3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ – изучить способы описания дискретных систем при помощи пакета MATLAB.

3.1 Теоретические сведения

Дискретная система

С математической точки зрения *система с дискретным временем* определяется как *преобразование*, или *оператор*, переводящий входную последовательность $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ отклик (или реакцию) системы, что можно обозначить как

$$y(n) = T\{x(n)\}. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на её вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x(n)$.

В некоторых случаях система не имеет входного сигнала. Примером служит генератор синусоидального колебания. Тем не менее, для генератора может служить входом частота, фаза, амплитуда. Такие генераторы являются базовыми элементами для трансмиттеров, радаров и музыкальных синтезаторов.

Рассмотрим несколько примеров примитивных систем.

1) Система, генерирующая постоянный сигнал на выходе (игнорирование входа):

$$y(n) = C.$$

При помощи такой системы можно моделировать источник питания.

2) Система, реализующая тождество:

$$y(n) = x(n).$$

3) Усилитель:

$$y(n) = Ax(n).$$

Далее рассматриваются примеры более сложных систем.

1) *Идеальная система задержки* (ИСЗ) определяется по формуле

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty,$$

где n_d – фиксированное натуральное число, называемое *задержкой* системы.

Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов.

2) Общая система с*кользящего среднего* имеет следующий вид

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k) =$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \big(x(n + M_1) + x(n + M_1 - 1) + \cdots + x(n) + \cdots + x(n - M_2)\big).$$

Она вычисляет n-й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ отсчетов входной последовательности, расположенных вокруг n-го отсчета.

Рассмотрим далее какие базовые операции над сигналами выполняются в дискретных системах.

Временной сдвиг

Сдвинутая на целое число отсчетов k версия сигнала $x(n)$ формируется как

$$y(n) = x(n-k).$$

Если k положительное, то сигнал $y(n)$ сдвинут вправо относительно $x(n)$, т.е. $y(n)$ является *задержанной* версией $x(n)$. Если k отрицательное, то сигнал $y(n)$ сдвигается влево относительно $x(n)$, т.е. $y(n)$ является *опережающей* версией $x(n)$. На рис. 3.1 приведены примеры временного сдвига сигнала.

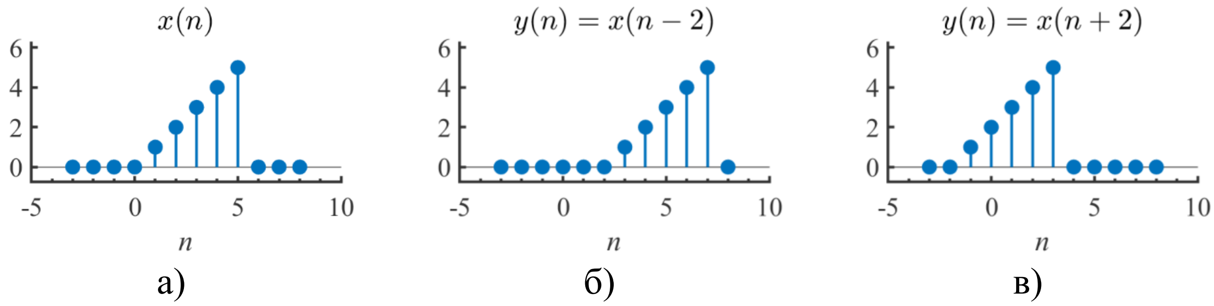


Рис. 3.1 –Дискретный сигналы $x(n)$: а) исходный вид; б) задержанная версия на 3 отсчета; в) опережающая на 3 отсчета версия

Введем понятие *единичного оператора задержки* D. Действие данного оператора описывается выражением:

$$D\{x(n)\} = x(n-1).$$

Повторное применение оператора задержки обозначается как $D(D) = D^2$ и приводит к следующему действию:

$$D^2\{x(n)\} = x(n-2).$$

При обозначении операции временного сдвига на блок-схеме дискретной системы используют один из двух способов, показанных на рис.3.2.

Рис. 3.2 – Варианты обозначения операции временного сдвига

Масштабирование

Операция масштабирования заключается в умножении сигнала на константу $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$y(n) = \alpha x(n).$$

Если α представляет собой действительное число, то масштабирование является обычным усилением (при $|\alpha| > 1$) или ослаблением (при $|\alpha| < 1$). На рис. 3.3 приведено условное графическое обозначение операции масштабирования, используемое при описании блок-схем дискретных систем.

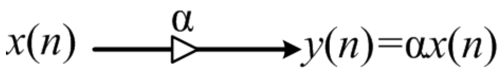


Рис. 3.3 – Обозначение на блок схеме операции масштабирования

Суммирование и произведение

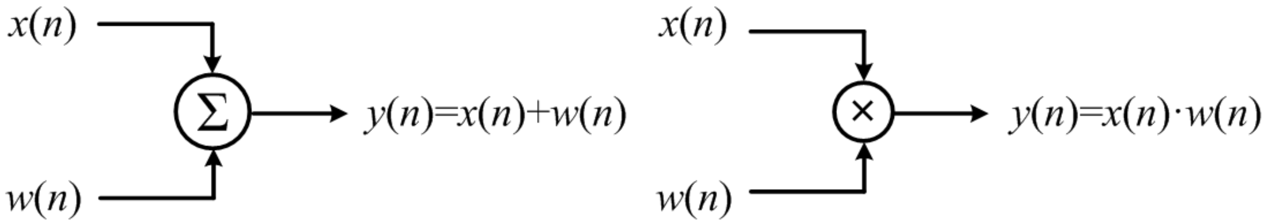
Сумма двух последовательностей $x(n)$ и $w(n)$ определяется путем *поэлементной* операции суммирования:

$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Аналогично определяется произведение двух последовательностей:

$$y(n) = x(n)w(n).$$

Обозначение операций суммирования и умножения, используемое при описании блок-схем дискретных систем приведено на рис. 3.4.



а) б)

Рис. 3.4 – Обозначение на блок схеме операций: а) сложения; б) масштабирования

В качестве примера рассмотрим два сигнала: $x(n)$ – дискретная синусоида и $w(n)$ – прямоугольный импульс. Их графики показаны на рис. 3.5,а и б.

Если сигналы $x(n)$ и $w(n)$ пропустить через блок сложения, то результирующий сигнал будет таким, как показано на рис. 3.5,в. Если же эти два сигнала пропустить через блок умножения, то в результате получим сигнал, который показан на рис. 3.5,г. Операцию сложения чаще всего используют для моделирования ситуаций, когда одновременно на приемник поступает сигнал из двух источников. Например, когда на микрофон попадает полезный сигнал и шум. Получаемая модель сигнала в этом случае называется *аддитивной*. Умножение сигналов чаще всего используют для того, чтобы ограничить длительность сигнала. Так в приведенном примере на рис. 3.5,г мы ограничили длительность дискретного синуса интервалом $n \in [10,\ 20]$.

