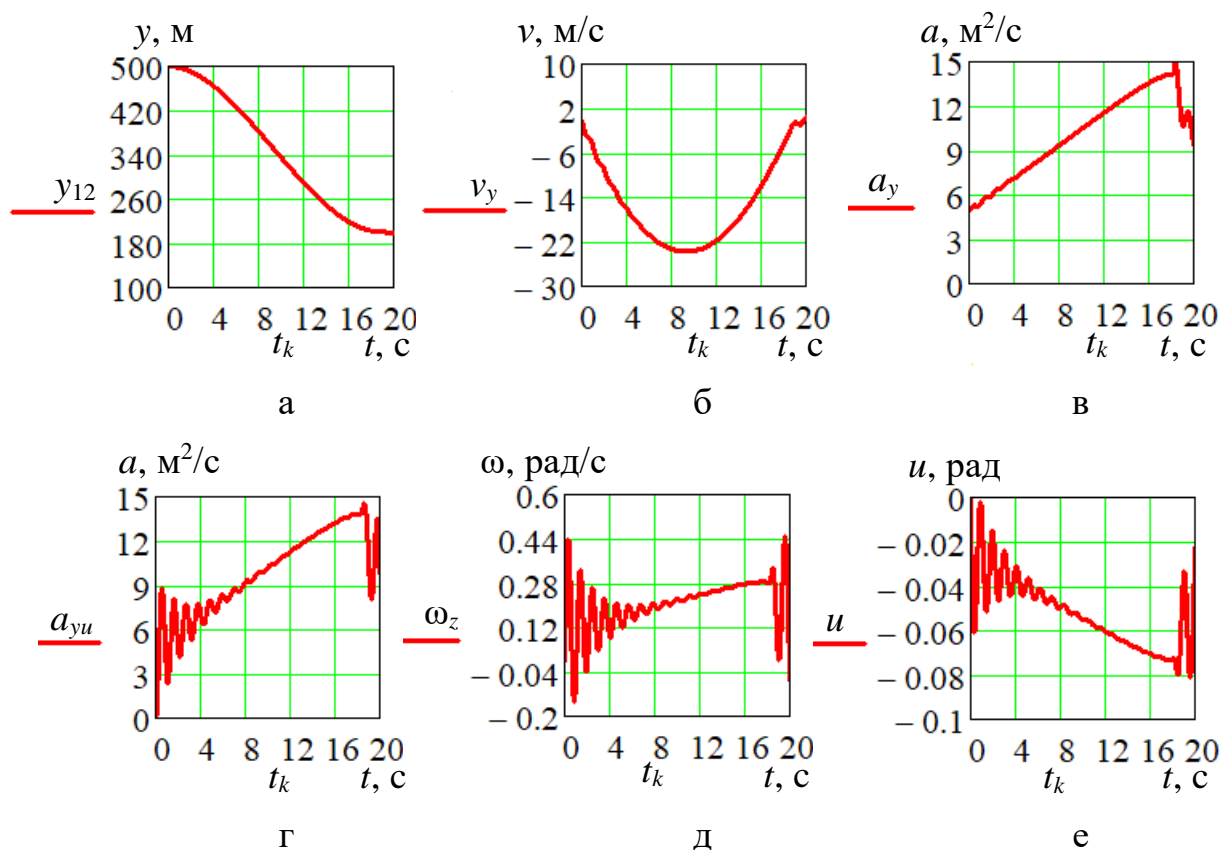


Рисунок 5 – Результаты компьютерного моделирования

Как видно из рисунков, результаты моделирования свидетельствуют о работоспособности данной методики синтеза законов управления БЛА.

На следующем этапе рассмотрена задача оценивания вероятностных характеристик многомерного случайного процесса с помощью многомерного измерителя и задача комплексирования измерителей и фильтров. При наличии нескольких измерителей и соответственно нескольких алгоритмов фильтрации процесса  $X(t)$  для их комплексирования рассмотрена условная апостериорная плотность вероятности, которая обозначена  $f(X|\hat{X})$ :

$$f(X|\hat{X}) = \prod_{k=1}^m f(X|Z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{k=1}^m R_k}} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m \frac{(x_k - \hat{x}_k)^2}{2R_k} \right\}. \quad (7)$$

