Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретные сигналы

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Комплексные числа: основные сведения

Комплексные числа нужны для решения уравнения

$$x^2 + 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = \pm\sqrt{-1}\,.$$

Определение: $j = \sqrt{-1}$.

Комплексные числа: основные сведения

Комплексные числа нужны для решения уравнения

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}\,.$$

Определение: $j = \sqrt{-1}$.

Алгебраическая запись комплексного числа $z \in \mathbb{C}$

$$z = x + jy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{Re}\{z\} = x$ – оператор получения действительной части комплексного числа.

$\mathrm{Im}\{z\} = y$ – оператор получения мнимой части комплексного числа.

Комплексные числа: основные сведения

Комплексные числа нужны для решения уравнения

$$x^2 + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \pm\sqrt{-1}\,.$$

Определение: $j = \sqrt{-1}$.

Алгебраическая запись комплексного числа $z \in \mathbb{C}$

$$z = x + jy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{Re}\{z\} = x$ – оператор получения действительной части комплексного числа.

$\mathrm{Im}\{z\} = y$ – оператор получения мнимой части комплексного числа.

Пример на MATLAB

```
>> z = 1 + 3*1j
z = 1.0000 + 3.0000i
>> x = real(z)
x = 1
>> y = imag(z)
y = 3
```

Комплексные числа: основные сведения

Комплексное сопряжение

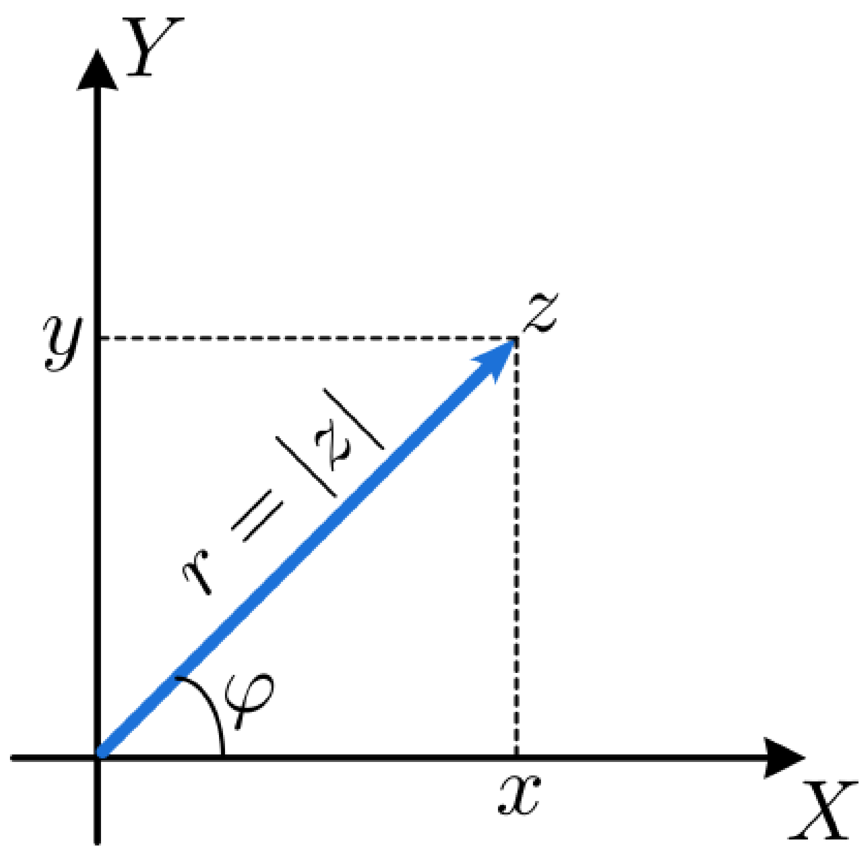
$z^* = x - jy$ называется ***комплексно сопряженным*** числу $z = x + jy$.

Полярные координаты

$$z = re^{j\varphi}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль компл. числа;

$\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа.



Комплексные числа: основные сведения

Комплексное сопряжение

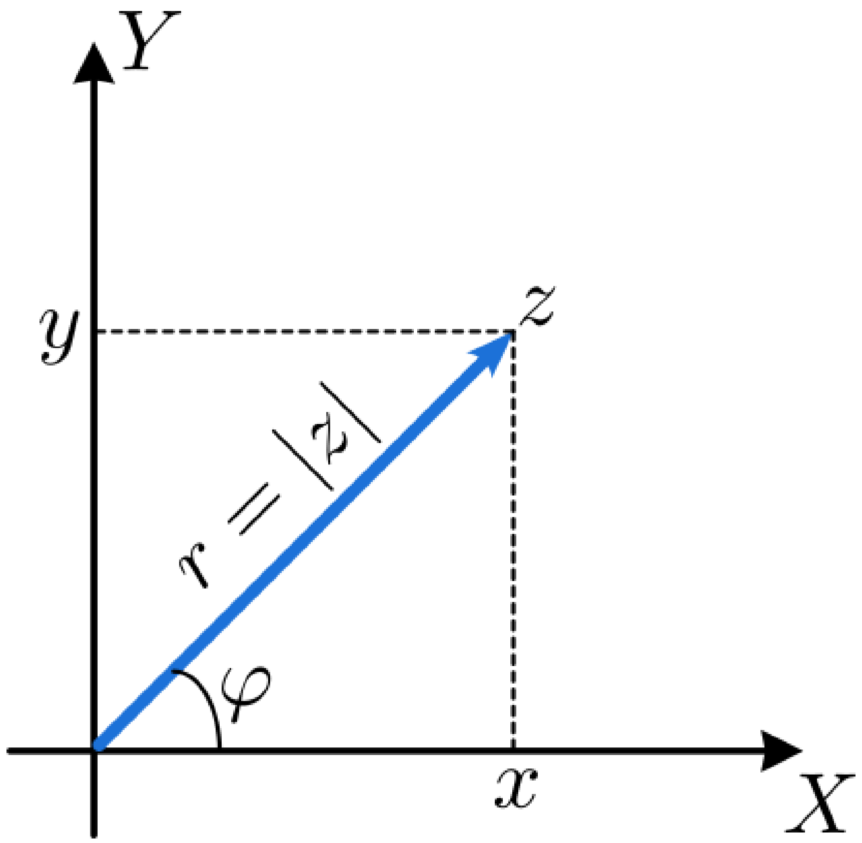
$z^* = x - jy$ называется ***комплексно сопряженным*** числу $z = x + jy$.

Полярные координаты

$$z = re^{j\varphi}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль компл. числа;

$\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа.



Произведение $z \cdot z^*$

$$z \cdot z^* = re^{j\varphi} \cdot re^{-j\varphi} =$$
$$= r^2 = |z|^2 =$$
$$= x^2 + y^2$$

Комплексные числа: основные сведения

Комплексное сопряжение

$z^* = x - jy$ называется ***комплексно сопряженным*** числу $z = x + jy$.

Полярные координаты

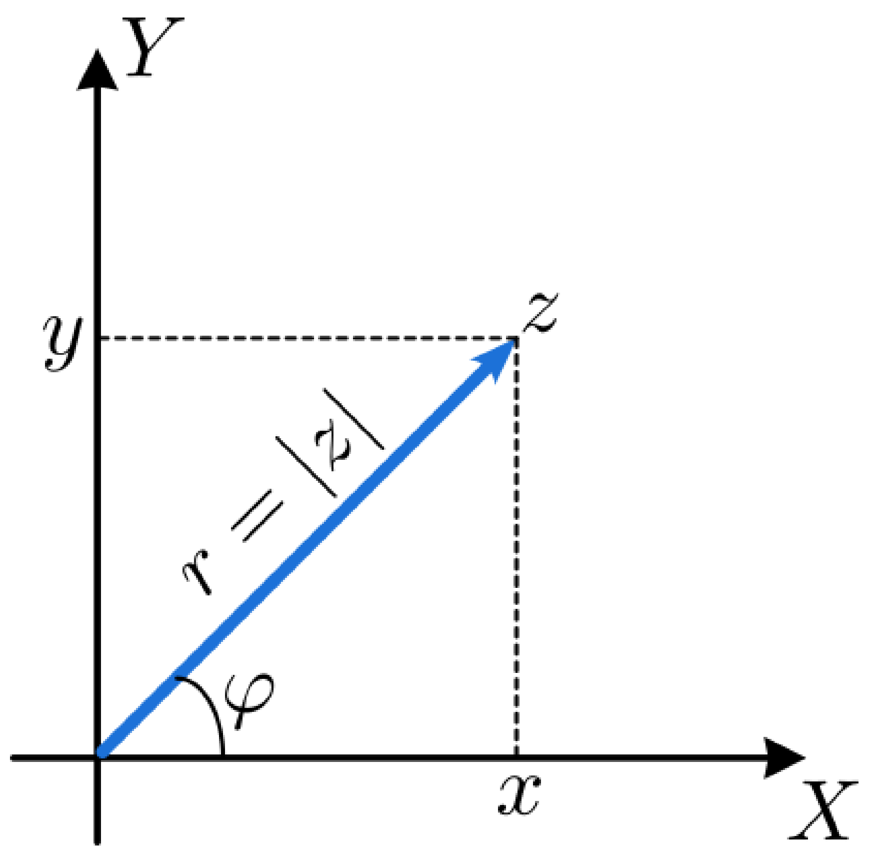
$$z = re^{j\varphi}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль компл. числа;

$\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа.

