Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретные синусоиды

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Синусоида

Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Синусоида

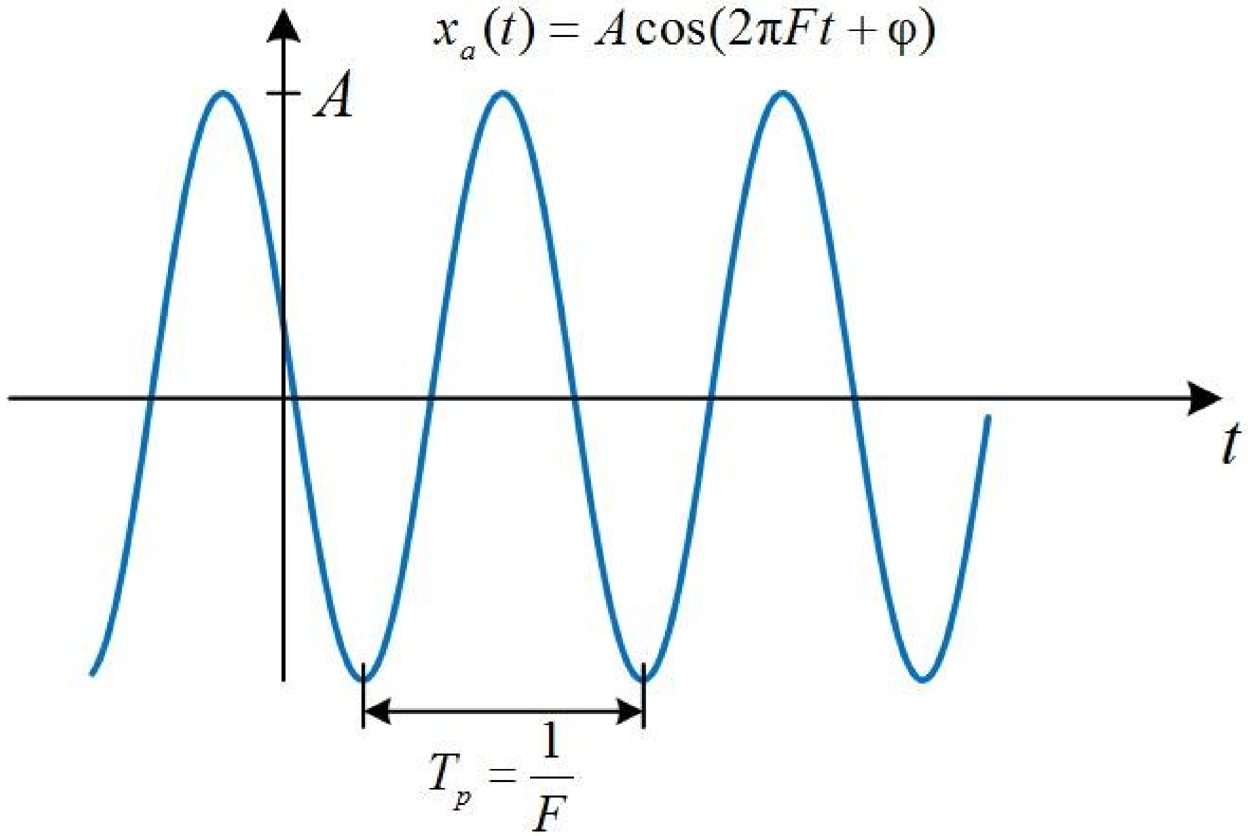
Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Используя $\Omega = 2\pi F$, можно переписать предыдущее выражение

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$



Синусоида

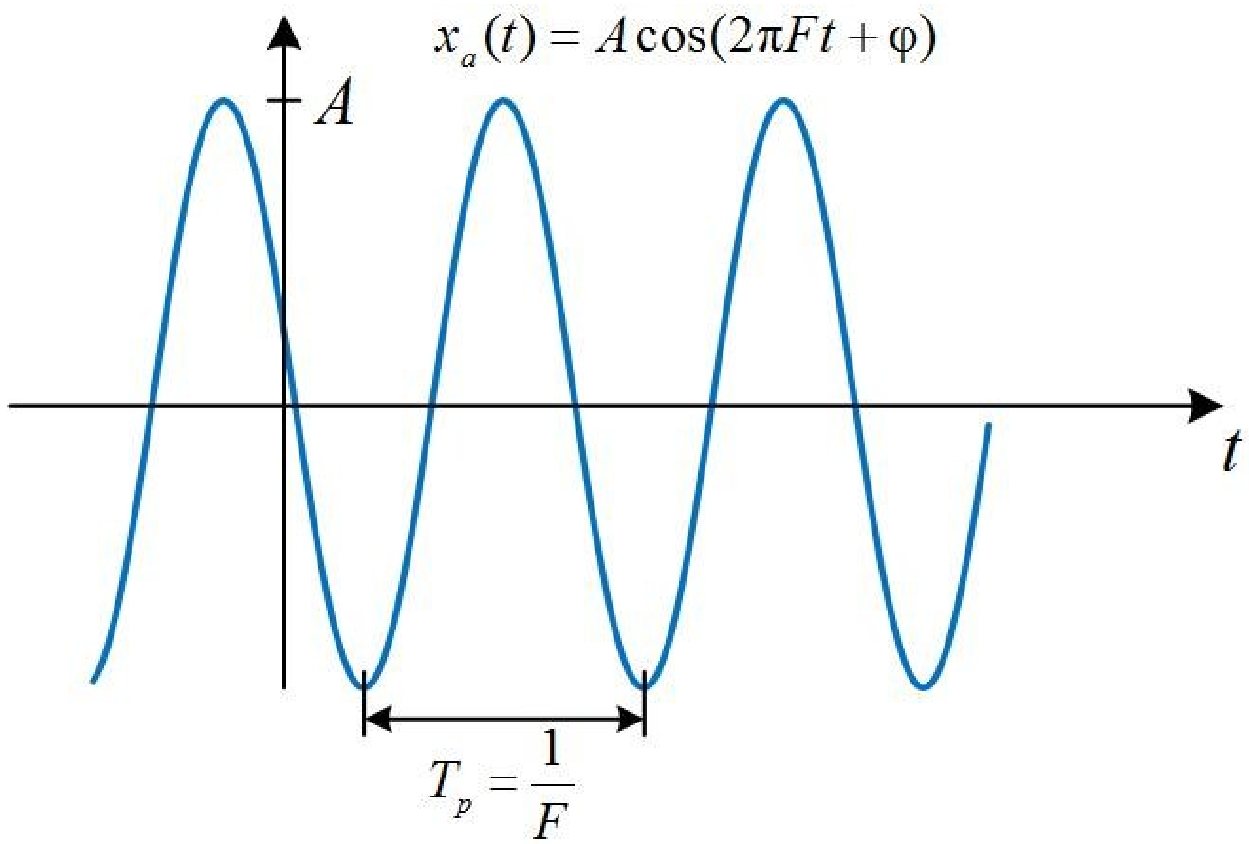
Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Используя $\Omega = 2\pi F$, можно переписать предыдущее выражение