В выражении (7)  $R_k$  и  $\hat{x}_k$  – апостериорные вероятностные моменты  $k$ -х выходов фильтров Калмана. Критерием комплексирования (оптимальной оценки процесса  $X(t)$ ) в этом случае предложен новый критерий на основе

критериев максимума апостериорной вероятности (МАВ) и критерия максимума правдоподобия (МП) – максимум апостериорного правдоподобия (МАП), которому соответствует выражение

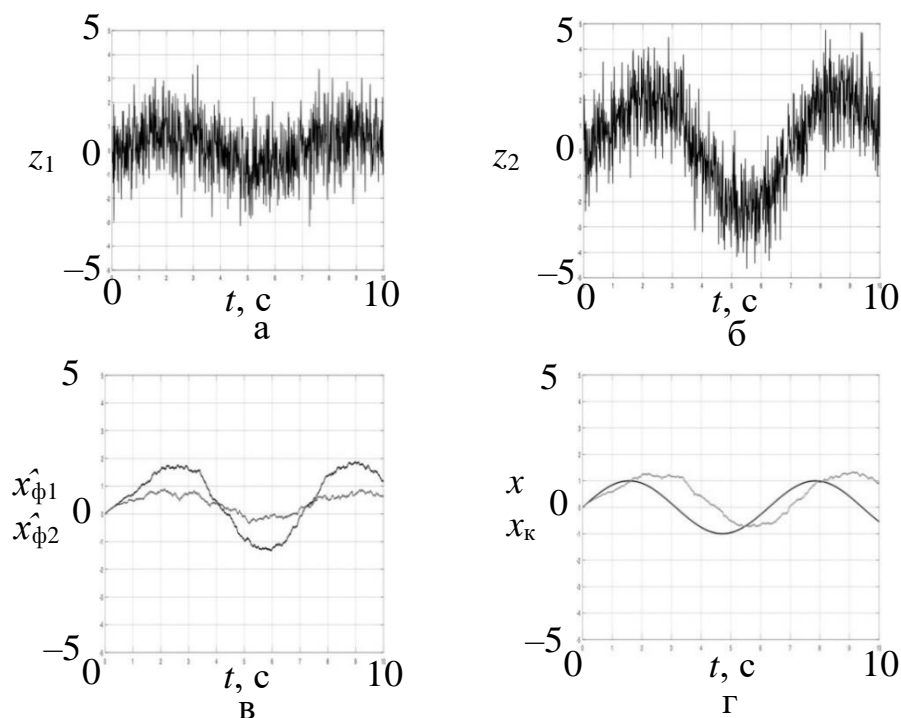
$$\hat{X}_{\text{МАП}}(t) = \underset{\hat{X}}{\operatorname{argmax}} f(X | \hat{X}). \quad (8)$$

При  $m$  независимых наблюдениях  $z_k(t)$  и  $m$  фильтров Калмана ( $k = \overline{1, m}$ ) значения апостериорных характеристик  $\hat{x}_{\text{МАП}}$  и  $R_{\text{МАП}}$  случайного процесса  $x(t)$  при использовании критерия МАП вычисляются на основе формулы (7) и выражения (8):

$$\hat{x}_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{x}_k, \quad \hat{R}_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m R_k. \quad (9)$$

Заметим, что в условиях наличия неопределенностей точность апостериорного оценивания по критерию МАП в соответствии с выражениями (9) будет тем выше, чем больше число измерителей и фильтров.

В качестве примера рассмотрена для наглядности одномерная система с двумя измерителями. На рисунке 6 представлены результаты математического моделирования, выполненного в среде Matlab–Simulink.



**Рисунок 6 – Результаты математического моделирования процесса выходных сигналов измерителей и фильтров**

На рисунках б, а и б, б представлены графики изменения выходных сигналов измерителей. На рисунке б, в – графики изменения выходных сигналов фильтров. На рисунке б, г – график входного сигнала  $x(t)$  и график сигнала, полученного в результате комплексирования двух фильтров  $x_K = x_K(t) = \hat{x}_{МАП}$ .

**Четвертая глава** посвящена разработке методики оценки эффективности БЛА и в соответствии с его основными задачами, классификацией, целевыми функциями проведено обоснование критериев эффективности БЛА. Задача определения вероятности регистрации БЛА в запретной зоне (захвата БЛА системами обнаружения) сводится к задаче невыхода БЛА (центра масс БЛА) из запретной области  $U_3$  в течение времени  $\tau_3 = t_{i+1} - t_i$  при условии нахождения его в области  $U_3$  в начальный момент времени  $t_0$ .