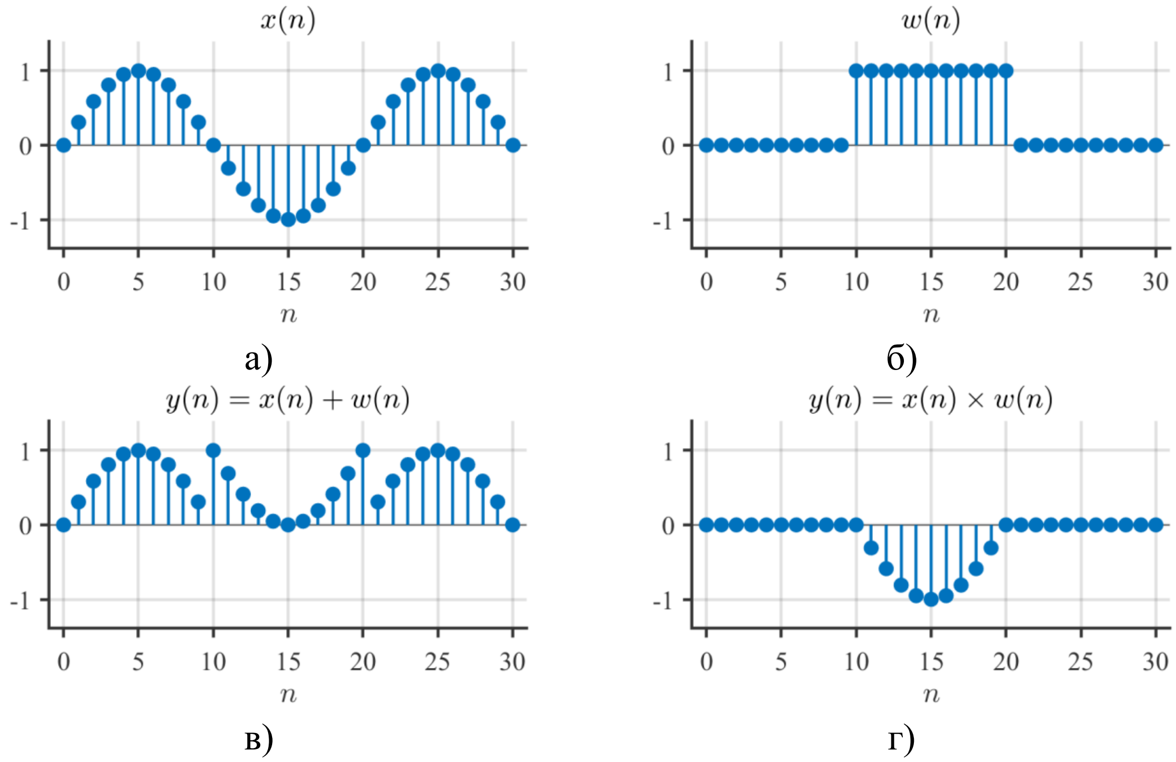


Рис. 3.5 – Опрерации над сигналами: а) сигнал $x(n)$; б) сигнал $w(n)$; в) результат сложения сигналов $x(n)$ и $w(n)$; г) результат произведения сигналов $x(n)$ и $w(n)$

Свойства дискретных систем: наличие памяти

Для системы без памяти характерно, что ее текущий отклик $y(n)$ зависит только от текущего входного значения $x(n)$ для любого n.

Например, система

$$y(n) = x^2(n),$$

является системой без памяти, а система

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

является системой с памятью.

Характерно, что системы без памяти при технической реализации не требуют сохранения контекста своей работы. Выходной результат в них зависит только от текущего входа.

Обратимость

Обратимость системы – важное свойство в таких приложениях как частотная коррекция канала и обратная фильтрация. Говорят, что система является *обратимой*, если вход системы можно восстановить единственным образом – зная выход системы. Для того чтобы система была обратимой, она должна для различных входов производить различные выходы. Другими словами, если есть два входа $x_1(n)$ и $x_2(n)$, причем $x_1(n) \neq x_2(n)$, то должно выполняться неравенство $y_1(n) \neq y_2(n)$.

Система, определенная как

$$y(n) = x(n)g(n),$$

является обратимой только тогда, когда $g(n) \neq 0\ \forall n$. В частности зная, $y(n)$ и $g(n)$, которые не равны нулю для всех n, вход $x(n)$ можно восстановить по $y(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}.$$

Детерминированность (каузальность)

Систему называют *детерминированной*, если выходной отсчет системы с номером n_0 зависит только от входных отсчетов с номерами $n \leq n_0$.

Например, *компрессор (уплотнитель)* – это система, определяемая соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Компрессор отбрасывает $M - 1$ из каждых M отсчетов входной последовательности.

Компрессор не является детерминированной системой, поскольку $y(1) = x(M)$, т. е. выход в момент времени $n = 1$ зависит от входного отсчета в момент времени $n = M$.

Аддитивность

Под аддитивностью понимается суперпозиция причин и результатов. Так, если причина «x_1» вызывает результат «y_1» и если причина «x_2» вызывает результат «y_2», то суперпозиция причин и результатов означает, что причина «x_1+x_2» вызовет результат «$y_1 + y_2$». Т.о. система ***аддитивна***, если из того, что $y_1(n) = T\{x_1(n)\}$ и $y_2(n) = T\{x_2(n)\}$ следует, что

$$y_1(n) + y_2(n) = T\{x_1(n) + x_2(n)\}.$$

Альтернативная формулировка: система называется *аддитивной* если условие

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

выполняется для любых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

Пример: пусть есть N сигналов и M записей шума, нужно показать, как отрабатывает алгоритм со всеми сигналами и со всеми шумами. В обычном сценарии нужно запускать систему $N \times M$ раз. Но если система аддитивна, то достаточно обработать сигналы и шумы отдельно и затем все остальное получить простым суммированием.

Однородность

Под однородностью понимается наличие пропорциональности между входным и выходным сигналами. Система называется *однородной*, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Т.е. для любого комплексного числа c реакция системы на входной сигнал $cx(n)$ в c раз больше реакции системы на входной сигнал $x(n)$.

Например, система, описываемая выражением

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)},$$

не аддитивна, поскольку

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = \frac{\left(x_1(n) + x_2(n)\right)^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)},$$

что не то же самое, что

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}.$$

Данная система является однородной, поскольку

$$T\{cx(n)\} = \frac{\left(cx(n)\right)^2}{cx(n-1)} = c\frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT\{x(n)\}.$$

Рассмотрим дополнительный пример.

Пример 3.1 Является ли система, описываемая выражением

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1),$$

аддитивной и/или однородной?