Произведение $z \cdot z^*$

$$z \cdot z^* = re^{j\varphi} \cdot re^{-j\varphi} = r^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$$



Пример на MATLAB

```
>> z = 2 + 3*1j

>> r = abs(z) % модуль комп. числа
r = 3.1623

>> phi = angle(z) % аргумент комп. числа
phi = 1.2490
```

Действия над комплексными числами

Пусть даны $z_1 = x_1 + jy_1$ и $z_2 = x_2 + jy_2$

Сумма

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Произведение

$$z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Деление ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Формула Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Структура системы на основе ЦОС

Чаще всего цифровые системы обрабатывают сигналы, поступающие из реального мира.

$$x(n) = x(t)|_{t=nT}.$$

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

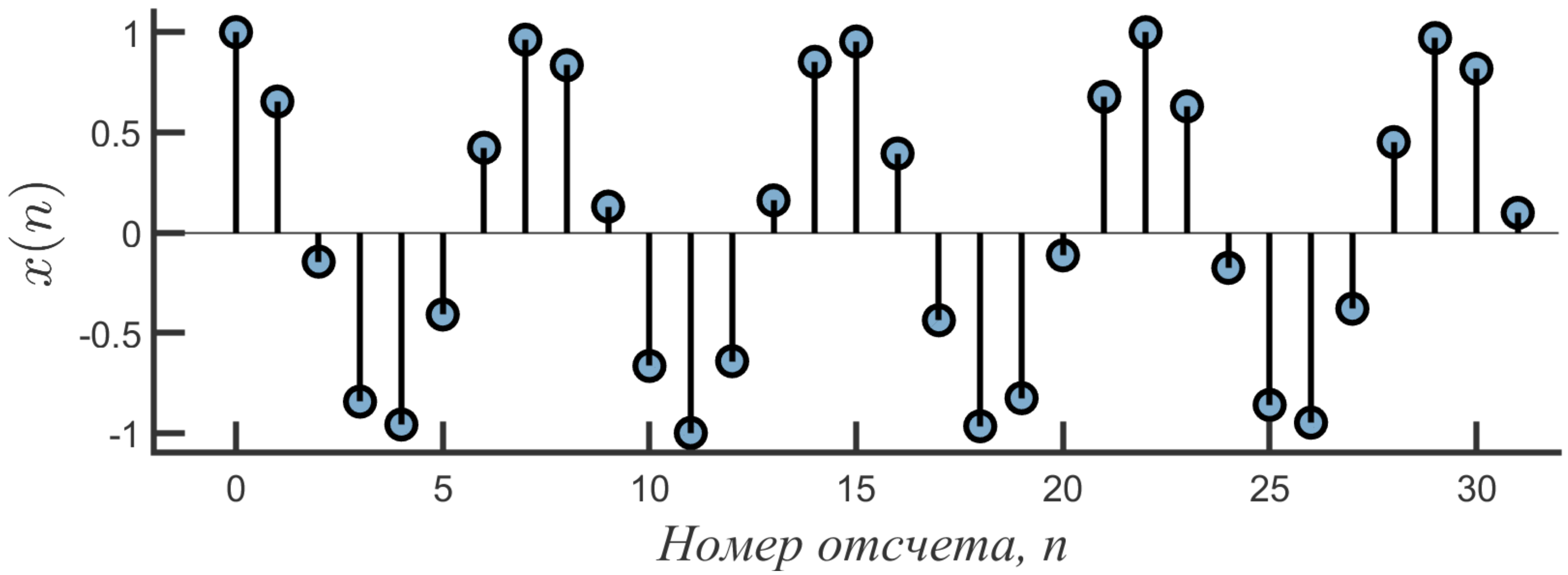
ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь.

Предмет дисциплины ЦОС

1) Дискретные сигналы;
2) Дискретные системы.

Определение дискретного сигнала

Дискретный сигнал – это функция целочисленного аргумента $n \in \mathbb{Z}$. Сигнал <u>*не определен*</u> в нецелые моменты времени n.



Пример дискретного сигнала

Иногда $x(n)$ записывают в виде вектора: $\mathbf{x} = [x(0)\ x(1) \ldots x(N-1)]^T$.

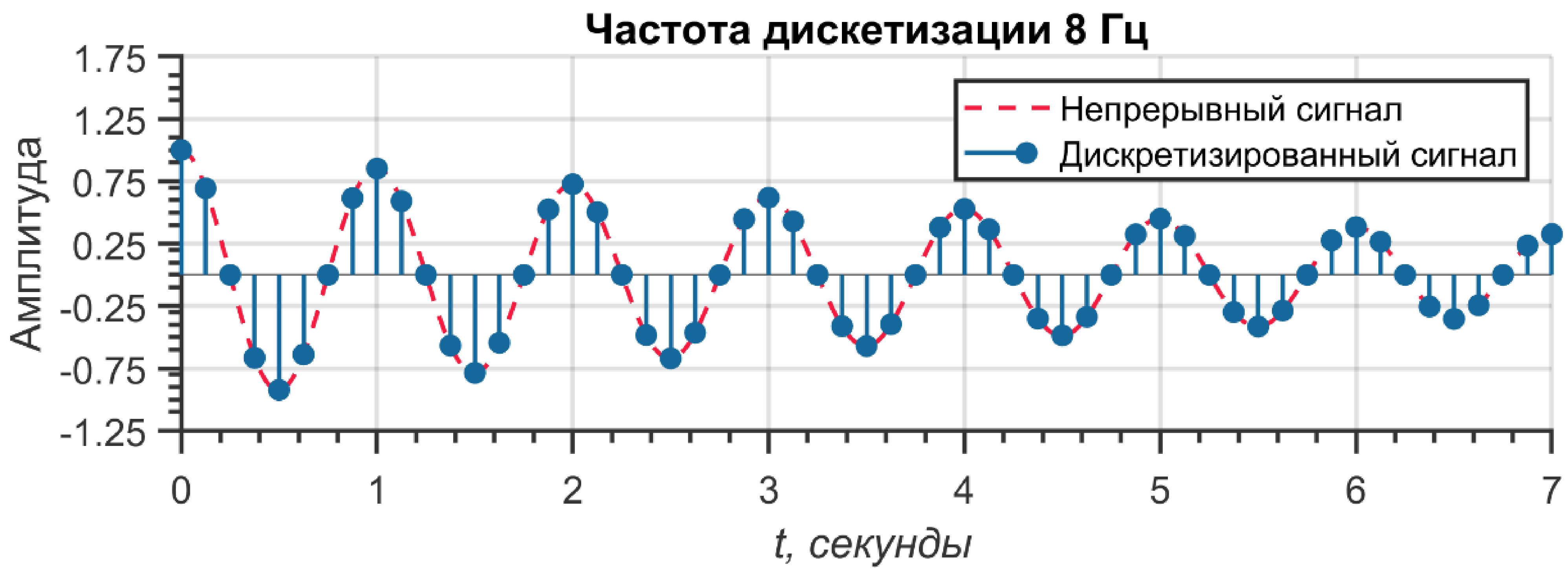
Дискретизация сигнала

Дискретные сигналы часто возникают при дискретизации аналоговых сигналов.

Сигнал $x_a(t)$, который дискредитируется с частотой $f_s = 1/T$ (шаг дискретизации T) отсчетов в секунду производит сигнал $x(n)$:

$$x(n) = x_a(nT)$$

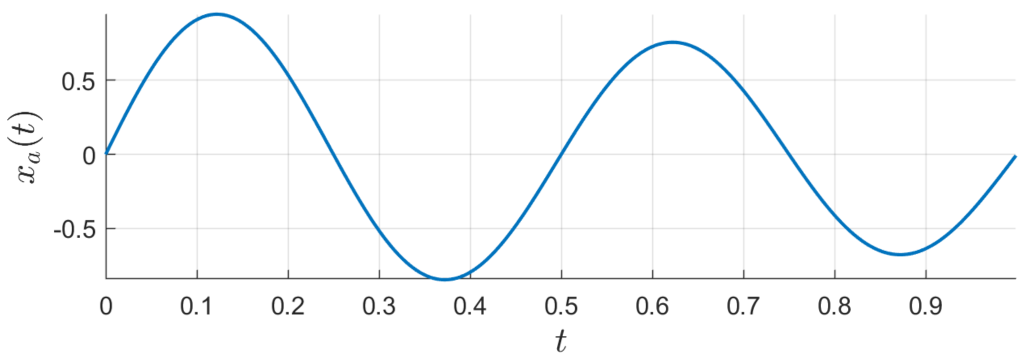
nT – ***дискретное время***, а n – ***дискретное нормированное время***.



Классификация сигналов

1) **Аналоговый сигнал** (непрерывная амплитуда и время)

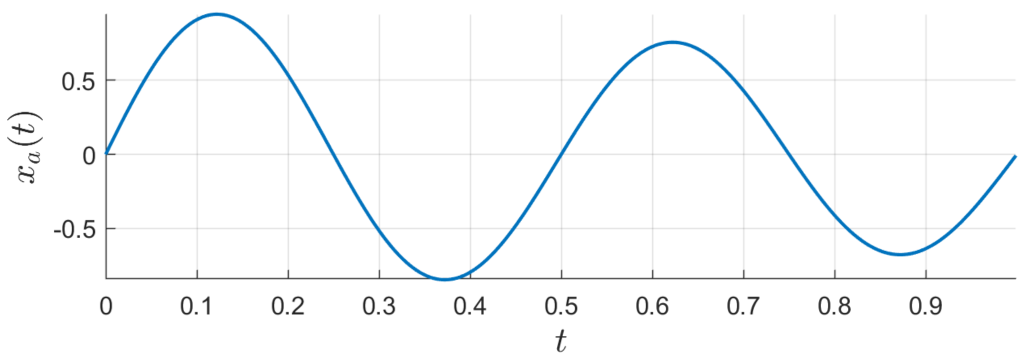
$x_a(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.



Классификация сигналов

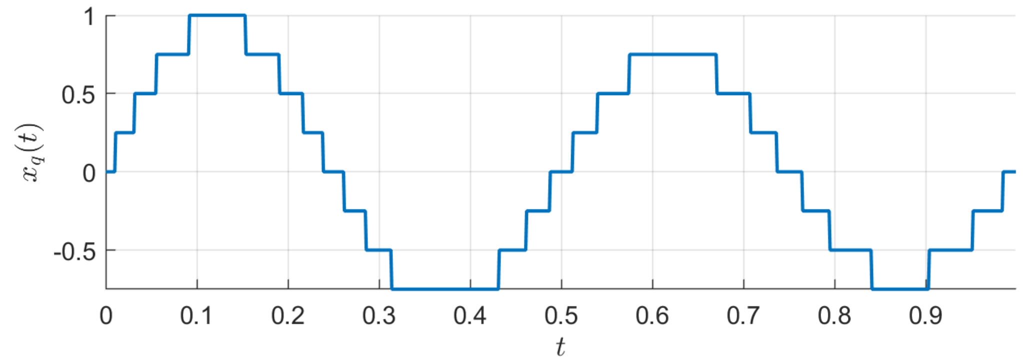
1) **Аналоговый сигнал** (непрерывная амплитуда и время)

$x_a(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.



2) **Квантованный сигнал** (дискретная амплитуда, непрерывное время)

$x_к(t) \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$.



Классификация сигналов

1) **Аналоговый сигнал** (непрерывная амплитуда и время)

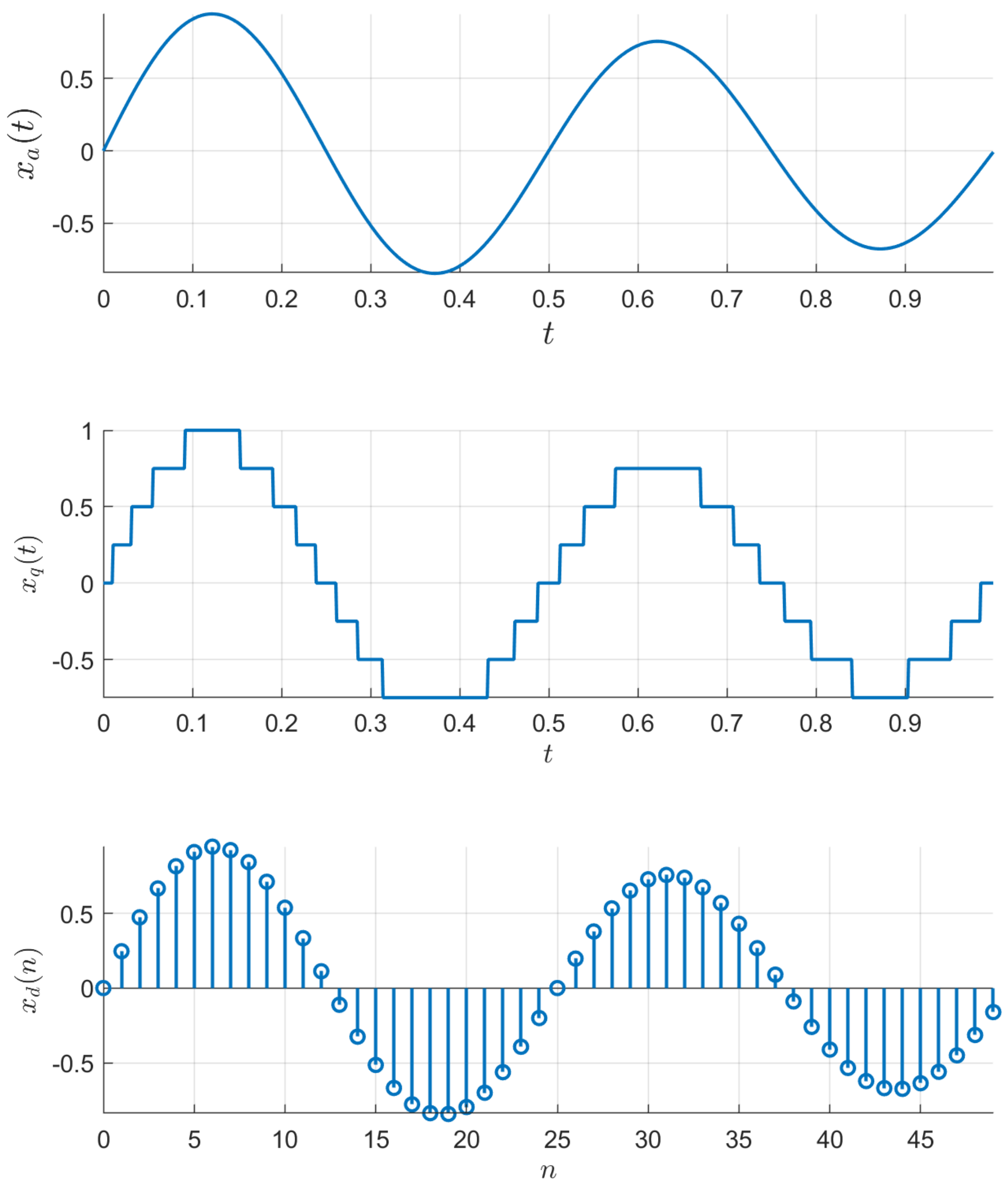
$x_a(t) \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R}.$

2) **Квантованный сигнал** (дискретная амплитуда, непрерывное время)

$x_{\text{к}}(t) \in \mathbb{Z}\,,\, t \in \mathbb{R}.$

3) **Дискретный сигнал** (непрерывная амплитуда, дискретное время)

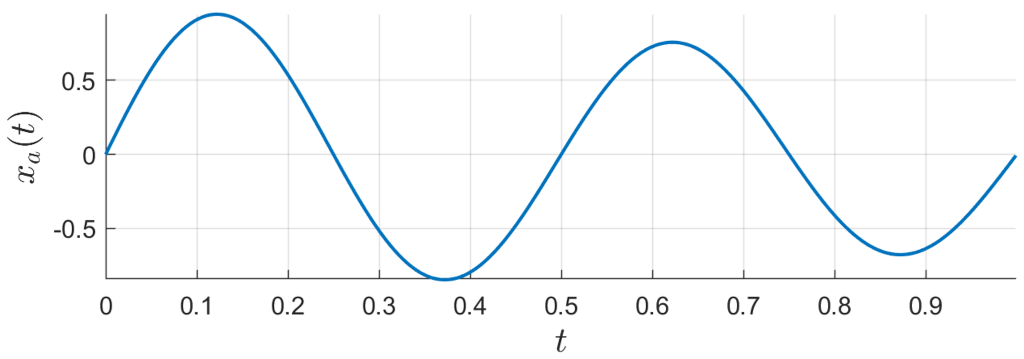
$x_{\text{д}}(n) \in \mathbb{R}\,,\, n \in \mathbb{Z}.$



Классификация сигналов

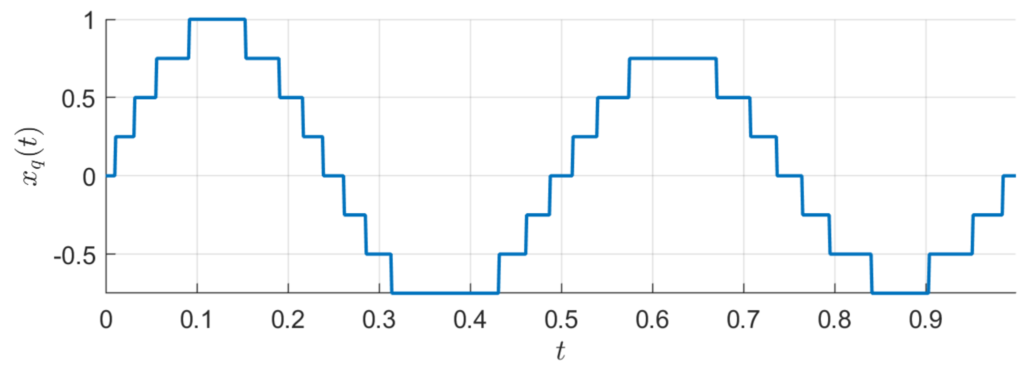
1) **Аналоговый сигнал** (непрерывная амплитуда и время)

$x_a(t) \in \mathbb{R}\,, t \in \mathbb{R}.$



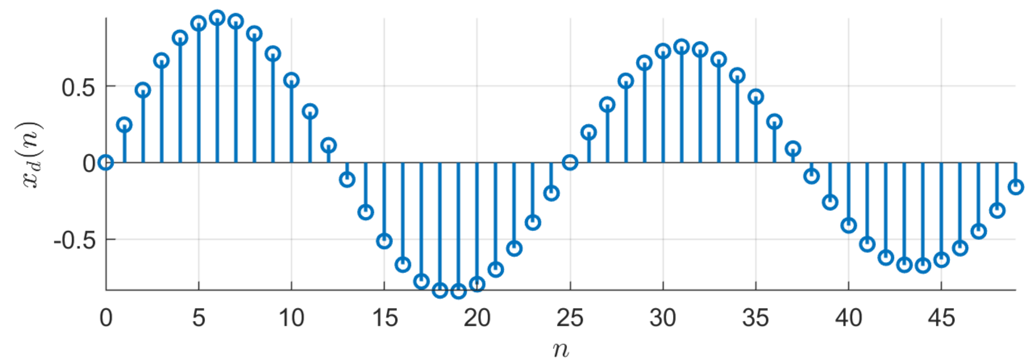
2) **Квантованный сигнал** (дискретная амплитуда, непрерывное время)

$x_к(t) \in \mathbb{Z}\,, t \in \mathbb{R}.$



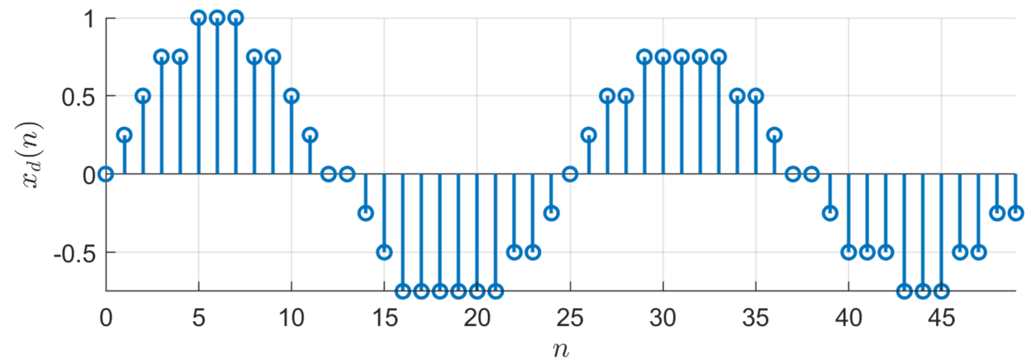
3) **Дискретный сигнал** (непрерывная амплитуда, дискретное время)

$x_д(n) \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{Z}.$



4) **Цифровой сигнал** (дискретная амплитуда, дискретное время)

$x_ц(n) \in \mathbb{Z}\,, n \in \mathbb{Z}.$



Типы дискретных сигналов

Апериодические сигналы

$x(n)$ – произвольная комплексная последователь бесконечной длины.

Типы дискретных сигналов

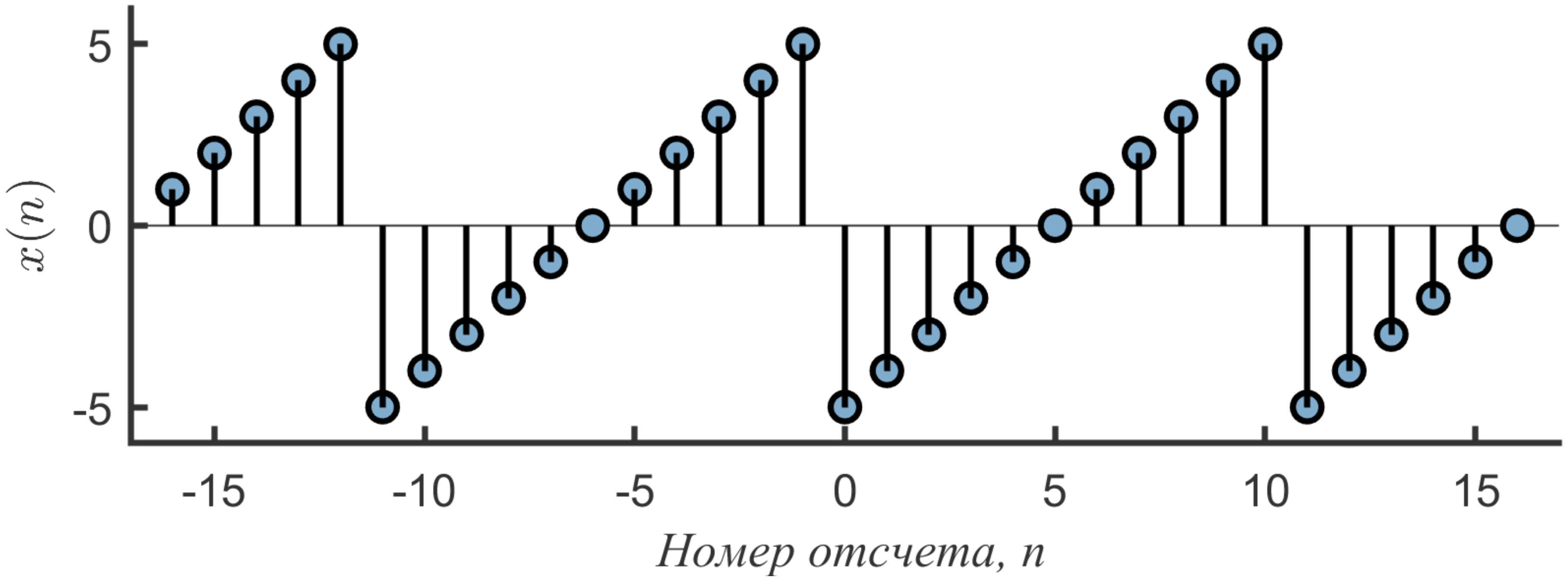
Апериодические сигналы

$x(n)$ – произвольная комплексная последователь бесконечной длины.

Периодические сигналы

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Знак тильда (~) указывает на наличие в сигнале периодичности.



Типы дискретных сигналов

Апериодические сигналы

$x(n)$ – произвольная комплексная последователь бесконечной длины.

Периодические сигналы

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Получение бесконечного сигнала из конечного

$$x(n),\ n = 0,1, \dots, N.$$

Допустим, что есть конечный набор отсчетов $x(n)$. Каким образом можно до-определить сигнал $x(n)$ для $n \in (-\infty, 0) \cup (N + 1, +\infty)$?

Типы дискретных сигналов

Апериодические сигналы

$x(n)$ – произвольная комплексная последователь бесконечной длины.

Периодические сигналы

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Получение бесконечного сигнала из конечного

$$x(n),\ n = 0,1, \dots, N.$$

Периодически продолженные сигналы

$$\tilde{x}(n) = x(n \mod N), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Типы дискретных сигналов

Апериодические сигналы

$x(n)$ – произвольная комплексная последователь бесконечной длины.

Периодические сигналы

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Получение бесконечного сигнала из конечного

$$x(n),\ n = 0,1,\dots,N.$$

Периодически продолженные сигналы

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Сигналы с компактным носителем

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n < N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(доопределение нулями – *zero expansion*)

Периодические сигналы

Сигнал $x(n)$ является ***периодическим*** если

$$x(n) = x(n+N), \qquad \forall n, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Основной период и основная частота

Основной период (*fundamental period*) – наименьшее значение N удовлетворяющее условию (*). Основной период обозначают через N_0.

Основная частота (*fundamental frequency*) периодического сигнала

$$f_0 = \frac{1}{N_0} \text{ или } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}.$$

f_0 – измеряется в единицах *период/отсчет*, а ω_0 – *радиан/отсчет*.

Определение периода сигнала

Пусть $x_1(n)$ – N_1-периодический сигнал,
$x_2(n)$ – N_2-периодический сигнал.
Их сумма

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \tag{1}$$

будет также периодической последовательностью с периодом:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{НОД}(N_1, N_2)}, \tag{2}$$

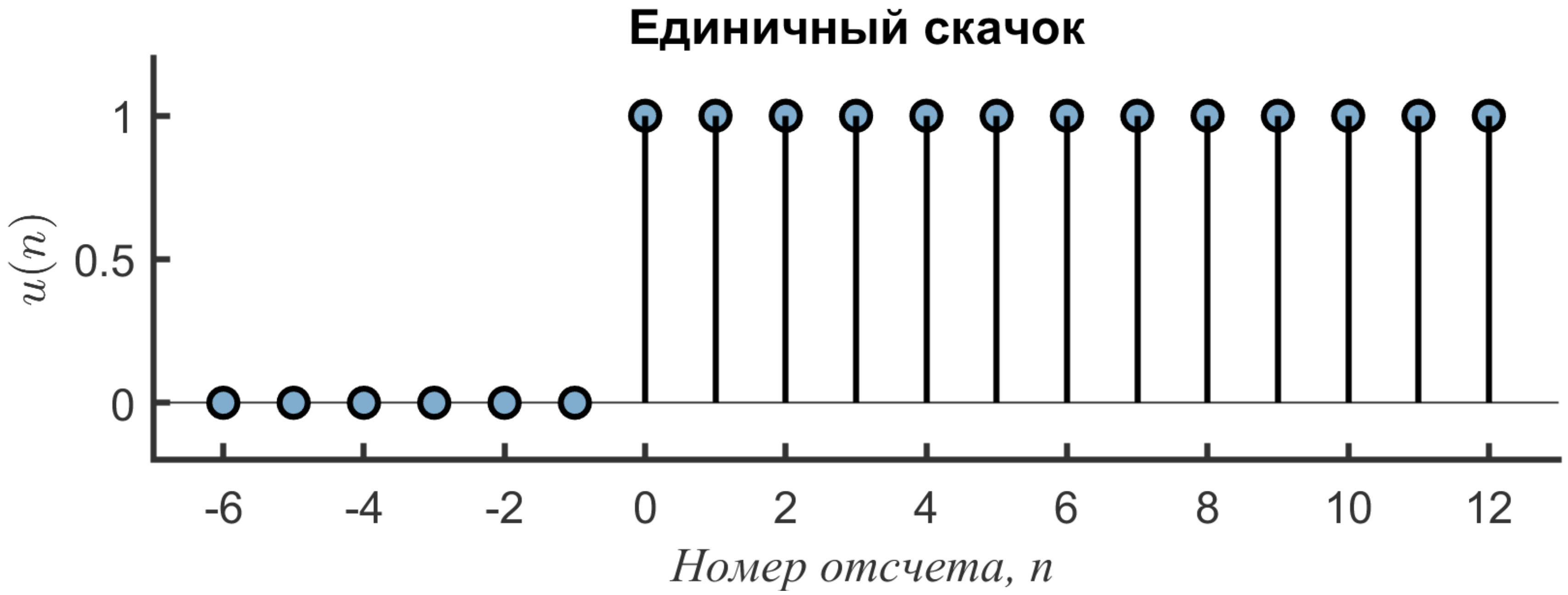
$\text{НОД}(N_1, N_2)$ – наибольший общий делитель N_1 и N_2.
Выражение (2) справедливо для произведения двух последовательностей:

$$x(n) = x_1(n) x_2(n). \tag{3}$$

Однако, *основной период* $x(n)$ может быть меньше N.

Единичный скачок

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

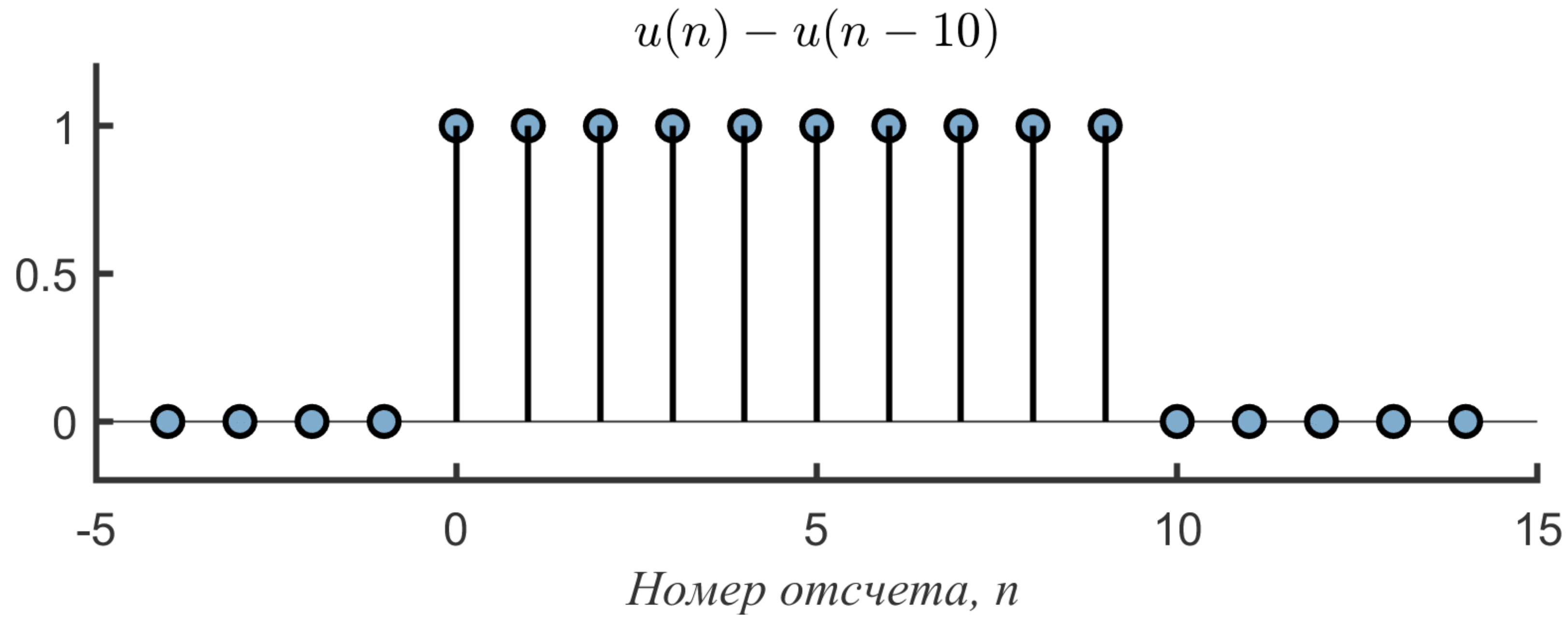


Комбинация единичного скачка и его сдвинутой версии позволяют выделить определенный временной интервал.

Например

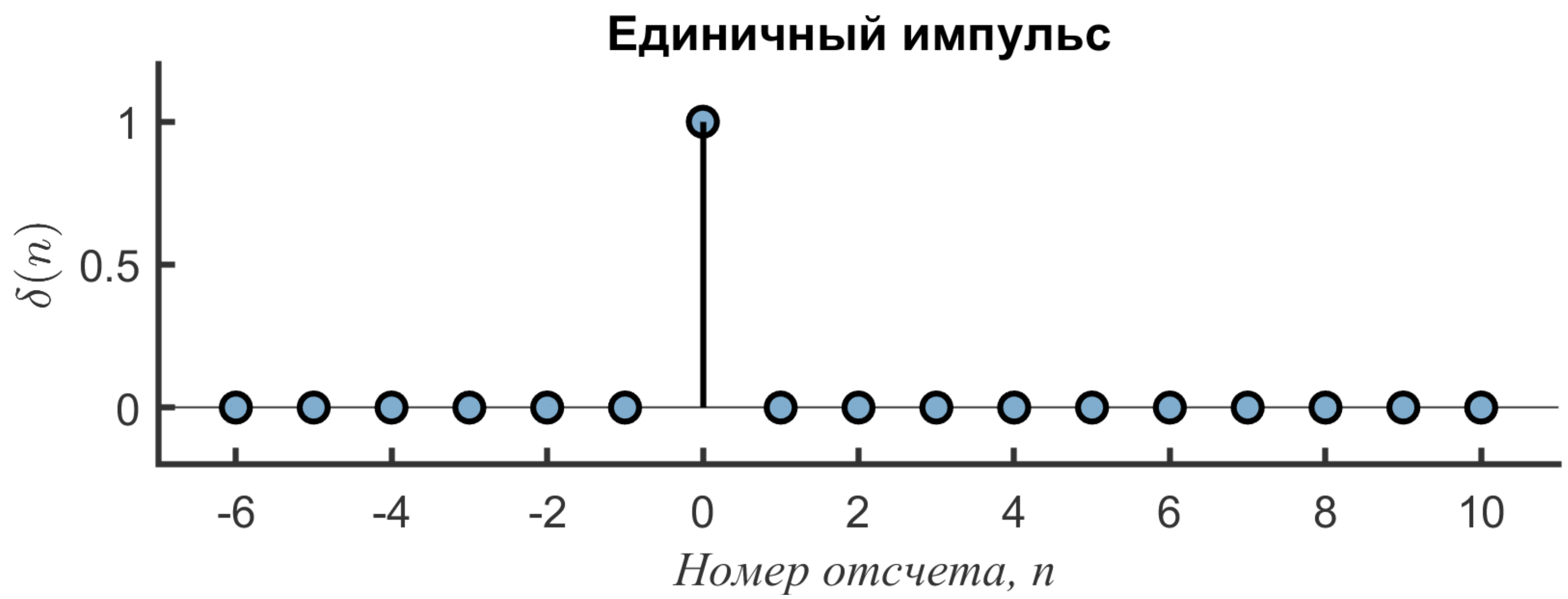
$$u(n) - u(n-10)$$

равняется 1 в интервале $0 \leq n \leq 9$ и 0 во всех остальных случаях.



Единичный импульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0; \end{cases}$$



Свойства единичного импульса

1: ***Умножение на единичный импульс***

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m)$$

2: ***Просеивание***

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k),$$

3: ***Взаимосвязь между*** $\delta(n)$ ***и*** $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k),$$

Представление сигнала единичными импульсами

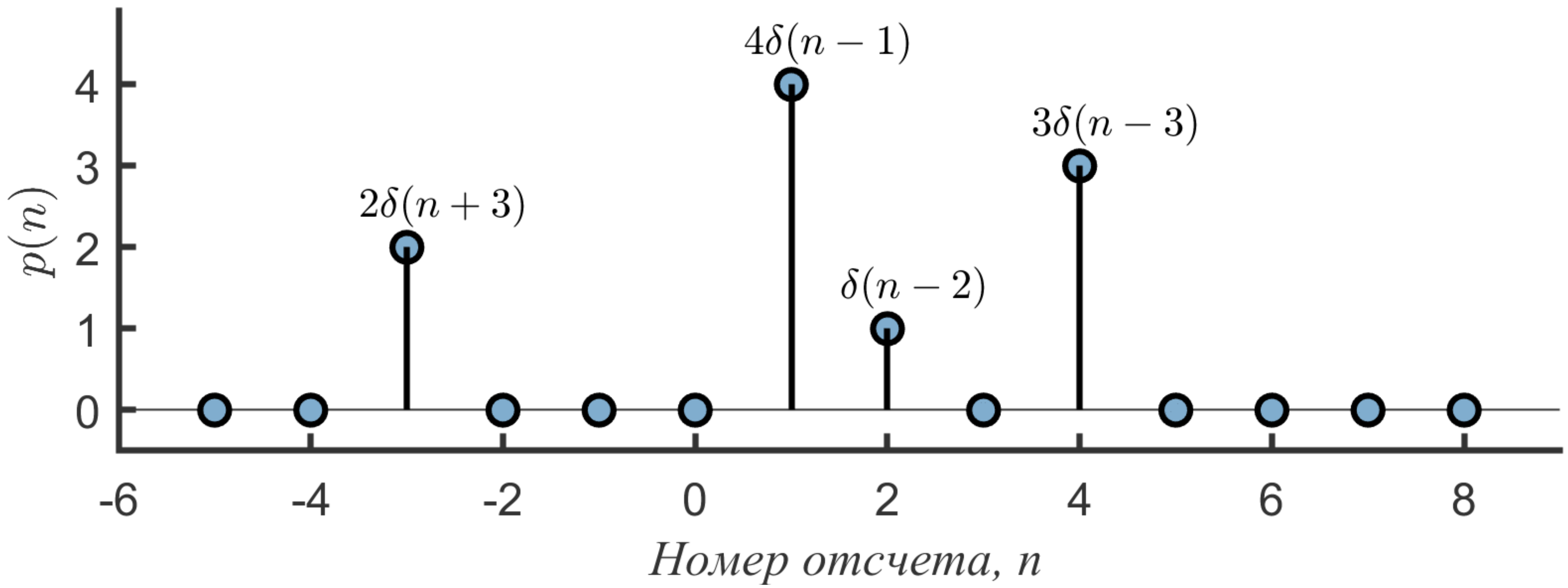
Пример. Изобразить график дискретного сигнала

$$p(n) = 2\delta(n+3) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-4).$$

Представление сигнала единичными импульсами

Пример. Изобразить график дискретного сигнала

$$p(n) = 2\delta(n+3) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-4).$$

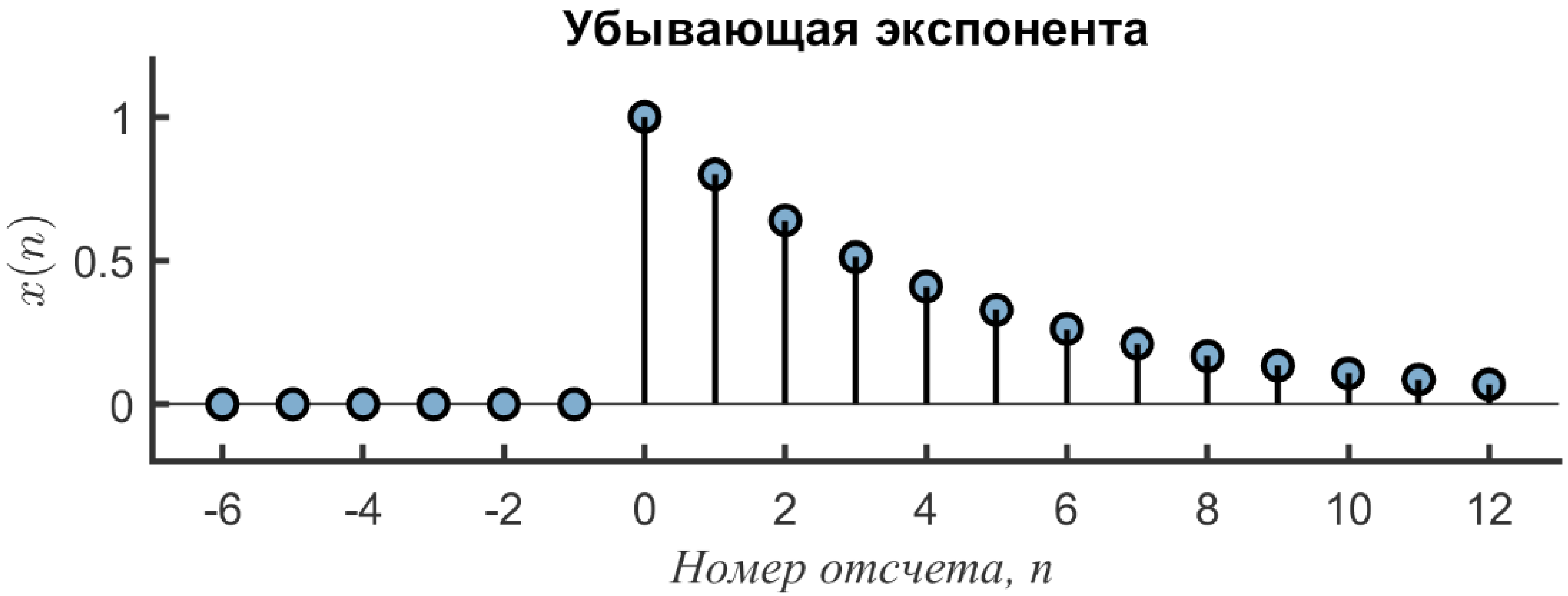


✓ Любой дискретный сигнал можно описать как линейную комбинацию сдвинутых и масштабированных единичных импульсов.

Убывающая экспонента

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1 \tag{4}$$

Экспоненциальные последовательности «хорошо» себя ведут для значений параметр a, которые по модулю меньше 1. В противном случае ($|a| > 1$) они имеют нестабильное поведение (их энергия и мощность бесконечно растут).



Убывающая экспонента (a = 0,8)

Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n, \qquad z = re^{j\omega}.$$

Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n, \qquad z = re^{j\omega}.$$

Используя формулу Эйлера можно преобразовать это выражение:

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

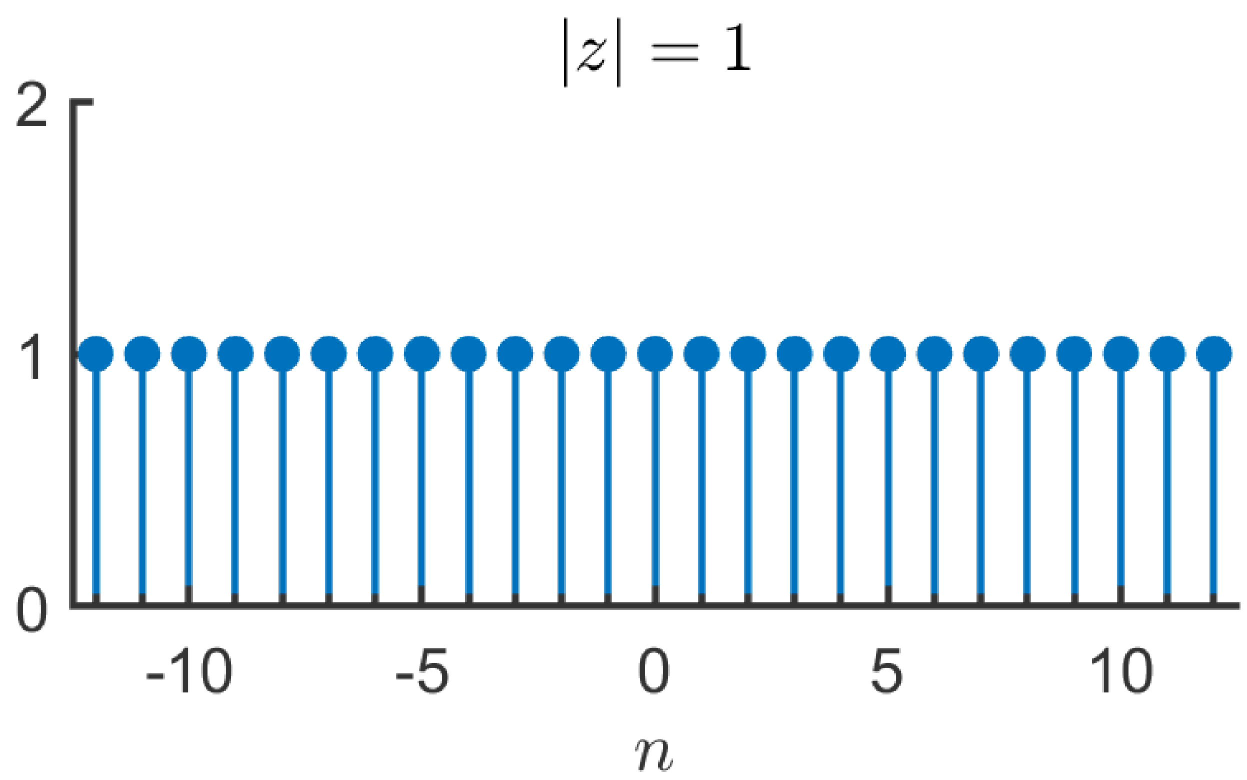
Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

Понятие комплексной экспоненты обобщает следующие 4-е типа функций:

1) Константная функция

$$k = k1^n \quad (\text{при } z = 1e^{j0})$$



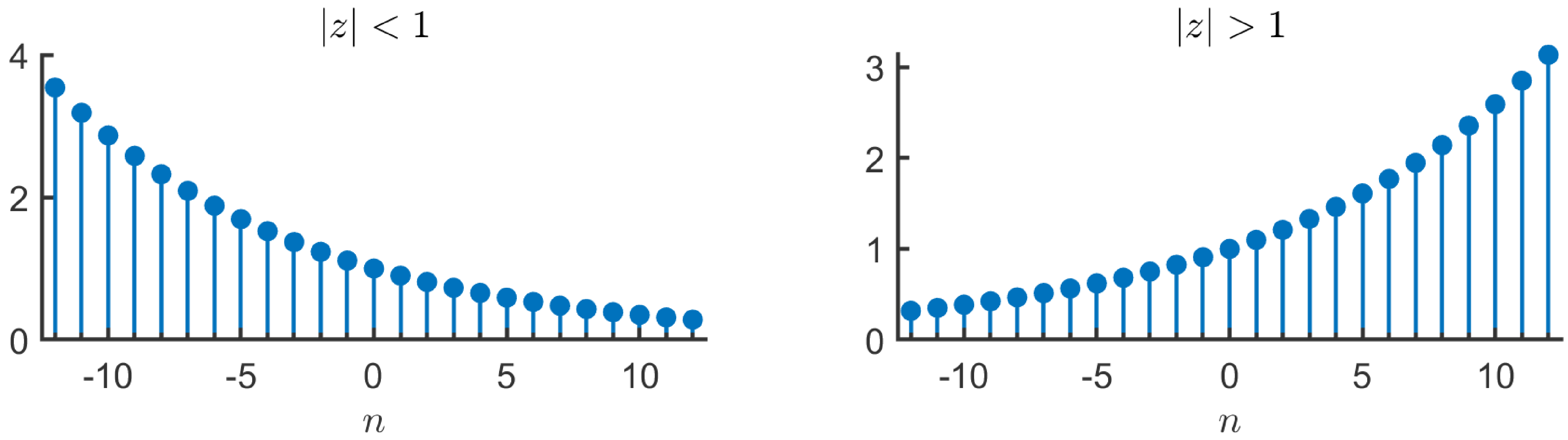
Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

Понятие комплексной экспоненты обобщает следующие 4-е типа функций:

1) Константная функция $k = k1^n$ (при $z = 1e^{j0}$)
2) Вещественная экспонента

$$r^n \quad (\text{при } z = re^{j0})$$



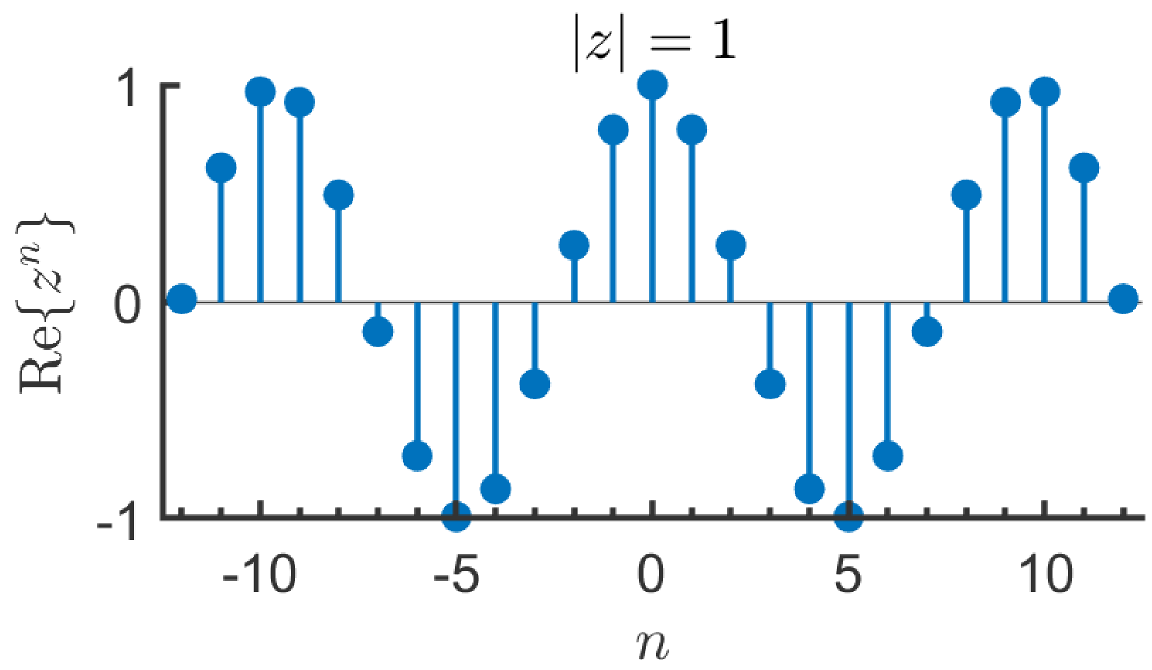
Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

Понятие комплексной экспоненты обобщает следующие 4-е типа функций:

1) Константная функция $k = k1^n$ (при $z = 1e^{j0}$)
2) Вещественная экспонента r^n (при $z = re^{j0}$)
3) Синусоида

$$\cos\omega n = \mathrm{Re}\{e^{j\omega n}\} \quad (\text{при } z = 1e^{j\omega})$$



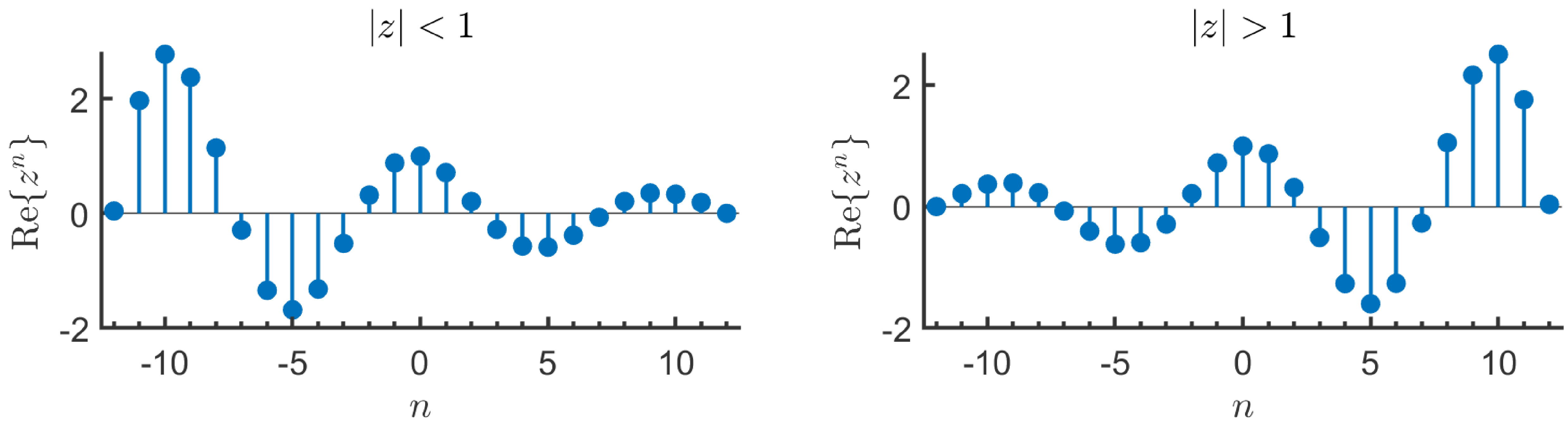
Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n).$$

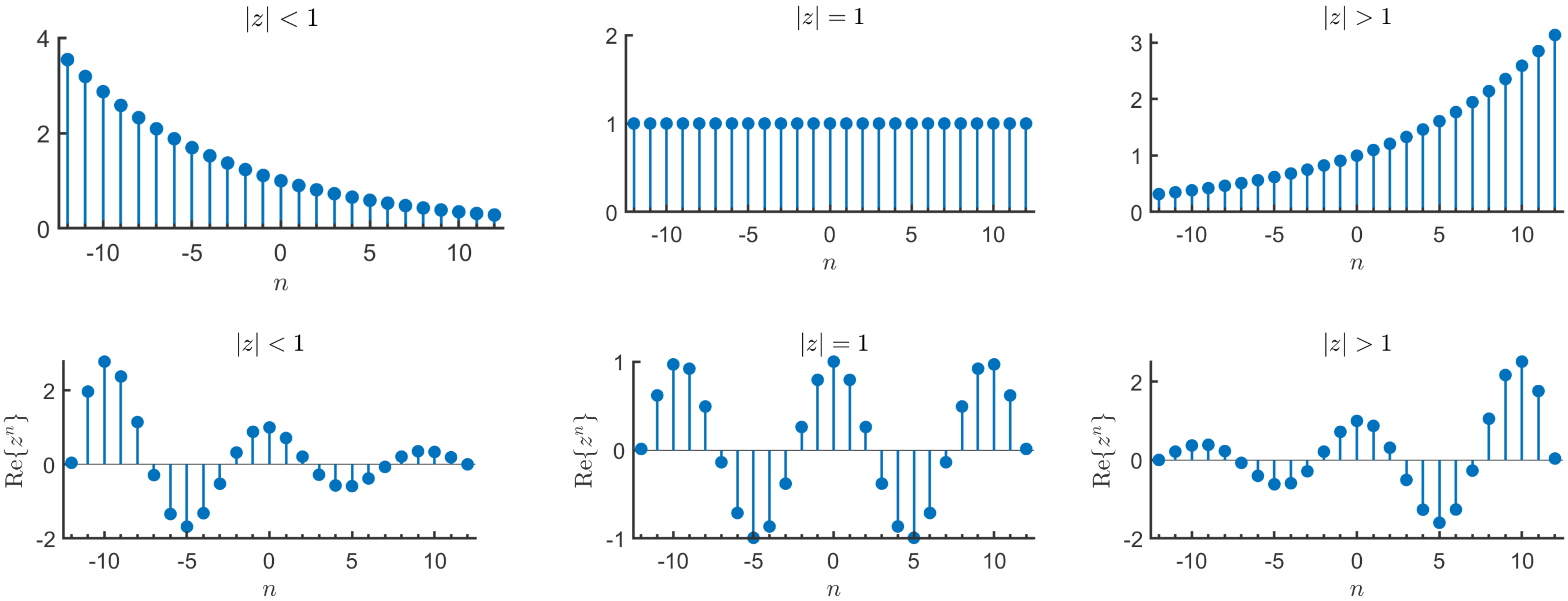
Понятие комплексной экспоненты обобщает следующие 4-е типа функций:

1) Константная функция $k = k1^n$ (при $z = 1e^{j0}$)
2) Вещественная экспонента r^n (при $z = re^{j0}$)
3) Синусоида $\cos\omega n = \mathrm{Re}\{e^{j\omega n}\}$ (при $z = 1e^{j\omega}$)
4) Затухающая/возрастающая синусоида

$$r^n\cos\omega n = Re\{re^{j\omega n}\} \quad (\text{при } z = re^{j\omega})$$



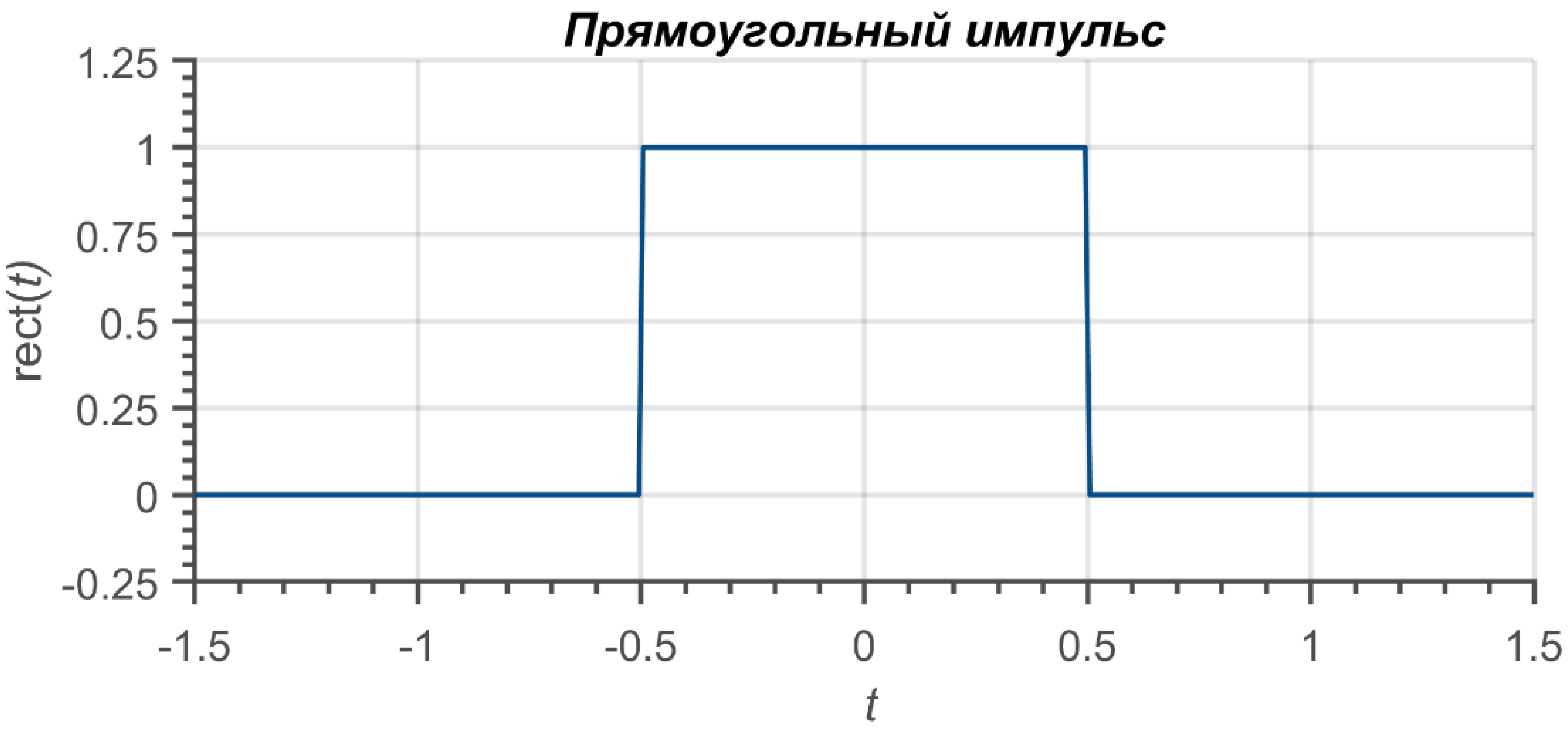
Комплексная экспонента (примеры)



Различные проявления комплексных экспонент z^n и $\mathrm{Re}\{z^n\}$

Прямоугольный импульс

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 0, & |t| \geq 0.5 \end{cases}$$



Sinc-функция

При изучении теории сигналов часто используется функция вида:

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \mathrm{sinc(t)}.$$

В ЦОС чаще всего пользуются следующей формой sinc-функции:

$$x(n) = \frac{\sin \omega_0 n}{\omega_0 n} = \mathrm{sinc}(\omega_0 n).$$