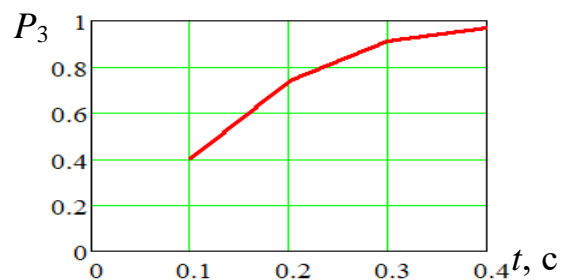
Вероятность нахождения  $X(t)$  в области  $U_3$  в каждый текущий момент времени  $t_i$  обозначено через  $P_1(t_i) = P_1(X(t_i) \in U_3)$ . Вероятность невыхода  $X(t)$  из области  $U_3$  в течение времени  $\tau_3$  обозначено через  $P_2(t_i + \tau_3 | X(t_i) \in U_3)$ .

Вероятность захвата  $P_3(t_r)$  к моменту времени  $t_r$  вычисляется по формуле полной вероятности, которая в данном случае имеет вид

$$P_3(t_r) = 1 - \prod_{i=1}^r \left[ 1 - P_1(t_i) P_2(t_i + \tau_3 | X(t_i) \in U_3) \right]. \quad (10)$$

Здесь  $r = 0 \dots k - 1$ ;  $k = t_k - t_0 / \tau_3$ .

Расчеты были проведены в среде Mathcad для простейшей модели полета БЛА при гауссовой аппроксимации плотности вероятности распределения координат, характеризующих пространственное положения БЛА. На рисунке 7 изображены значения  $P_3(t_r) = P_3(t)$ ,  $r = 1 \dots 4$ , соединенные интерполяционной кривой.



**Рисунок 7 – Значения  $P_3(t_r)$ , соединенные интерполяционной кривой**

Для реализации представленной методики необходимо иметь линеаризованную математическую модель движения БЛА в пространстве и линейную модель системы управления.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. Проведен анализ БЛА, их летно-технических характеристик и принципов построения траекторий полета. Обосновано, что задание траектории в пространстве, а также критериев оптимальности зависит от функционального назначения БЛА и основных задач, решаемых беспилотной авиацией. Выявлено, что для решения рассмотренных задач требуется улучшение способов формирования траектории с учетом пространственно-временных ограничений.

Проведен анализ бесполетных зон, который дает представление об ограничениях, связанных с навигационными картами при составлении маршрута БЛА и траектории его полета. Принципы формирования бесполетных зон, представляющих простые геометрические фигуры с четкими очертаниями, позволяют создавать программы реагирования автопилота для типовых случаев облета запретных зон [б–А].

2. Синтезирован закон управления для БЛА в случае, когда происходит наведение его по траектории, которая задана опорными точками пространства в инерциальной системе отсчета. Обоснован критерий оптимизации в общем виде и представление его в форме минимизируемого квадратичного функционала качества, удобного для аналитического синтеза управления. В качестве составляющих функционала рассмотрены параметры отклонения траектории полета летательного аппарата от заданных точек пространства, а также – прогнозируемые параметры вектора скорости и управляющее нормальное ускорение. При этом в каждой заданной точке пространства учитывается направление траектории на последующую точку, что обеспечивает оптимальную кривизну траектории при заданной скорости полета летательного аппарата. В результате аналитического синтеза получены математические зависимости для определения управляющего ускорения, которые позволяют на борту БЛА получить заданный оптимальный закон управления, обеспечивающий в конечном итоге минимальные затраты энергии.

Решена задача аналитического синтеза управляющего ускорения БЛА при полете его по сложной траектории, состоящей из последовательно расположенных участков горизонтального полета, находящихся на разной высоте относительно земной поверхности. Особенностью предлагаемой методики решения задачи является обоснование оригинального вида минимизируемого функционала и параметров, входящих в полученный

известными методами закон изменения управляющего ускорения. Проведенное компьютерное моделирование полученных аналитически результатов в виде траектории полета БЛА и процессов изменения ускорения и скорости БЛА показало работоспособность предлагаемой методики и перспективность ее использования на первоначальном этапе синтеза системы управления БЛА [1–А; 5–А; 6–А; 7–А; 9–А; 10–А; 11–А].