Решение:

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1),$$

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1)$$

Аддитивность подтверждается.

$$T\{cx(n)\} = cx(n) + \left(cx(n-1)\right)^* = cx(n) + c^*x^*(n-1).$$

Очевидно, что это не равно

$$cT\{x(n)\} = cx(n) + cx^*(n-1).$$

Однородность не подтверждается.

Линейность

Линейной системой называется такая, которая обладает одновременно свойством ***аддитивности*** и ***однородности***:

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\}. \qquad (3.2)$$

Иногда говорят, что линейная система отвечает принципу ***суперпозиции***.

Свойство линейности существенно упрощает вычисление отклика системы на заданный вход:

$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\},$$

поскольку коэффициенты $x(k)$ – константы, то мы можем использовать свойство однородности:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\}. \qquad ($$

Если обозначить через $h_k(n)$ отклик системы на единичный импульс в момент время $n = k$:

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\},$$

то (3.3) преобразуется:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n). \qquad ($$

Стационарность

К ***стационарным*** относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входного сигнала приводит к появлению такого же сдвига выходного сигнала. Более формально, если $y(n) = T\{x(n)\}$, то для стационарной системы справедливо, что

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0). \qquad (3.5)$$

Стационарные системы еще называют ***инвариантными относительно сдвига***.

Пример 3.2. Определить является ли компрессор стационарной системой.

Решение. Компрессор описывается соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Показать, что компрессор не является стационарным можно следующим образом. Рассмотрим реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1(n) = x(n - n_0)$. Если бы система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1(n) = y(n - n_0)$. Однако

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn - n_0) \neq y(n - n_0) = x\big(M(n - n_0)\big),$$

т. е. соотношение (3.5) не выполняется и, следовательно, компрессор не является стационарной системой.

Линейный стационарные системы (ЛС-системы)

ЛС-системы представляют собой особо распространенный класс систем. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов. Наличие этих свойств позволяет описывать системы в удобном виде. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов.

Если $h(n)$ – реакция системы на единичный импульс $\delta(n)$, то ее отклик на $\delta(n - k)$ будет $h(n - k)$. Поэтому, возвращаясь к формуле (3.4), мы получим:

$$h_k(n) = T\{\delta(n - k)\} = h(n - k),$$

следовательно

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k). \qquad ($$

Уравнение (3.6) называется *сверткой* и обозначается как

$$y(n) = x(n) * h(n), \qquad ($$

где символ «∗» обозначает операцию свертки.

Последовательность $h(n)$ называется импульсной характеристикой системы. Таким образом, ЛС-система полностью определяется своей импульсной характеристикой $h(n)$, в том смысле, что, опираясь на (3.6), можно вычислить отклик $y(n)$ на *любой* поданный сигнал $x(n)$.

Пример 3.3. Первый ненулевой элемент последовательности $x(n)$ появляется на индексе $n = -6$ и имеет значение $x(-6) = 3$, последний ненулевой элемент имеет индекс $n = 24$ и значение $x(24) = -4$. Пусть

$$y(n) = x(n) * x(n).$$

Какой индекс будет у первого ненулевого элемента последовательности $y(n)$ и какое он будет иметь значение? Какой индекс будет у последнего ненулевого элемента $y(n)$ и какое он будет иметь значение?

Решение. Поскольку сворачиваются две последовательности конечной длины, то индекс первого ненулевого значения будет равен сумме индексов первых ненулевых элементов двух сворачиваемых последовательностей. В нашем случае, это индекс $n = -12$, а значение

$$y(-12) = x^2(-6) = 9.$$

Аналогичным образом, индекс последнего ненулевого элемента равен $n = 48$, и значение

$$y(48) = x^2(24) = 16.$$

Пример нелинейной системы

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$y(n) = T\{x(n)\} = x(n)x(n-1). \tag{3.8}$$

Чтобы определить, является ли система линейной, проверим выполнение принципа суперпозиции (3.2) для двух тестовых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$, показанных на рис. 3.6.

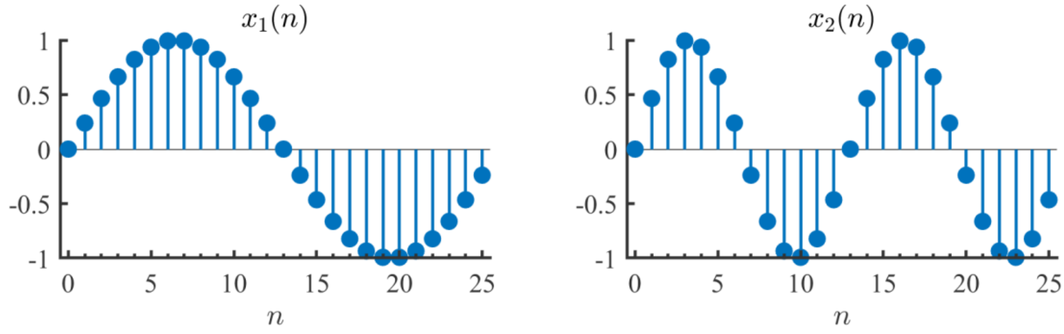


Рис. 3.6 – Входные сигналы для теста на линейность

Сложим $x_1(n)$ с $x_2(n)$ и пропустим результат через дискретную систему (3.8). Вид выходного сигнала показан на рис.3.7.

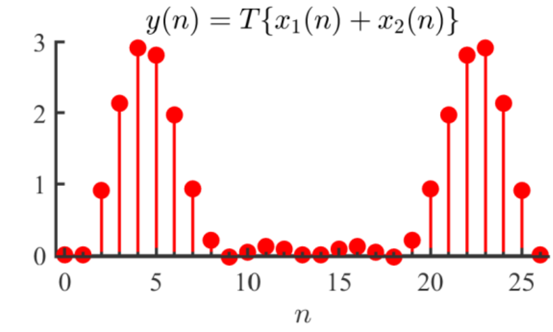


Рис. 3.7 – Реакция дискретной системы (3.8) на сумму сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$

Теперь пропустим по отдельности сигналы $x_1(n)$ и $x_2(n)$ через дискретную систему (см. уравнение (3.8)) и затем сложим результаты $y_1(n) = T\{x_1(n)\}$ и $y_2(n) = T\{x_2(n)\}$. На рис. 3.8 изображен результирующий сигнал.

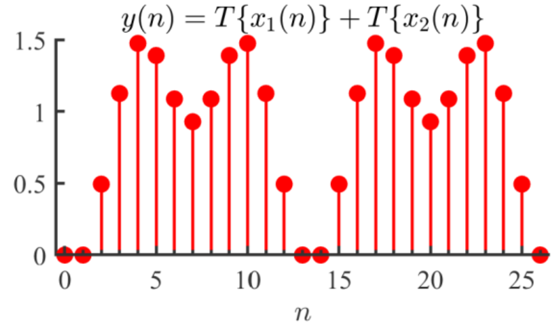


Рис. 3.8 – Сумма откликов системы на сигналы $x_1(n)$ и $x_2(n)$

Можно заметить, что графики на рис. 3.7 и 3.8 различны. Из этого можно заключить, что (3.8) описывает ***нелинейную*** систему.

Устойчивость ЛС-системы

Для определения устойчивости нам понадобится понятие ограниченного сигнала. Последовательность $x(n)$ называется ***ограниченной***, если имеется такое конечное положительное число B_x, что

$$\forall n \quad |x(n)| \leq B_x < \infty. \tag{3.9}$$

Система называется устойчивой только если её реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Т.о. в устойчивой системе для **каждой** ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y, что

$$\forall n \quad |y(n)| \leq B_y < \infty. \tag{3.10}$$

Обратите внимание, что устойчивость – свойство именно системы, а не входных/выходных сигналов. Можно и для неустойчивой системы найти входные последовательности, для которых выход будет ограниченным. Для устойчивости важно, что выход ограничен для **любой** ограниченной входной последовательности.

Почти все рассмотренные прежде системы – устойчивы. А вот система

$$y(n) = \lg(x(n)) \tag{3.11}$$

является неустойчивой системы, поскольку $y(n) = -\infty$ для $x(n) = 0$.

Для линейной стационарной системы устойчивость гарантируется, если ее импульсная характеристика представляет собой абсолютно сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Пример 3.4. Является ли устойчивой ЛС-система с импульсной характеристикой: а) $h_1(n) = u(n)\alpha^n$ при $|\alpha| < 1$; б) $h_2(n) = u(n)n$?

Решение. а) Является устойчивой, поскольку импульсная характеристика $h_1(n)$ представляет собой сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|} \quad |\alpha| < 1.$$

б) Не является устойчивой, поскольку импульсная характеристика возрастает неограниченно.

Разностные уравнения

Для практического использования ЛС-системы часто описываются при помощи разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k), \tag{3.12}$$

где b_k – *коэффициенты прямой связи*, которые применяются к поступающему в систему сигналу; $x(n)$ и a_k – *коэффициенты обратной связи*, которые применяются к выходному сигналу $y(n)$.

В зависимости от значения коэффициентов b_k и a_k выражение (3.12) может описывать работу различных устройств (например, интегратора, дифференциатора, фильтра нижних частот и т.д.).

На рис. 3.9 показана схема реализации разностного уравнения (3.12). Заметим, что чаще всего коэффициент a_0 имеет единичное значение и поэтому не показан на схеме.

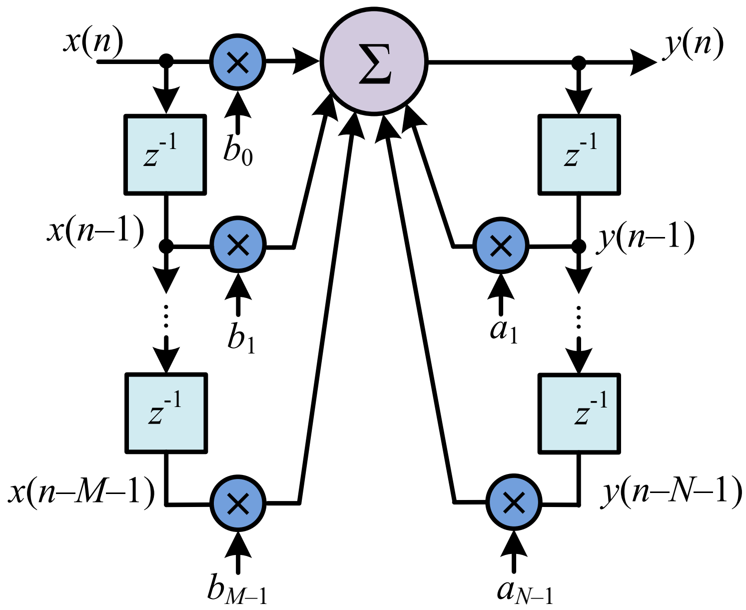


Рис. 3.9 – Схема реализации разностного уравнения

Системы, описываемые уравнением (3.12), делят на два класса:

а) рекурсивные;

б) нерекурсивные.

В ***рекурсивных*** системах выход $y(n)$ зависит как от входного сигнала $x(n)$ и его предыстории $x(n-k)$, так и от предыдущих выходных значений $y(n-k)$. В ***нерекурсивных*** системах выходной сигнал зависит только от входного сигнала и его предыстории. Другими словами, у нерекурсивных систем все коэффициенты a_k (кроме a_0) равны нулю.

Задача

Найти решение разностного уравнения

$$y(n) - 0.25y(n-2) = x(n).$$

для $x(n) = u(n)$ и начальных условий $y(-1) = 1$ и $y(-2) = 0$.

Решение в книге DSP Shaum outline.

Реализация цифровых фильтров в MATLAB

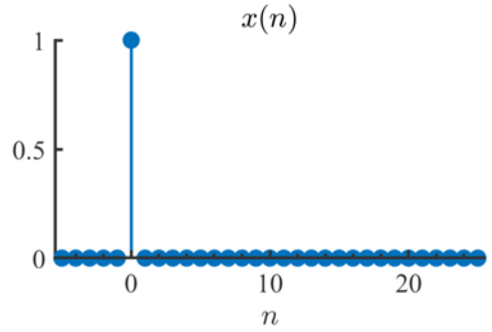
В MATLAB ЛС-систему реализует функция `y=filter(b,a,x)`, где `b` – коэффициенты прямой связи, `a` – коэффициенты обратной связи, `x` – входной сигнал. Ниже приводится пример использования функции `filter` для реализации линейной системы:

$$y(n) = 0{,}3x(n) + 0{,}6x(n-1) + 0{,}3x(n-2) - 0{,}9y(n-2). \tag{3.13}$$

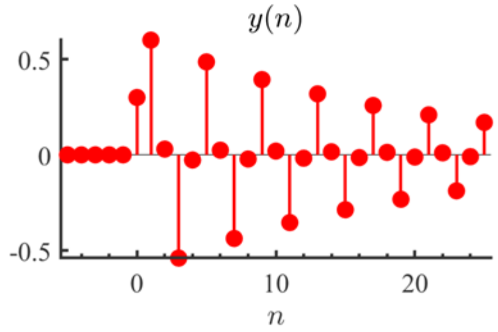
Напомним, что *импульсная характеристика* – это сигнал, который генерирует ЛС-система при подаче на ее вход дельта-импульса $\delta(n)$. Приведем пример получения импульсной характеристики для ЛС-системы, описываемой разностным уравнением (3.13).

```
delta = @(n)(n==0);
n = -5:25;
x = delta(n); % дельта-импульс
b = [0.3 0.6 0.3];
a = [1 0 0.9];
y = filter(b,a,x);
```

На рис. 3.10 показаны графики входного и выходного сигналов линейной системы из приведенного примера. Выходной сигнал является импульсной характеристикой системы (3.13).



а)



б)

Рис. 3.10 – Обработка сигнала линейной системой, описываемой разностным уравнением (3.13): а) входной сигнал б) выходной сигнал

Очевидно, что при подаче дельта-импульса на вход нерекурсивной системы ее выходной сигнал будет иметь конечную длительность, отчего такие системы называются системами с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ). Для нерекурсивных систем вследствие наличия обратной связи характерна *бесконечная импульсная характеристика* (БИХ).

Фильтр, описываемый уравнением (3.13), можно представить в виде блок схемы, которая показана на рис. 3.11.

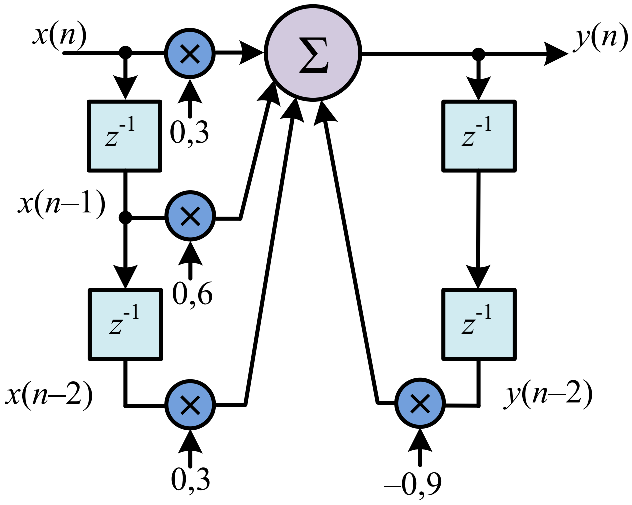


Рис. 3.11 – Блок-схема фильтра (3.13)

Из приведенной схемы видно, что реализация фильтра требует четырех элементов памяти и четырех блоков умножения на константу. В соответствии со схемой, показанной на рис. 3.11 можно составить следующее MATLAB-описание.

```
delta = @(n)(n==0);
n = -5:25;
x = delta(n);          % дельта-импульс
N = length(x);         % длина сигнала

x_mem = zeros(1,2);    % память входных отсчетов
y_mem = zeros(1,2);    % память выходных отсчетов
y = zeros(1,N);        % выходной сигнал

% Цикл обработки
for n = 1:length(x)
    y(n) = x(n)*0.3 + x_mem(1)*0.6 + x_mem(2)*0.3 - y_mem(2)*0.9;

    % обновление памяти
    x_mem = [x(n) x_mem(1:end-1)];
    y_mem = [y(n) y_mem(1:end-1)];
end
```

В результате выполнения приведенного кода выходной сигнал будет иметь тот же вид, что и выходной сигнал, показанный на рис. 3.10,б. Поскольку приведенное описание полностью эквивалентно описанию ЛС-системы при помощи MATLAB-функции `filter`.

Понятие собственной функции

Синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что *комплексные экспоненты являются собственными функциями ЛС-систем*. Это означает, что реакция таких систем на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой определяется системой.

Эхо-система (пример)

Прежде, чем дать определение частотной характеристики ЛС-системы рассмотрим следующий пример. Представьте, что вы находитесь в большой пустой комнате (или пещере), в которой есть эхо. Если вы начнете петь или свистеть, то звук вернется к вам с некоторой задержкой τ. Вы заметите, что какие-то тоны резонируют, а какие-то поглощаются или ослабляются. Происходящий процесс можно описать следующим уравнением:

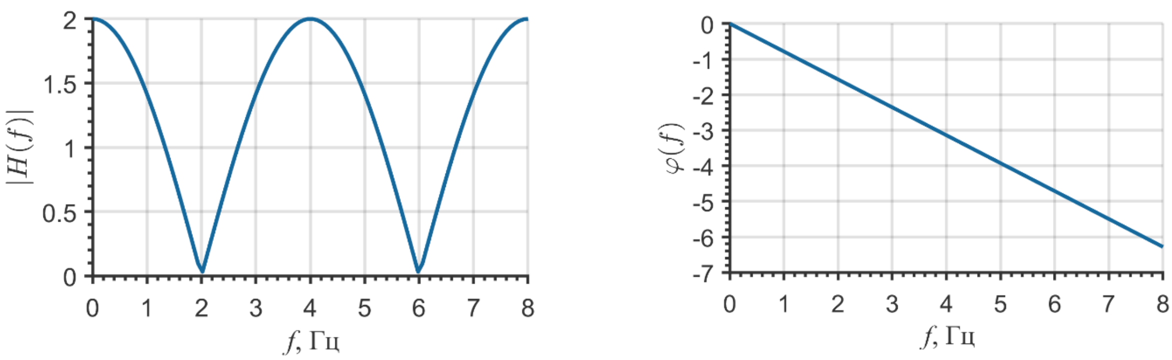
$$y(t) = x(t) + x(t - \tau). \qquad (3.1$$

Следует заметить, что эхо-система (3.14) не пропускает все частоты (тоны) одинаково. Выход будет зависеть от частоты входного сигнала и временной задержки τ, которая соответствует различному сдвигу фазы для различных частот. Когда входной сигнал имеет частоту ω, такую, что τ в точности соответствует одному периоду (т. е. $\omega\tau = 2\pi$), то общий эффект работы системы состоит в удвоении амплитуды входного сигнала. Если входной сигнал имеет такую частоту, что τ соответствует половине периода ($\omega\tau = \pi$), то выходом системы будет нулевым. Это и есть причина того, что некоторые частоты «резонируют», а некоторые поглощаются.

В общем случае мы можем найти частотную характеристику эхо-системы. Для этого предположим, что на вход подается синусоида $\sin \omega t$:

$$\sin \omega t + \sin\big(\omega(t-\tau)\big) = 2\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sin\left(\omega\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right) = H(\omega)\sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big),$$

где $H(\omega) = 2\cos(\omega\tau/2)$ определяет амплитуду, а $\varphi(\omega) = -\omega\tau/2$ – начальную фазу выходного сигнала. Графики $H(\omega)$ $\varphi(\omega)$, иллюстрирующие работу эхо-системы, приведены рисунке 3.12 (на графиках вместо круговой частоты ω отображена линейная частота f).



а *б*

Рисунок 3.12 – Зависимость амплитуды (*а*) и фазы (*б*) выходного сигнала эхо-системы ($\tau = 0{,}25$ с) от частоты входного синусоидального сигнала $\sin 2\pi f t$

Таким образом, можно сделать вывод, что в ответ на каждый синусоидальный сигнал с частотой ω будет получаться синусоидальный выход той же частоты, но с линейным фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$ и измененной амплитудой $H(\omega)$. Амплитуда будет максимальной для всех $\omega\tau = 2k\pi$ и будет равна нулю для $\omega\tau = \pi(2k+1)$. Частоты, которые подавляются системой, называются *нулями* системы.

Комплексная частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входной сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \qquad (3.1$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с *импульсной характеристикой* $h(n)$, то на выходе появляется последовательность

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}h(m)\cdot e^{j\omega(n-m)}=e^{j\omega n}\sum_{m=0}^{M}h(m)\cdot e^{-j\omega m}=x(n)H\left(e^{j\omega}\right),$$

т. е.

$$y(n)=x(n)H\left(e^{j\omega}\right). \tag{3.16}$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (3.15) выходной сигнал совпадает со входным с точностью до множителя $H\left(e^{j\omega}\right)$, который называется *комплексной частотной характеристикой* (КЧХ) системы или просто *частотной характеристикой* и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=0}^{M}h(m)\cdot e^{-j\omega m}. \tag{3.17}$$

Частотная характеристика является периодической функцией ω, причем ее период равен 2π. Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой $\omega+2m\pi$ ($m=\pm1,\pm2,\dots$) не отличается от входной последовательности с частотой ω, т. е.

$$\tilde{x}(n)=e^{j(\omega+2m\pi)n}=e^{j\omega n}=x(n).$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π. Обычно для этой цели используют интервал $0\le\omega\le2\pi$.

В общем случае $H(e^{j\omega})$ имеет комплексные значения, ее можно представить в алгебраической форме, но чаще всего используется показательный вид (или полярная система координат) в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{\arg H(e^{j\omega})}.$$

Пример 3.5. Найти КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y(n)=x(n-n_d),$$

где n_d – фиксированное целое число.

Решение. Если $x(n) = e^{j\omega n}$ – сигнал, поданный на вход системы, то по формуле из условия получаем:

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d}e^{j\omega n}.$$

Таким образом, видно, что при любом значении ω выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины задержки n_d. Следовательно, КЧХ ИСЭ равна

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega n_d}.$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h(n) = \delta(n - n_d)$ – импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (3.17), имеем:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_d)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера:

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = \cos(\omega n_d).$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -\sin(\omega n_d).$$

Ее модуль и фаза равны: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$, $\arg H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$.

Синусоидальное представление ЛС-систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход:

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

Согласно (3.16) реакцией системы на сигнал $x_1(n) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0})\,\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n},$$

а на сигнал $x_2(n) = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{j\omega_0 n}$ –

$$y_2(n) = H(e^{-j\omega_0})\,\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y(n) = \frac{A}{2}\left(H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right).$$

Если отчеты последовательности $h(n)$ вещественны, то $H\left(e^{-j\omega_0}\right) =$ $= H^*\left(e^{j\omega_0}\right)$. Следовательно,

$$y(n) = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \phi + \theta),$$

где $\theta = \arg H(e^{j\omega_0})$ – фаза КЧХ системы при частоте ω_0, или значение фазочастотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки имеем $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, (см. пример 2.9). Следовательно,

$$y(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) = A\cos(\omega_0(n - n_d) + \phi),$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ.

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π-периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, то достаточно определить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длиной 2π, например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi \leq \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi \leq \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называются частоты, близкие к нулю, а верхними – частоты, лежащие около $\pm\pi$. Учитывая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π, неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки чётным кратным π, в то время как верхние – к нечетным кратным π.

3.2 Порядок выполнения работы

Задание 1

Напишите MATLAB-функцию, реализующую дискретную систему, согласно вашему варианту.

Таблица 1

№ варианта	Уравнение системы
1	$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}\big(y(n-1) + y(n-2)\big)$
2	$y(n) = \mathrm{sign}\big(x(n)\big)\frac{\lg(1+\mu\lvert x(n)\rvert)}{\lg(1+\mu)}$ где $-1 \le x(n) \le 1$, μ=255
3	$y(n) = \frac{0.5x(n)+0.5x(n-1)}{x(n-2)+0.1x(n)}$
4	$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-10)$
5	$y(n) = \left(x(n) + \frac{1}{2}\right)\left(x(n-1) - \frac{1}{2}\right)$
6	$y(n) = x(n-2) - 0.6y(n-1)$
7	$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}\big(x(n) + x(n-1)\big)$
8	$y(n) = 0.6x(n-5) - 0.4y(n-2)$

Постройте реакцию дискретной системы на следующие сигналы:
– дельта-импульс $x(n) = \delta(n-n_0)$;
– единичную ступеньку $x(n) = u(n-n_0)$;
– низкочастотный синусоидальный сигнал $x(n) = \cos(2\pi \cdot 0.01 \cdot n)$;
– высокочастотный синусоидальный сигнал $x(n) = \cos(2\pi \cdot 0.48 \cdot n)$;
Функция $\mathrm{sign}(x)$ в варианте 2 определяется как:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Задание 2

Проверить является ли система из задания 1:
1) аддитивной;
2) однородной;
3) линейной;
4) стационарно.

В отчете представьте математические выкладки, подтверждающие наличие или отсутствие у системы указанных свойств.

Задание 3

а) По блок-схеме дискретной системы записать её разностное уравнение.
б) реализовать в MATLAB дискретную систему согласно её блок-схеме.
в) Построить импульсную характеристику дискретной системы.

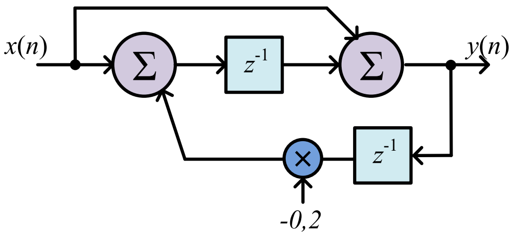


Рис. 3.13 – Вариант №1

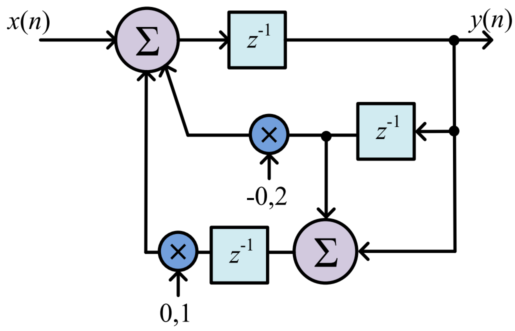


Рис. 3.14 – Вариант №2

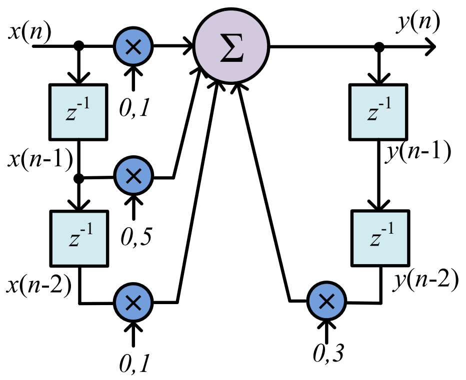


Рис. 3.15 – Вариант №3

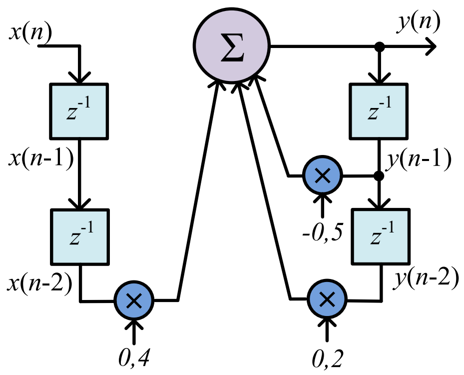


Рис. 3.16 – Вариант №4

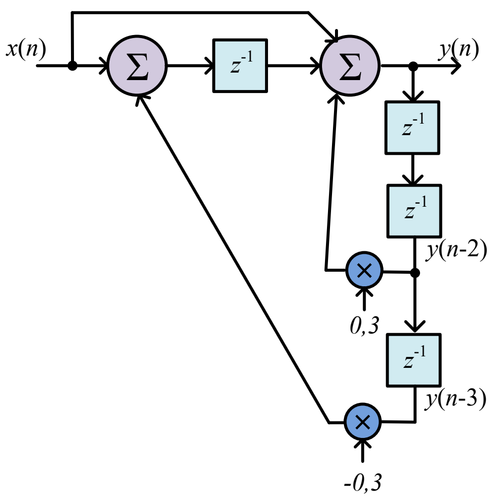


Рис. 3.17 – Вариант №5

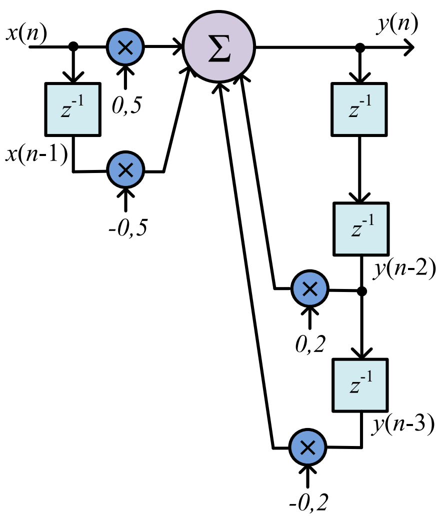


Рис. 3.18 – Вариант №6

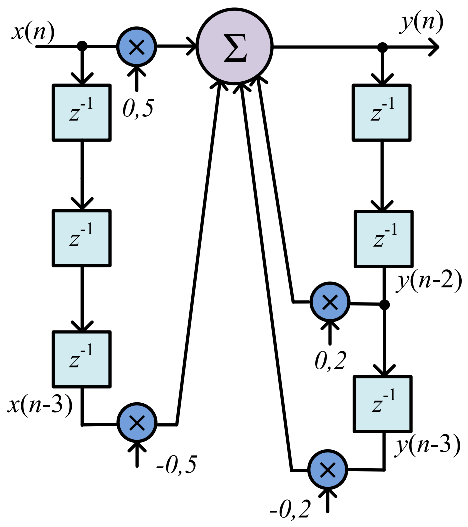


Рис. 3.19 – Вариант №7

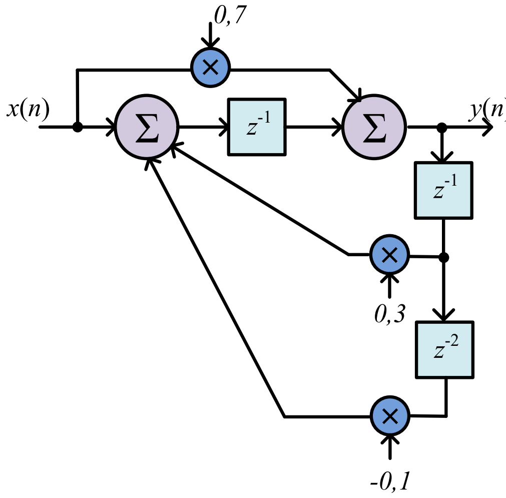


Рис. 3.20 – Вариант №8

Задание 4

Используя встроенную MATLAB-функцию `filter(b,a,x)` и коэффициенты разностного уравнения системы из задания 3 найдите импульсную характеристику системы и постройте её график.

Задание 5

Используя выражение (3.17) найдите частотную характеристику $H(e^{j\omega})$ системы из задания 3. Частотную характеристику можно представить в виде

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|}_{\text{АЧХ}} e^{\overbrace{\arg H(e^{j\omega})}^{\text{ФЧХ}}}.$$

Постройте график амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – $|H(e^{j\omega})|$ и фазо-частотная характеристика (ФЧХ) $\arg H(e^{j\omega})$.

Найдите на какой частоте ω_0 АЧХ достигает минимального значения $|H\left(e^{j\omega_0}\right)|$. Сгенерируйте экспоненциальный сигнал

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}, \quad n = 0,1, \dots N - 1.$$

и пропустите его через систему из задания 3, используя функцию Matlab `filter`. Постройте график входного и выходного сигнала. Объясните полученный результат.

Задание 6

Необходимо реализовать в MATLAB алгоритм генерации звука гитарной струны.

Рассмотрим разностное уравнение, которое описывает один из вариантов алгоритма Карплуса–Стронга для имитации звука гитарной струны.

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n - M), \tag{3.18}$$

где $x(n)$ – входной сигнал; M – задержка; α – коэффициент затухания.

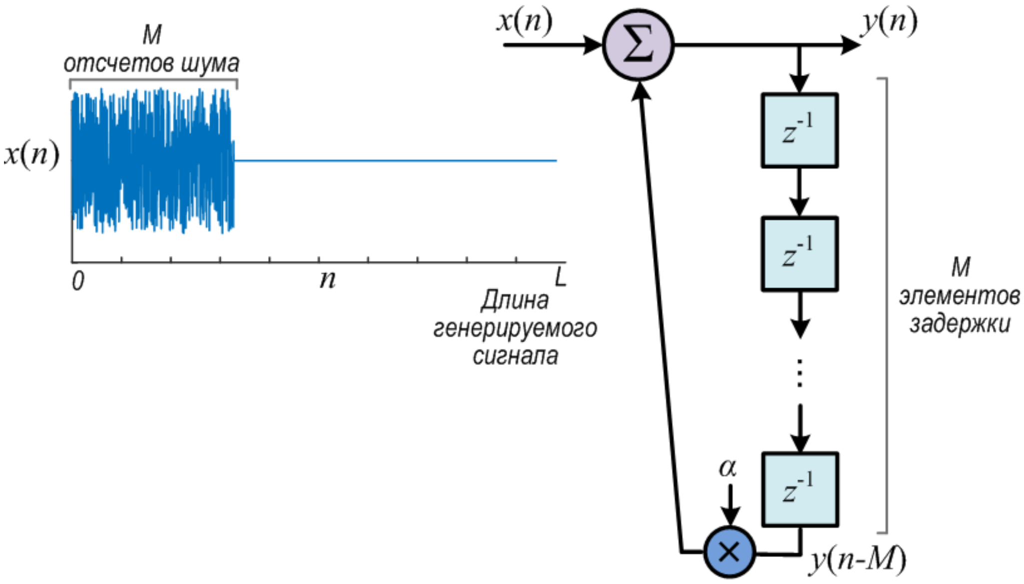


Рис. 3.21 – Схема ЛС-системы для имитации звука гитарной струны

Величина M определяет частоту генерируемой ноты. Например, нота ля первой октавы имеет частоту $f_0 = 440$ Гц. Если мы хотим сгенерировать эту ноту, то должны установить M равным одному периоду частоты f_0. С учетом частоты дискретизации f_s величина M будет определяться следующим образом:

$$M = \mathrm{round}(f_s/f_0). \tag{3.19}$$

Для генерирования звука струны согласно схеме на рис. 3.21 на вход требуется подать сигнал $x(n)$ длиной L, причем первые M отсчетов должны представлять шум, а остальные быть нулевыми. Сгенерировать шум (случайную последовательность) в MATLAB можно следующим образом

```
x=(1/4)*(rand(1,M)-0.5);
```

Параметр α в выражении (3.18) определяет коэффициент затухания, обычно он находится в диапазоне от 0,9 до 1,0. При значении близком к единице звук затухает медленно, при α =0,9 звук затихает быстро.

После того, как выходная последовательность $y(n)$ будет сгенерирована её можно сохранить в аудио-файл при помощи команды

```
audiowrite('ks_out.wav', y, fs);
```

и прослушать в аудио-редакторе.

3.3 Дополнительные задания

1) Для системы из задания 1 (вариант 2) найдите обратную. Также, используя MATLAB, выполните следующий эксперимент: пропустите дискретный синусоидальный сигнал через систему. Затем округлите (проквантуйте) значения сигнала до 2 знаков после запятой (полученный сигнал обозначим $y_q(n)$). Следующим этапом пропустите через обратную систему сигнал $y_q(n)$ и представьте на графике результат. Отдельно на графике покажите разницу между исходным и восстановленным сигналом.

2) Сгенерируйте с помощью функции из задания 7 девять сигналов с частотами 659, 622, 659, 622, 494, 587, 523 и 440 Гц, объедините их в один сигнал и сохраните в wav-файл.

3) По аналогии с примером, приведенным для системы (3.8) покажите, что ваша система обладает или не обладает свойством линейности.

4) Вычислить первые пять выходных значений фильтра

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \tag{3.20}$$

для случая $y(-1) = 0$ и $x(n) = u(n)$.

5) Вычислить первые пять выходных значений фильтра (3.20) для случая $y(-1) = 0$ и $x(n) = \delta(n)$. Дать формулу для $y(n)$.

6) Определите свойства следующей системы (запоминание, устойчивость, детерминированность, аддитивность, однородность, линейность, стационарность): В каждом случае поясните свой ответ

а) $y(n) = \sqrt{x(n)}$;
б) $y(n) = \mathrm{median}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$;
в) $y(n) = \lg(x(n) + x(n-1))$,
г) $y(n) = e^{x(n)}$,
д) $y(n) = ax(n) + b$.
е) $y(n) = x(-n)$.
ж) $y(n) = x(n) + 3u(n+1)$.
з) $y(n) = \sqrt{x(n+1) + 1}$,
и) $y(n) = n^2 x(n-1)$,
к) $y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1$.
л) $y(n) = 2x(n) + \frac{x(n+1)x(n-1)}{x(n)}$.

м) $y(n) = x(n)\sin(\frac{n\pi}{2})$.
н) $y(n) = Re\{x(n) + x(n-1)\}$.
о) $y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n))$

7) Определить импульсную характеристику следующих систем:
а) $y(n) = x(n-1)$
б) $y(n) = n^2 x(n-1)$
в) $y(n) = \sum_{k=-5}^{5} x(n-k)$.

8) Найти выход ЛС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = 0.25\delta(n) + 0.75\delta(n-1) - 0.75\delta(n-2) - 0.25\delta(n-3)$$

при подаче на вход сигнала $x(n) = u(n-1) - u(n-7)$.

9) Рассмотрите систему, входной и выходной сигналы которой связаны разностным уравнением

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

Предположим, что $y(-1) = 0$ вне зависимости от входного сигнала. Определите, является ли данная система устойчивой. В случае положительного ответа подтвердите его аргументами. Отрицательный ответ подкрепите контрпримерами.

10) Итеративно решите следующие разностное уравнение (т.е. найдите первые 3 члена последовательности $y(n)$):

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

если $y(-1) = -25$ и $y(-2) = 0$.

11) Найдите первые 4 члена импульсной характеристики линейной стационарной системы, описываемой разностным уравнением:

$$y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 2x(n) - x(n-1).$$

12) Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n-1)$$

а) Найти импульсную характеристику системы;

б) Вычислить отклик системы на единичный скачок.

13) Найдите КЧХ $H(e^{j\omega})$ ЛС-системы, у которой входной и выходной сигналы удовлетворяют разностному уравнению

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2).$$

14) Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему с КЧХ

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

15) ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2).$$

а) Найдите импульсную характеристику $h(n)$ системы.

б) Определите КЧХ $H\left(e^{j\omega}\right)$ системы. Используя формулы тригонометрии, упростите выражение для $H\left(e^{j\omega}\right)$.

16) Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y(n) = \frac{3}{2}y(n-1) + y(n-2) + x(n-1).$$

а) Найдите импульсную характеристику системы.

б) Является ли система устойчивой?

17) Рассмотрите систему, входной и выходной сигналы которой связаны разностным уравнением

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n).$$

Предположим, что $y(-1) = 0$ вне зависимости от входного сигнала. Определите, является ли данная система устойчивой. В случае положительного ответа подтвердите его аргументами. Отрицательный ответ подкрепите контрпримерами.

18) Для следующей системы $y(n) = T\{x(n)\}$ определите, является ли она: 1) устойчивой; 2) детерминированной; 3) однородной; 4) аддитивной; 5) линейной; 6) стационарной; 7) системой без памяти. В каждом случае поясните свой ответ.

$$T\{x(n)\} = x(-n).$$

19) Найдите первые 4 члена импульсной характеристики линейной стационарной системы описываемой разностным уравнением:

$$y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 2x(n) - x(n-1).$$

20) Определите обладают или не обладают стационарностью (инвариантностью к сдвигу) следующие системы:

а) $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$.

б) $y(n) = x(n)u(n)$.

в) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$.

г) $y(n) = x(n^2)$

д) $y(n) = x(\langle n \rangle_N)$, где N – фиксированное целое число.

е) $y(n) = x(-n)$.