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$



Свойство периодичности

Синусоида всегда периодична

$$x_a(t) = x_a(t + T_0).$$

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi FnT + \varphi) = A\cos\left(2\pi \frac{F}{f_s} n + \varphi\right).$$

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi F n T + \varphi) = A\cos\left(2\pi\frac{F}{f_s}n + \varphi\right). \quad (1)$$

Запись дискретной синусоиды через круговую частоту:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad \omega = 2\pi\frac{F}{f_s}. \quad (2)$$

- ✓ Между аналоговой частотой Ω и нормированной частотой ω есть разница: частота Ω измеряется в ***рад/сек***, а ω в ***рад/отсчет***.
- ✓ Величина n в отличие от времени t являются безразмерной и принимает только целые значения.

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

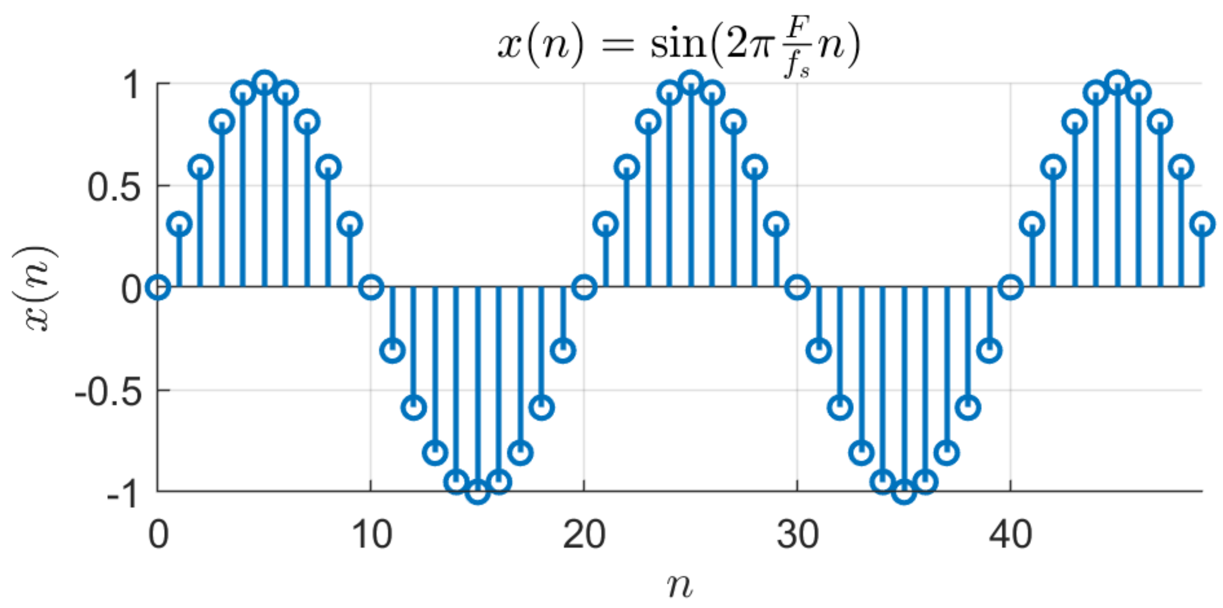
$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi F n T + \varphi) = A\cos\left(2\pi \frac{F}{f_s} n + \varphi\right). \qquad (1)$$

Запись дискретной синусоиды через круговую частоту:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad \omega = 2\pi \frac{F}{f_s}. \qquad (2)$$

Пример на MATLAB

```
fs = 100; % Гц
F = 5; % Гц
n = 0:50-1;
x = sin(2*pi*(F/fs)*n);
stem(n, x);
```



Понятие частоты для дискретных сигналов (2)

Тот факт, что переменная n принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $(\omega + 2\pi)$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n). \qquad (3)$$

!!! *для дискретной синусоиды частоты* ω *и* $\omega + 2\pi$ *неразличимы*.