3. Решена задача поэтапного синтеза математической модели автопилота БЛА. На первом этапе производится аналитический синтез управляющего ускорения, приложенного к центру масс БЛА, для формирования заданной траектории его полета. На основе использования полученных на первом этапе результатов на последующих этапах решена задача синтеза математической модели автопилота БЛА при заданных требованиях к обеспечению устойчивости и динамической точности управления БЛА. При синтезе математической модели автопилота БЛА использован метод модального управления системой при заданной математической модели объекта. Для заданной модели движения и аэродинамических характеристик БЛА аналитически получен закон отклонения управляющей рулевой поверхности, зависящий от параметров поступательного и вращательного перемещения БЛА [4–А; 9–А; 13–А].

4. Решена задача оценивания информации, содержащейся в случайных сигналах, поступающих от различных источников – измерителей. Проведен анализ аналитических методов и алгоритмов оценивания, основанных на определении основных вероятностных характеристик случайного процесса как априорными, так и апостериорными методами при различных критериях оптимальности. На основе проведенного анализа рассмотрена задача комплексирования измерителей случайного процесса в общей постановке на основе предложенного критерия максимума апостериорного правдоподобия, объединяющего критерий максимума правдоподобия и критерий максимума апостериорной вероятности, на основе чего разработана общая методика комплексирования. Данный подход к построению алгоритмов оценивания многомерных случайных процессов позволяет повысить точность оценивания, так как учитывает дополнительную информацию и комплексную ее обработку [3–А; 8–А; 12–А].

5. Решена задача вероятностного анализа пересечения беспилотным летательным аппаратом границы зоны, запретной для полетов. Условием для констатации факта нарушения границы запретной зоны считается нахождение БЛА в ее пределах в течение заданного времени. Проведено обоснование математической модели для проведения исследований в виде линеаризованного векторного стохастического уравнения. Задача решается

на основе применения теории марковских процессов случайной структуры с поглощением реализаций на границе заданной области. Особенностью данного подхода является одновременное рассмотрение двух плотностей вероятности распределения фазовых координат, характеризующих граничные условия. При этом решаются две системы уравнений для вероятностных моментов: с учетом поглощения реализаций и без учета данного поглощения соответственно. Рассмотрена вероятность попадания объекта в заданную область и невыход из нее в течение времени, необходимого для фиксации БЛА в запретной зоне [2–А].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Полученную в диссертационной работе совокупность научных результатов можно квалифицировать как возможное направление в области задач аналитического анализа и синтеза систем управления беспилотных летательных аппаратов, в том числе применительно к решению задач оценки их эффективности для формирования требований к характеристикам БЛА на этапе их разработки и подготовки производства.

Результаты диссертационных исследований были применены при выполнении государственных научно-технических программ «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 годы и ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 годы, что подтверждает научную и практическую значимость диссертации.

### **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ**

**Статьи в научных изданиях, соответствующих требованиям пункта 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий**

1–А. Бумай, А. Ю. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, Д. Цзюнь // Докл. БГУИР. – 2019. – № 7–8 (172). – С. 50–57.

2–А. Бумай, А. Ю. Вероятностный анализ попадания беспилотного летательного аппарата в запретную зону / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, Ю. Ф. Яцына, В. Ю. Степанов // Систем. анализ и приклад. информатика. – 2019. – № 4. – С. 46–54.

3–А. Бумай, А. Ю. Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Систем. анализ и приклад. информатика. – 2020. – № 1. – С. 24–32.

4–А. Бумай, А. Ю. Поэтапный аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, С. С. Прохорович // Систем. анализ и приклад. информатика. – 2021. – № 1. – С. 21–28.

5–А. Бумай, А. Ю. Аналитический синтез управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, С. С. Прохорович // Наука и техника. – 2021. – Т. 20, № 4. – С. 338–344.

6–А. Бумай, А. Ю. Формирование траектории беспилотного летательного аппарата при облете запретных зон / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, А. М. Авсиевич // Систем. анализ и приклад. информатика. – 2021. – № 4. – С. 47–53.

### **Статьи в сборниках тезисов докладов научных конференций**

7–А. Бумай, А. Ю. Интервально-оптимальное программное управление летательным аппаратом / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : докл. VII Междунар. науч.-техн. интернет-конф., Минск, 16–17 нояб. 2019 г. / Белорус. нац. техн. ун-т ; сост.: Е. В. Кондратенок. – Минск, 2019. – С. 181–184.

8–А. Бумай, А. Ю. Комплексование параметров многомерных случайных процессов / А. Ю. Бумай // Математическое моделирование : тез. докл. Междунар. конф., Москва, 17 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – Москва, 2020. – С. 535–536.

9–А. Бумай, А. Ю. Задача оптимального управления беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : докл. VIII Междунар. науч.-техн. интернет-конф., Минск, 21–22 нояб. 2020 г. / Белорус. нац. техн. ун-т ; сост.: Е. В. Кондратенок. – Минск, 2020. – С. 203–206.

10–А. Бумай, А. Ю. Формирование оптимальной траектории беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай // Авиация и космонавтика : тез. докл. 19-й Междунар. конф., Москва, 23 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – Москва, 2020. – С. 253–254.

11–А. Бумай, А. Ю. Формирование оптимальной траектории беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай // Беспилотные

летательные аппараты : тез. докл. Междунар. конф., Москва, 24 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – Москва, 2020. – С. 44–45.

12–А. Бумай, А. Ю. Комплексование измерителей случайного процесса / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Инновационные технологии, автоматизация и мехатроника в машино- и приборостроении : тез. докл. IX междунар. науч.-практ. конф., Минск, 7 апр. 2021 г. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2021. – С. 7–10.

13–А. Бумай, А. Ю. Аналитический синтез закона управления беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере : тез. докл. 10-й Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 26–27 мая 2021 г. / Объед. ин-т проблем информатики Нац. акад. наук Беларуси. – Минск, 2021. – С. 10–12.



## РЭЗІЮМЭ

Бумай Андрэй Юр'евіч

### **Фарміраванне аптымальнай траекторыі і сінтэз алгарытмаў кіравання беспілотным лятальным апаратам пры аблёце забароненай зоны**

**Ключавыя словы:** аптымальная траекторыя, беспалётная забароненая зона, сістэма кіравання, аўтапілот, камплексаванне, фільтраванне, эфектыўнасць

**Мэта працы:** распрацоўка метадык і алгарытмаў фармавання траекторыі і сінтэзу элементаў кіравання БЛА, а таксама адзнакі яго эфектыўнасці пры аблёце беспалётных забароненых зон.

**Метады даследавання і выкарыстаная апаратура:** класічныя і сучасныя метады аналізу і сінтэзу СУ па зададзеным крытэрыі, метады ацэнкі стану стахастычных сістэм, метады тэорыі сістэмнага аналізу.

**Атрыманыя вынікі і іх навізна:** распрацаваны метадыкі і алгарытмы пабудовы аптымальных параметраў траекторыі пралёта БЛА праз зададзеныя кропкі прасторы пры аблёце забароненых зон. Прадстаўлена метадыка паэтапнага аналітычнага сінтэзу закона кіравання БЛА на пачатковых этапах распрацоўкі траекторыі палёту, якая ўлічвае стахастычную пастаноўку задачы і дазваляе на этапе папярэдняга праектавання забяспечыць выкананне зададзеных патрабаванняў да забеспячэння ўстойлівасці і дынамічнай дакладнасці кіравання БЛА. Прапанавана агульная метадыка фільтрацыі навігацыйных параметраў БЛА на аснове класічнага фільтра Калмана – Бьюсі, якая дазваляе забяспечыць эфектыўную працу сістэмы кіравання БЛА ва ўмовах наяўнасці нявызначанасцяў у выходнай інфармацыі датчыкаў і пры наяўнасці выпадковых змен рэжымаў працы падсістэм БЛА. Прыведзена метадыка, якая дазваляе набліжана вырашаць шэраг практычных задач імавернаснага аналізу траплення БЛА у розныя вобласці прасторы, у прыватнасці, межы зоны, забароненай для палётаў.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні:** распрацаваныя метадыкі і алгарытмы могуць быць выкарыстаны ў арганізацыях, якія займаюцца пытаннямі аналізу і сінтэзу сістэм аўтаматычнага кіравання тэхнічнымі аб'ектамі.