Понятие частоты для дискретных сигналов (3)

Тот факт, что переменная n принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $(\omega + 2\pi)$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n). \qquad (4)$$

!!! *для дискретной синусоиды частоты* ω *и* $\omega + 2\pi$ *неразличимы*.

Цифровая частота

При рассмотрении дискретных синусоид необходимо ограничится интервалом частот величиной 2π. Обычно берут либо положительные частоты в интервале $\omega \in [0,\ 2\pi]$, либо – симметричный интервал $\omega \in [-\pi,\ \pi]$.

Синусоидальная последовательность

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos(\omega n + \varphi), \tag{5}$$

где A – амплитуда, f – частота, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.

Дискретная синусоида всегда является периодическим сигналом?

Синусоидальная последовательность

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos(\omega n + \varphi), \tag{5}$$

где A – амплитуда, f – частота, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.

Дискретная синусоида всегда является периодическим сигналом?

Применим условие периодичности $x(n) = x(n + N_0)$ к (5):

$$\cos(2\pi f n) = \cos\big(2\pi f (n + N_0)\big) = \cos(2\pi f n + 2\pi f N_0). \tag{6}$$

Равенство (6) возможно только если $f N_0 = m \in \mathbb{Z}$.

Т.е. ***дискретная синусоида является периодической, если***

$$f = \frac{m}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi \frac{m}{N_0}, \qquad m, N_0 \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Из (7) следует, что за исключением случая, когда $m = 1$, частота дискретной синусоиды $f = m/N_0$ не равна частоте соответствующей непрерывной синусоиды F.

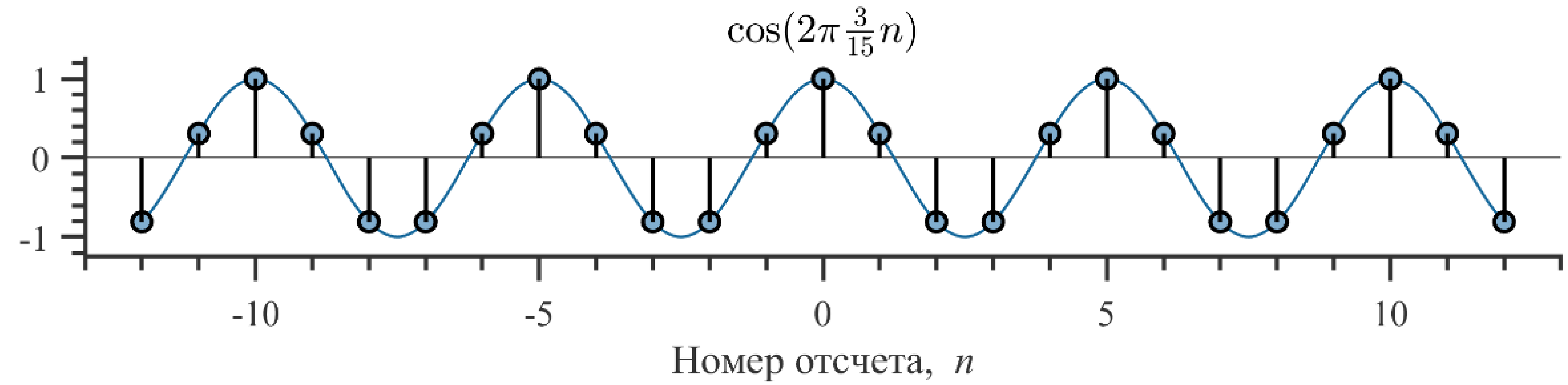
Примеры дискретных синусоид (1)

Пример 1. Постройте графики дискретной синусоиды $\cos(2\pi f n)$ для:
а) $f = 3/15$, б) $f = \frac{1}{1{,}7\pi}$, в) $f = \frac{1}{5{,}5}$.

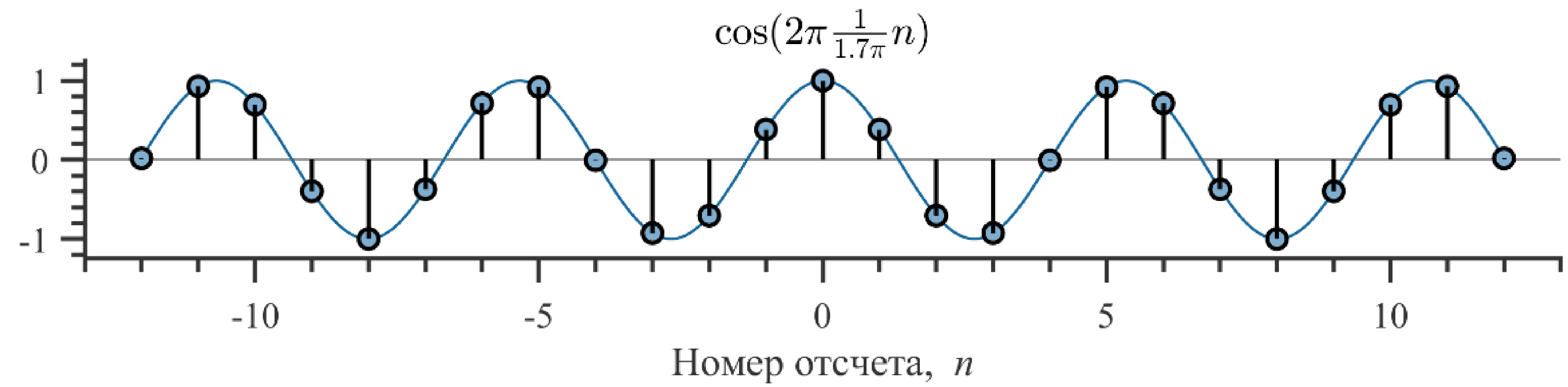
В каждом случае определите является ли сигнал периодическим. В случае, если это верно, определите основной период N_0 и определите является ли *основная частота* сигнала равной частоте синусоиды f.

Примеры дискретных синусоид (2)

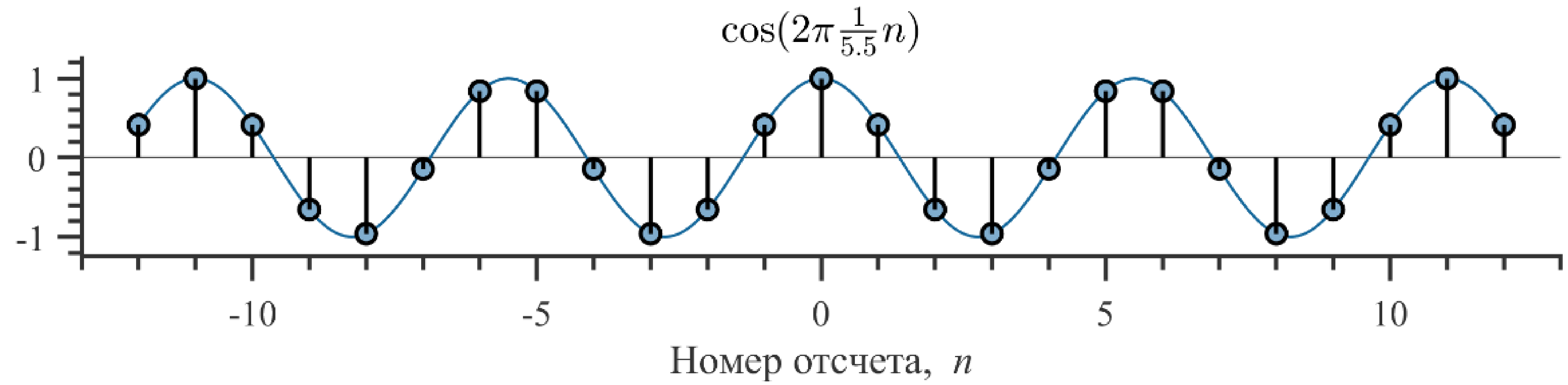
а)



б)



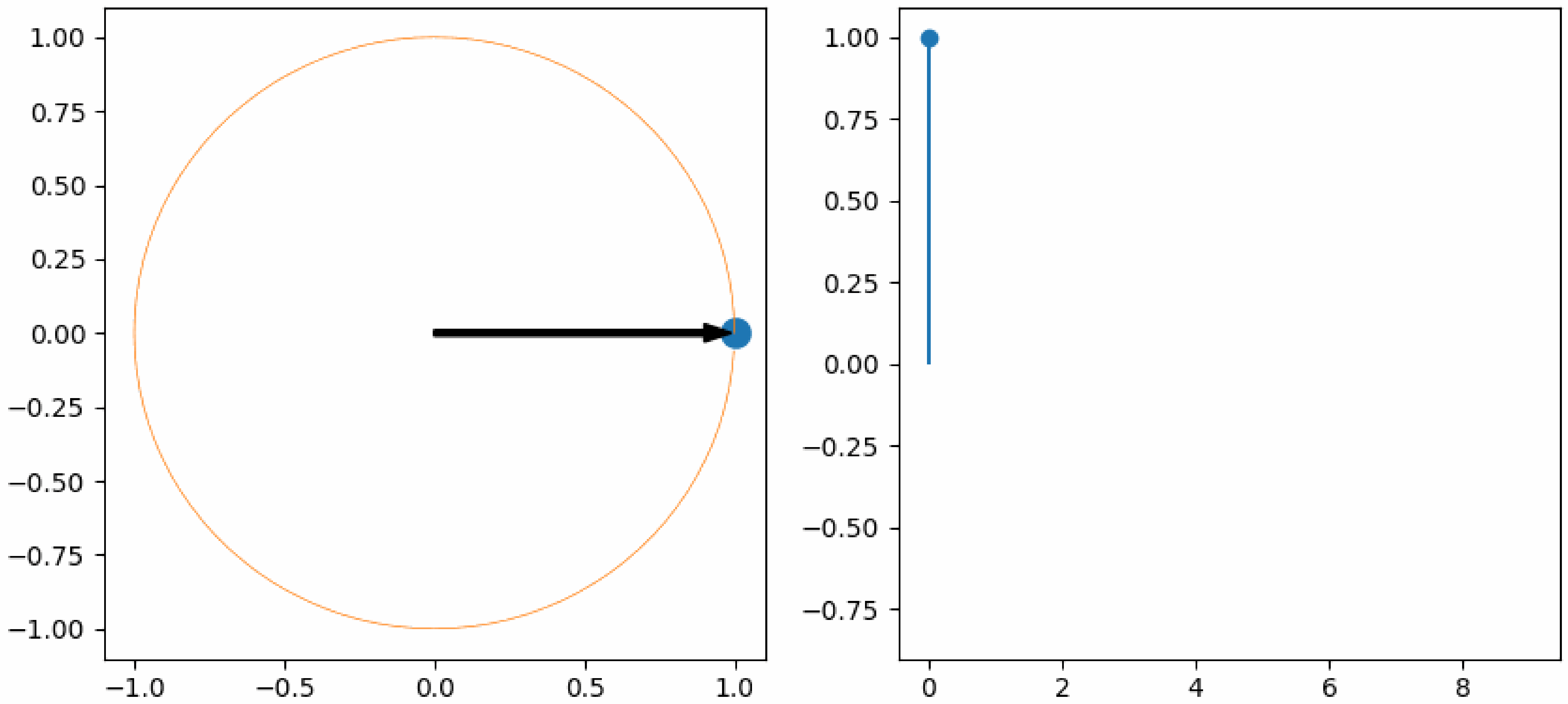
в)



Дискретные синусоиды из примера

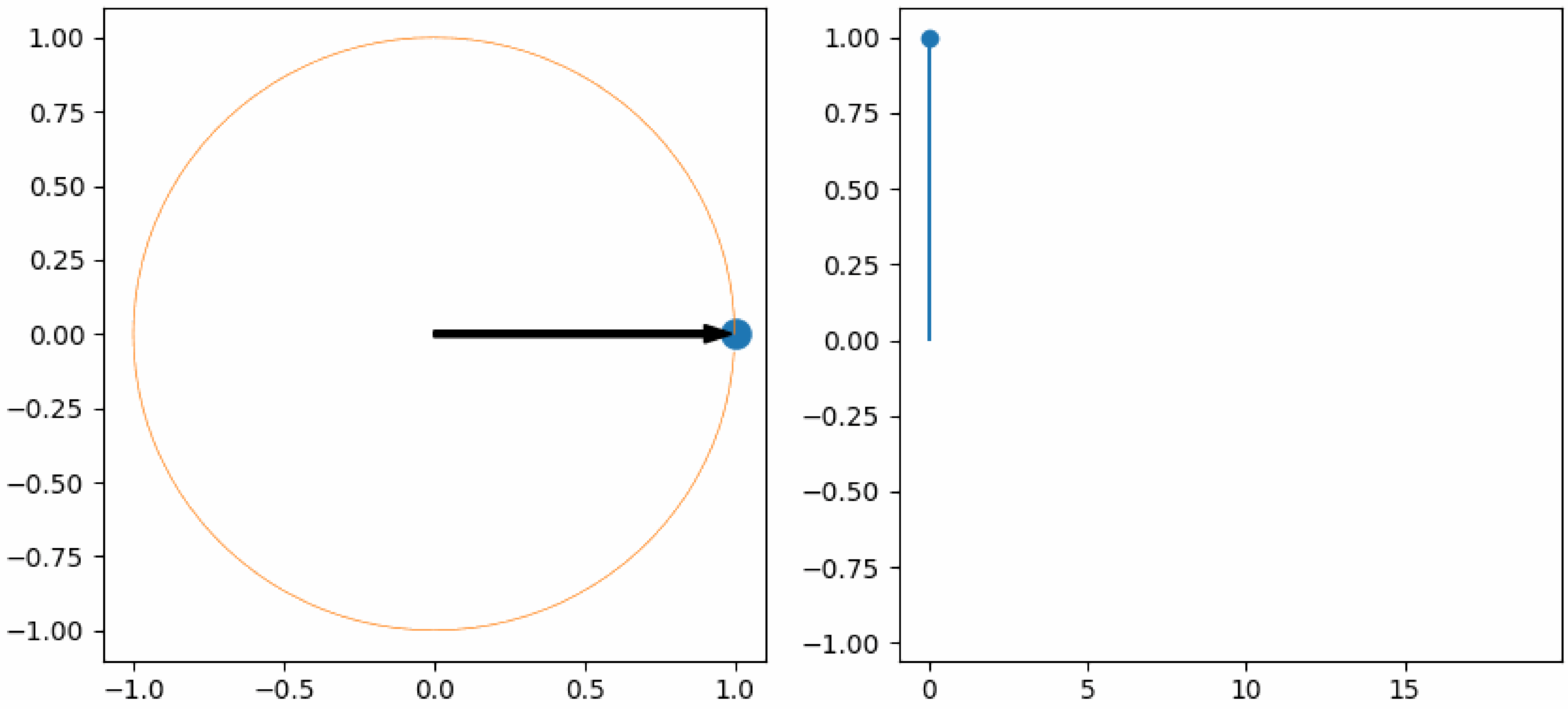
Дискретная синусоида

Дискретной синусоида $\cos(2\pi f n)$ для $f = 1/5$



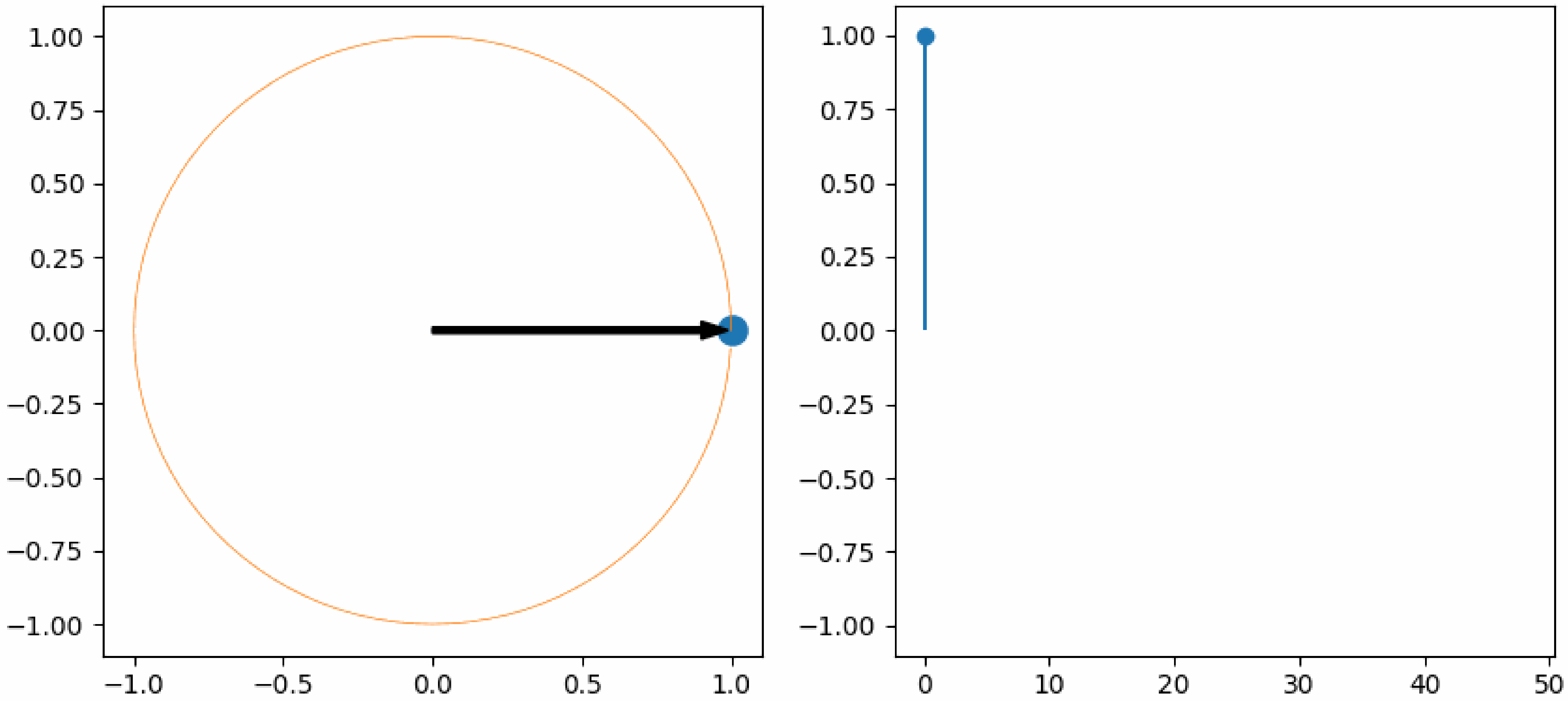
Дискретная синусоида

Дискретной синусоида $\cos(2\pi f n)$ для $f = 1/5{,}5$



Дискретная синусоида

Дискретной синусоида $\cos(2\pi f n)$ для $f = \dfrac{1}{1{,}7\pi}$



Применение дискретных синусоид: DTMF

DTMF сигналы или тоны передаются при нажатии кнопок на номеронабирателе и используются, как правило, для [до]набора внутреннего номера абонента офисной АТС или для навигации по голосовому меню (IVR).

		Частота столбца, Гц			
		1209	*1338*	*1477*	*1633*
Частота строки, Гц	*697*	**1**	**2**	**3**	**A**
	770	**4**	**5**	**6**	**B**
	852	**7**	**8**	**9**	**C**
	941	*****	**0**	**#**	**D**

Например, символ «3» будет формироваться, как сумма двух синусоид, одна с частотой 697 Гц, а вторая – 1477 Гц.

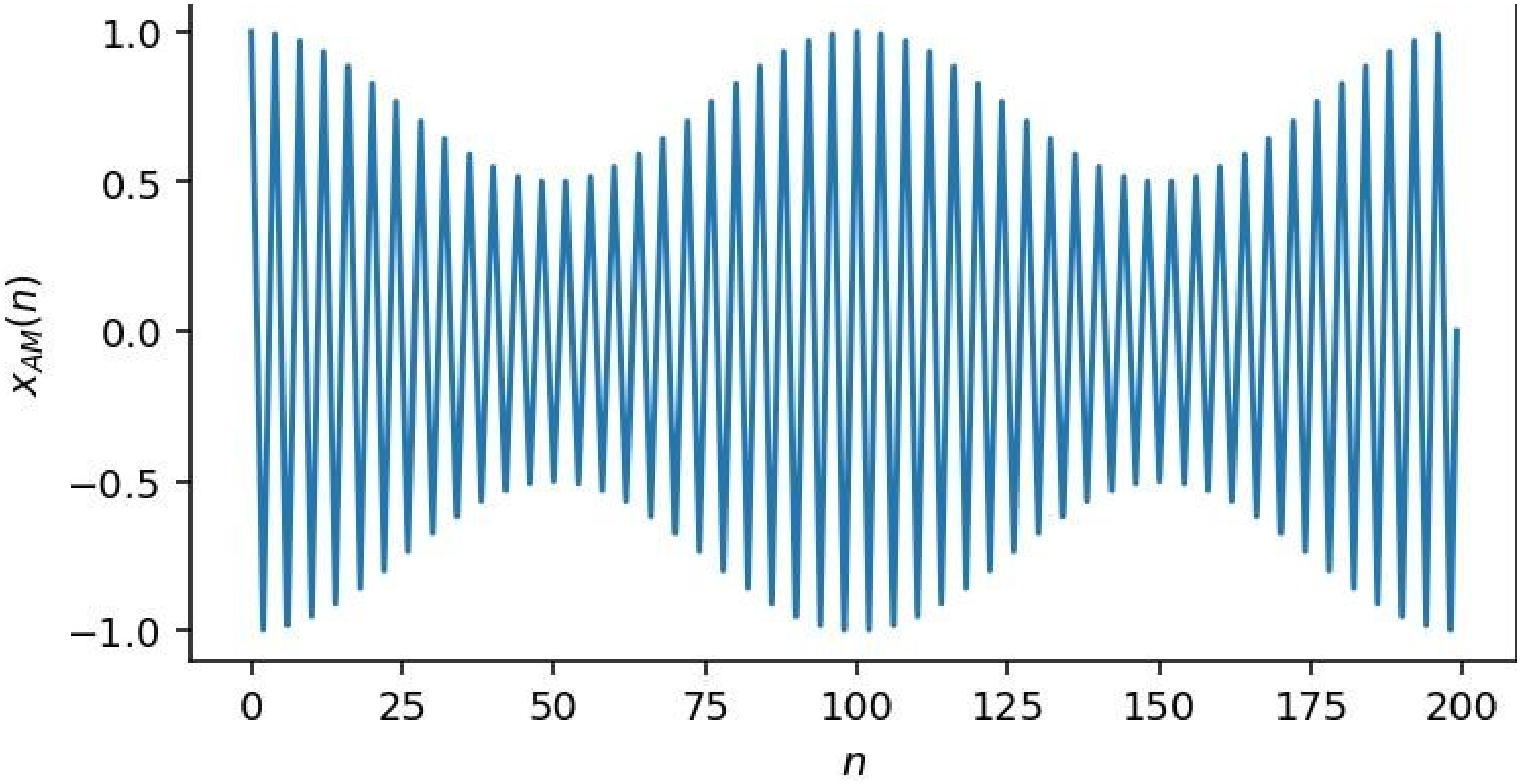
Амплитудная модуляция

Модуляция – процесс преобразования информационного сигнала в синусоидальный сигнал.

Амплитудная модуляция описывается выражением:

$$x_{AM}(n) = \cos(2\pi f_0 n) \cdot (A_0 + A_m \cos(2\pi f_{am} n)),$$

где f_0 – частота несущей, f_{am} – частота модуляции, $m = A_m / A_0$ – глубина модуляции.

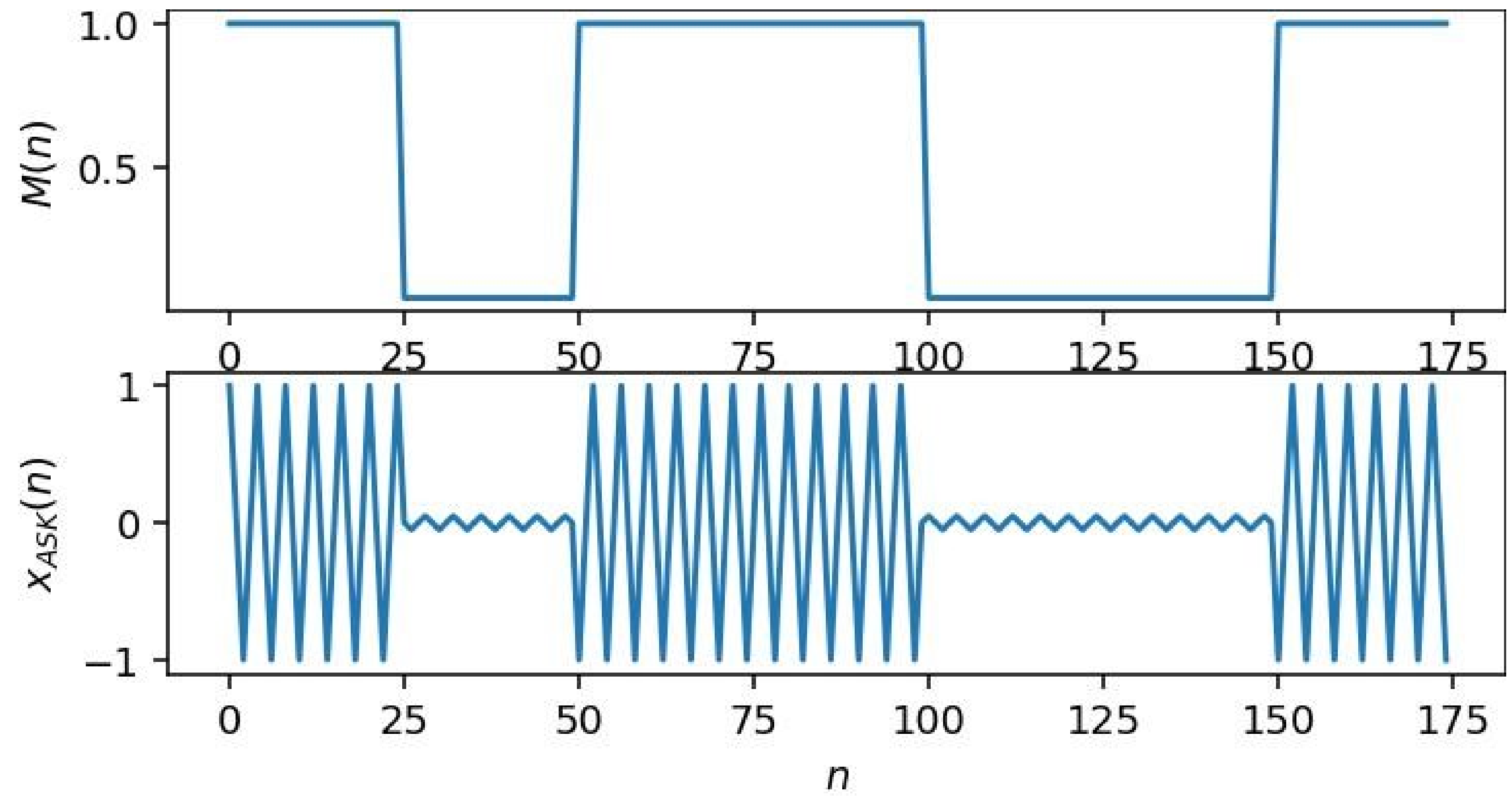


Амплитудная манипуляция

Амплитудно-манипулированный сигнал (*amplitude shift keying – ASK*), описывается выражением

$$x_{ASK}(n) = \cos(2\pi f_0 n) \cdot M(n),$$

где $M(n)$ – последовательность, которая в простейшем случае принимает два дискретных значения (1 и 0).



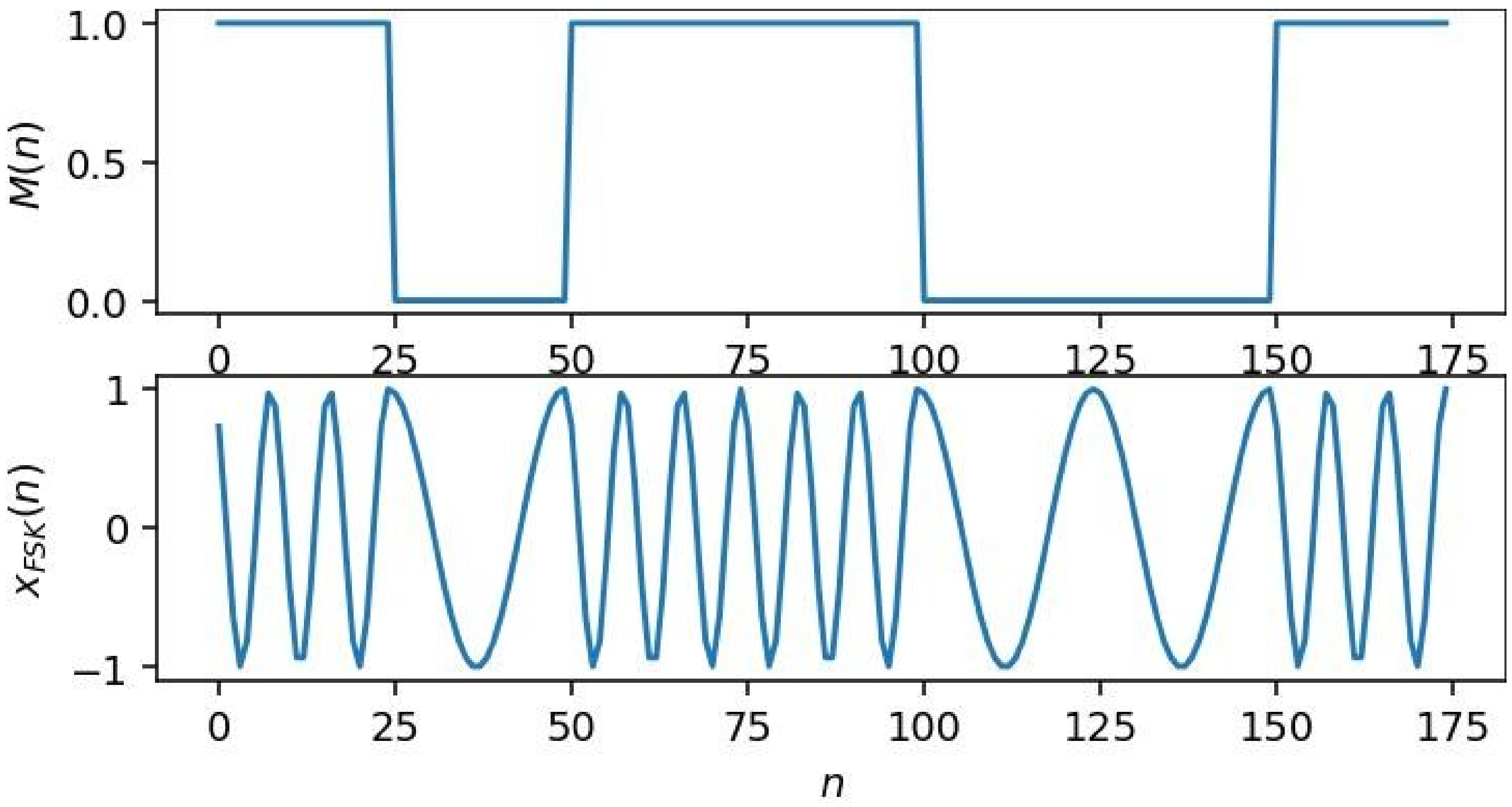
Передача сигналов в двухуровневой модуляции ASK – одна из первых форм цифровой модуляции для беспроводной телеграфии.

Частотная манипуляция

Частотно-манипулированный сигнал (*frequency shift keying – FSK*), описывается выражением

$$x_{FSK}(n) = A \cdot \cos(2\pi f_i n + \varphi),$$

Частота f_i – может принимать M дискретных значений, а фаза φ является произвольной константой.



Пример показывает частотной манипуляции без разрыва фазы.