**Вобласць ужывання:** атрыманая ў дысертацыйнай працы сукупнасць навуковых вынікаў з'яўляецца магчымым напрамкам у галіне задач аналізу і аналітычнага сінтэзу сістэм кіравання БЛА, які забяспечвае павышэнне эфектыўнасці іх прымянення.

## РЕЗЮМЕ

Бумай Андрей Юрьевич

### **Формирование оптимальной траектории и синтез алгоритмов управления беспилотным летательным аппаратом при облете запретной зоны**

**Ключевые слова:** оптимальная траектория, бесполетная запретная зона, система управления, автопилот, комплексирование, фильтрация, эффективность

**Цель работы:** разработка методик и алгоритмов формирования траектории и синтеза элементов управления БЛА, а также оценки его эффективности при облете бесполетных запретных зон.

**Методы исследования и использованная аппаратура:** классические и современные методы анализа и синтеза СУ по заданному критерию, методы оценки состояния стохастических систем, методы теории системного анализа.

**Полученные результаты и их новизна:** разработаны методики и алгоритмы построения оптимальных параметров траектории пролета БЛА через заданные точки пространства при облете запретных зон. Представлена методика поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА на начальных этапах разработки траектории полета, учитывающая стохастическую постановку задачи и позволяющая на этапе предварительного проектирования обеспечить выполнение заданных требований к обеспечению устойчивости и динамической точности управления БЛА. Предложена общая методика фильтрации навигационных параметров БЛА на основе классического фильтра Калмана – Бьюси, позволяющая обеспечить эффективную работу системы управления БЛА в условиях наличия неопределенностей в выходной информации датчиков и при наличии случайных изменений режимов работы подсистем БЛА. Приведена методика, позволяющая приближенно решать ряд практических задач вероятностного анализа попадания БЛА в различные области пространства, в частности, границы зоны, запретной для полетов.

**Рекомендации по использованию:** разработанные методики и алгоритмы могут быть использованы в организациях, занимающихся вопросами анализа и синтеза САУ техническими объектами.

**Область применения:** полученная в диссертационной работе совокупность научных результатов является возможным направлением в области задач анализа и аналитического синтеза систем управления БЛА, обеспечивающим повышение эффективности их применения.

## SUMMARY

Bumai Andrei Yrevich

### **Formation of the optimal trajectory and synthesis of control algorithms for an unmanned aerial vehicle when flying around a restricted area**

**Keywords:** optimal trajectory, restricted area, control system, autopilot, complexing, filtering, efficiency

**Purpose of research:** development of methods and algorithms for forming the trajectory and synthesis of UAV control elements, as well as assessing its effectiveness when flying around no-fly restricted areas.

**Research methods and equipment used:** classical and modern methods of analysis and synthesis of control systems according to a given criterion, methods for assessing the state of stochastic systems, methods of the theory of system analysis.

**The results obtained and their novelty:** methods and algorithms have been developed for constructing optimal parameters for the flight path of a UAV through given points in space when flying over restricted areas. A method of step-by-step analytical synthesis of the UAV control law at the initial stages of flight trajectory development is presented, which takes into account the stochastic formulation of the problem and allows, at the preliminary design stage, to ensure the fulfillment of the specified requirements for ensuring the stability and dynamic accuracy of UAV control. A general method for filtering UAV navigation parameters based on the classical Kalman–Bucy filter is proposed, which allows for effective operation of the UAV control system in the presence of uncertainties in the output information of the sensors and in the presence of random changes in the operating modes of the UAV subsystems. A technique is presented that allows one to approximately solve a number of practical problems of probabilistic analysis of an UAV hitting various areas of space, in particular, the boundaries of a no-fly zone.

**Recommendation for using:** the developed methods and algorithms can be used in organizations involved in the analysis and synthesis of automatic control systems for technical objects.

**Scope:** the summation of scientific results is a possible direction in problems of analysis and analytical synthesis of control systems UAV, providing increased efficiency of their application.



*Научное издание*

**Бумай Андрей Юрьевич**

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ И СИНТЕЗ  
АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ  
АППАРАТОМ ПРИ ОБЛЕТЕ ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЫ**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук  
по специальности 05.13.01 – системный анализ,  
управление и обработка информации (промышленность)**

Подписано в печать 07.09.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Опечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,56. Уч. изд. л. 1,1. Тираж 60. Заказ 17.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск