Теория и применение цифровой обработки сигналов

Расчет КИХ-фильтров методом оконного взвешивания

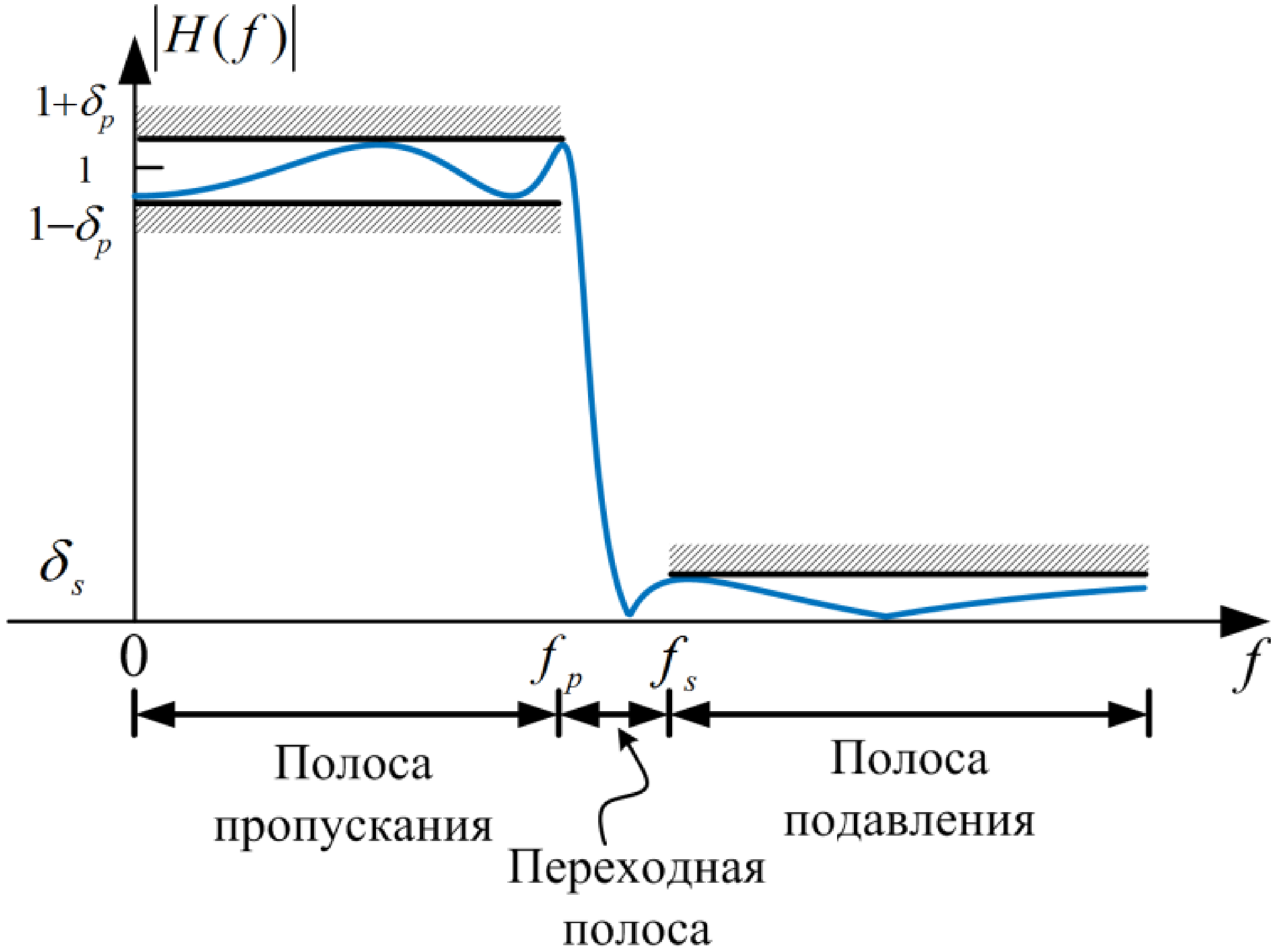
д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

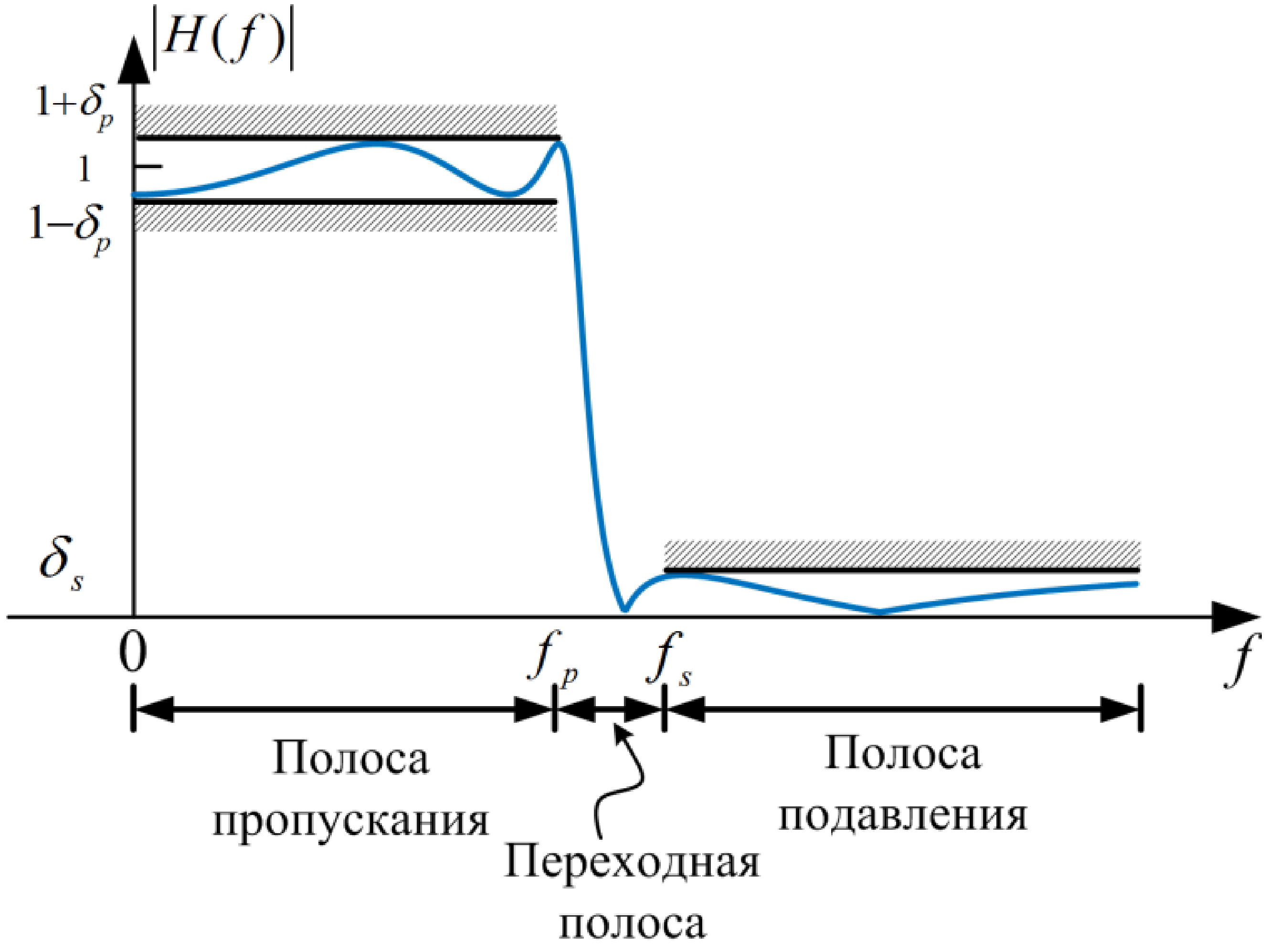
Кафедра электронных вычислительных средств

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;

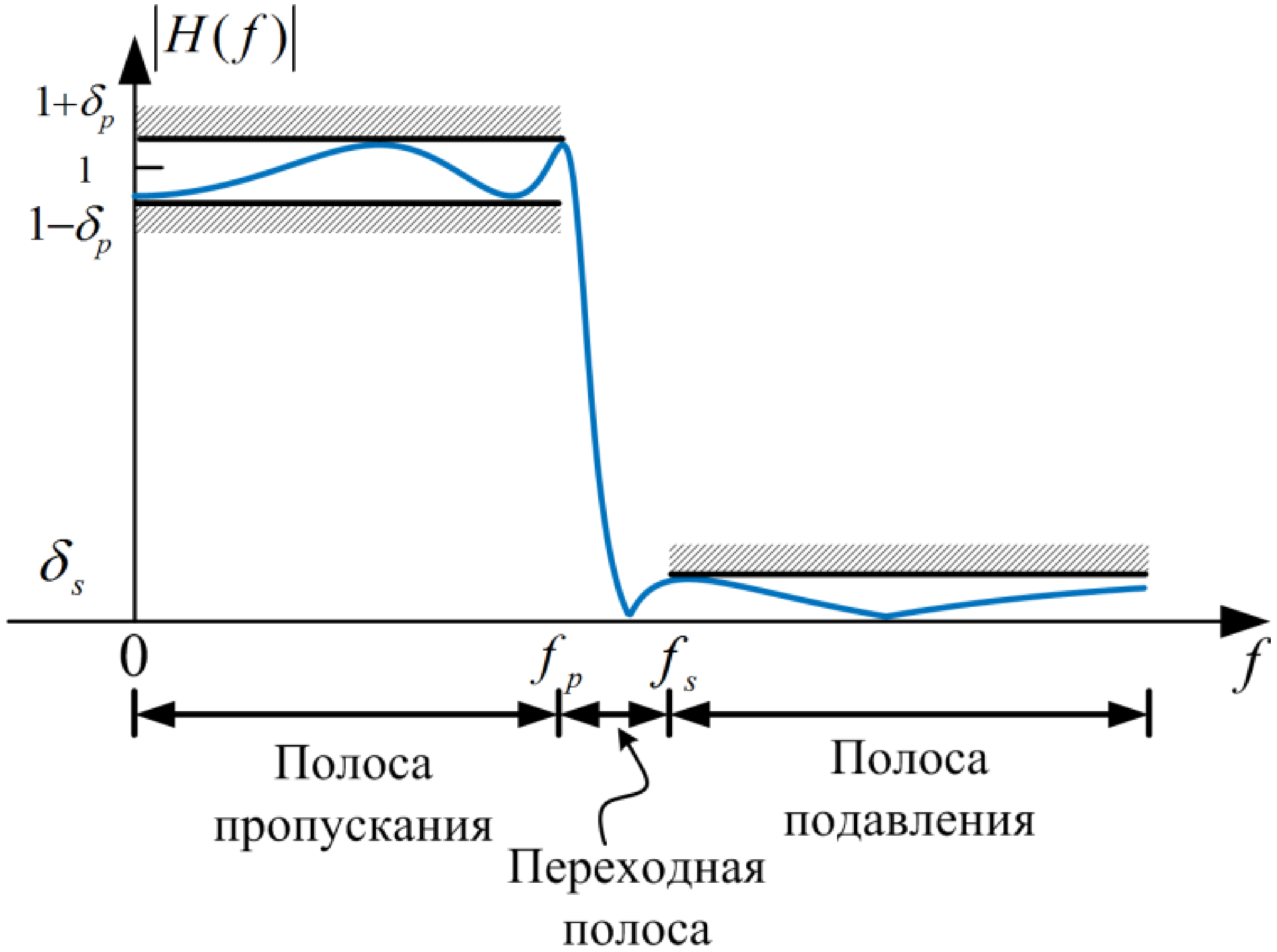
Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;

δ_p – отклонение в полосе пропускания;

Спецификация на фильтр

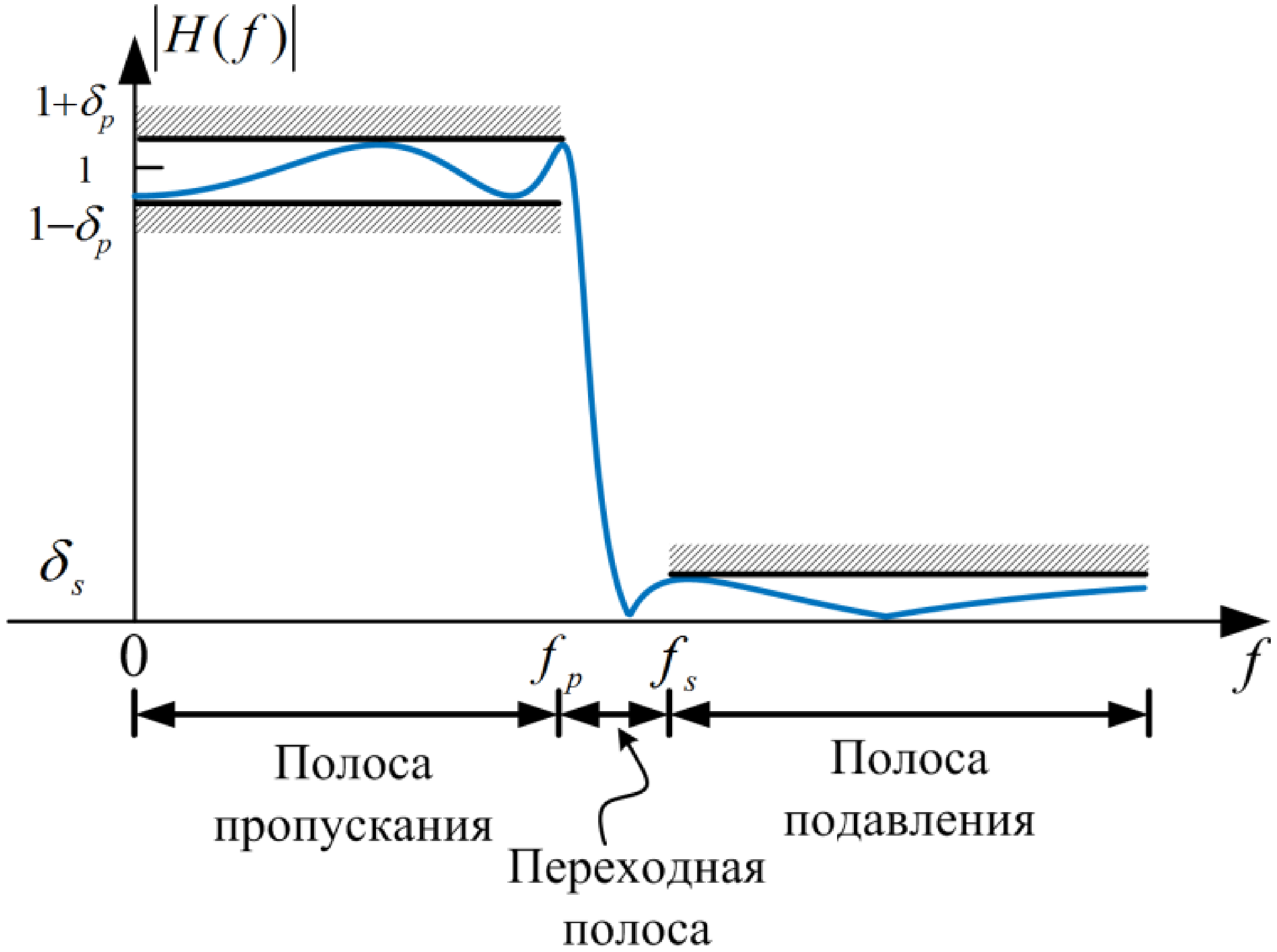


δ_s – отклонение в полосе подавления;

δ_p – отклонение в полосе пропускания;

f_p – граничная частота полосы пропускания;

Спецификация на фильтр



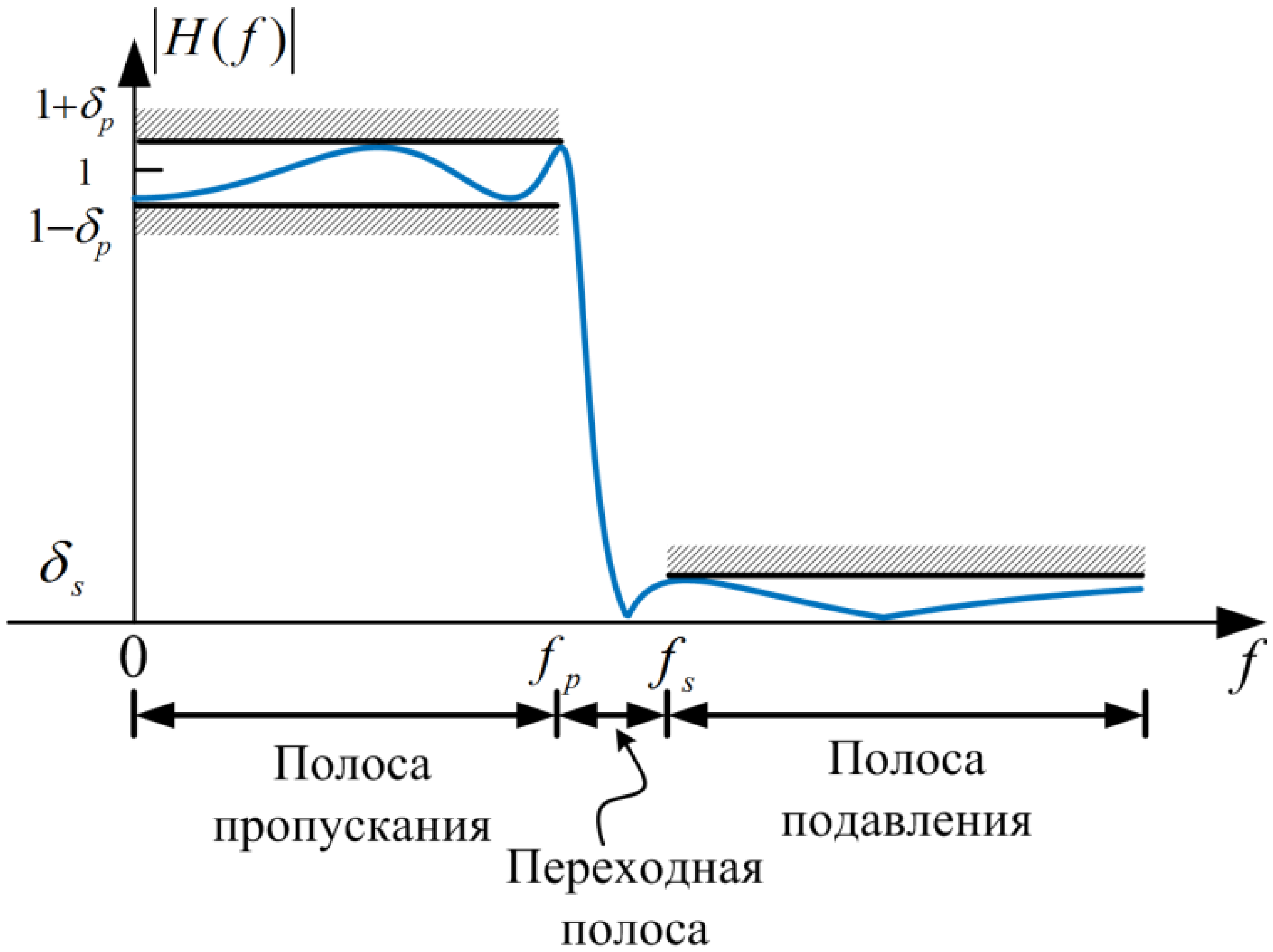
δ_s – отклонение в полосе подавления;

δ_p – отклонение в полосе пропускания;

f_p – граничная частота полосы пропускания;

f_s – граничная частота полосы подавления.

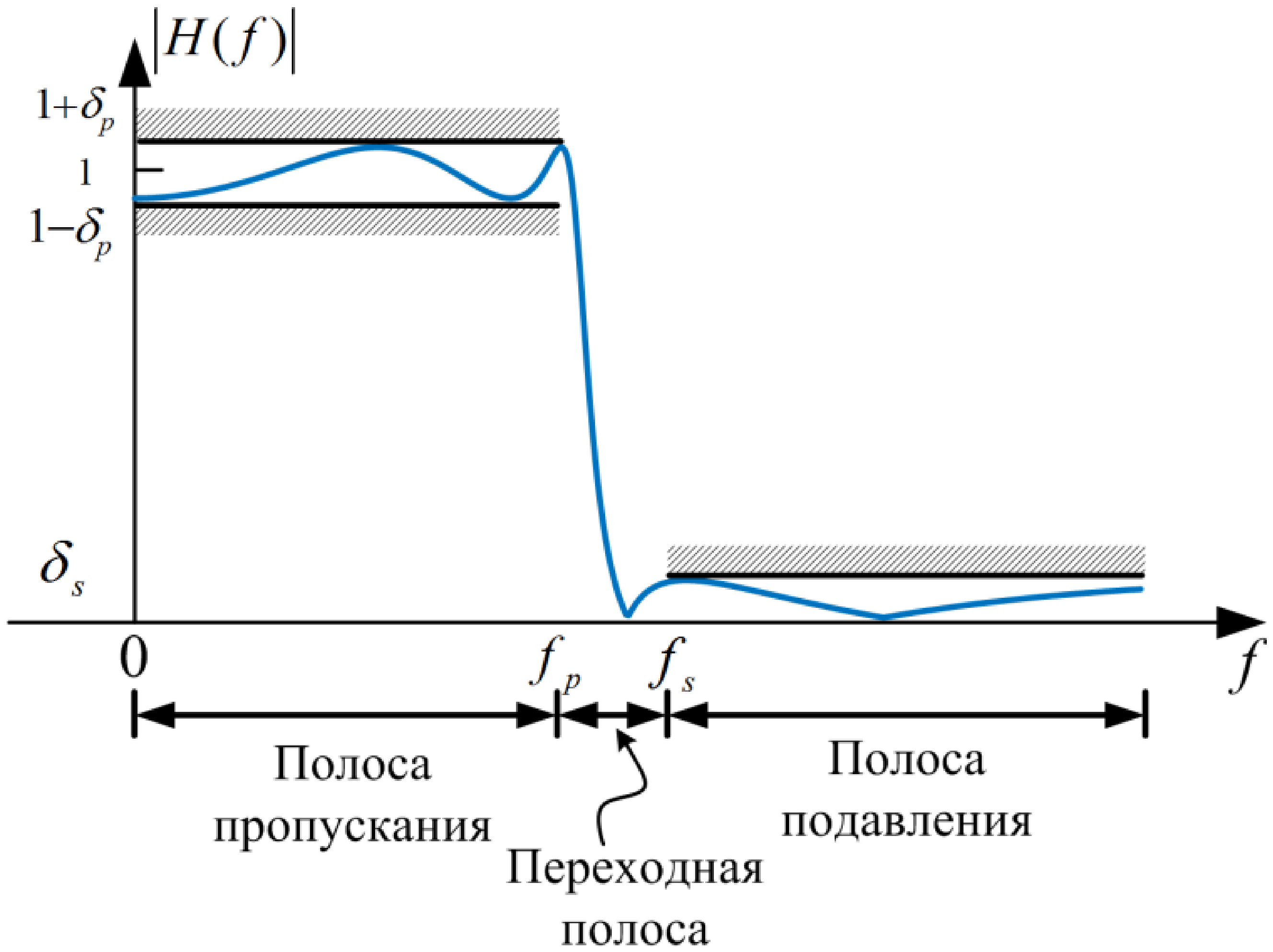
Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации ($f\,/F_s$) или от частоты Найквиста ($f\,/F_N$).

Спецификация на фильтр



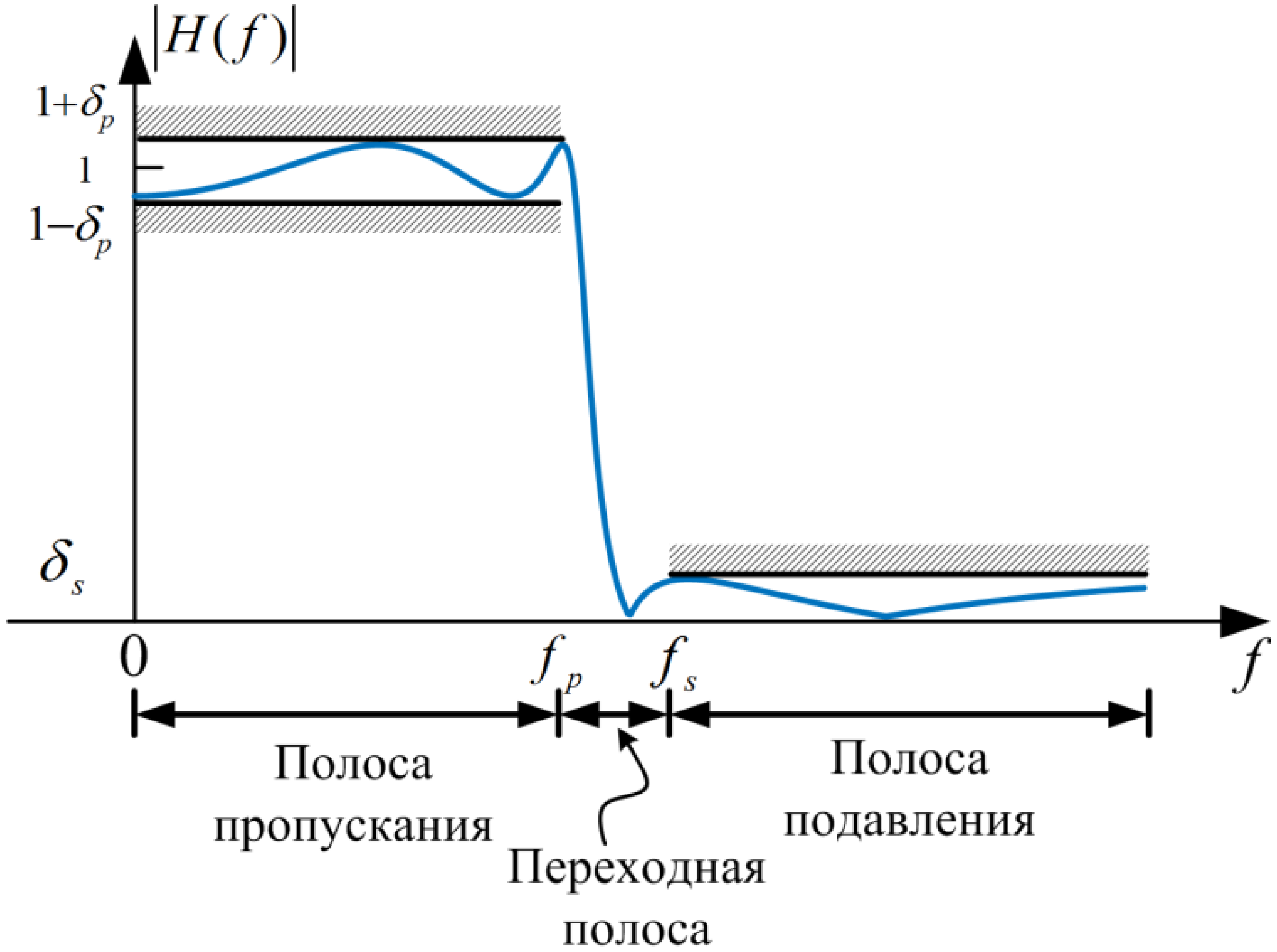
δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации (f/F_s) или от частоты Найквиста (f/F_N).

Неравномерность в полосе пропускания

$$A_p = 20\log_{10}(1+\delta_p).$$

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации ($f\,/F_s$) или от частоты Найквиста ($f\,/F_N$).

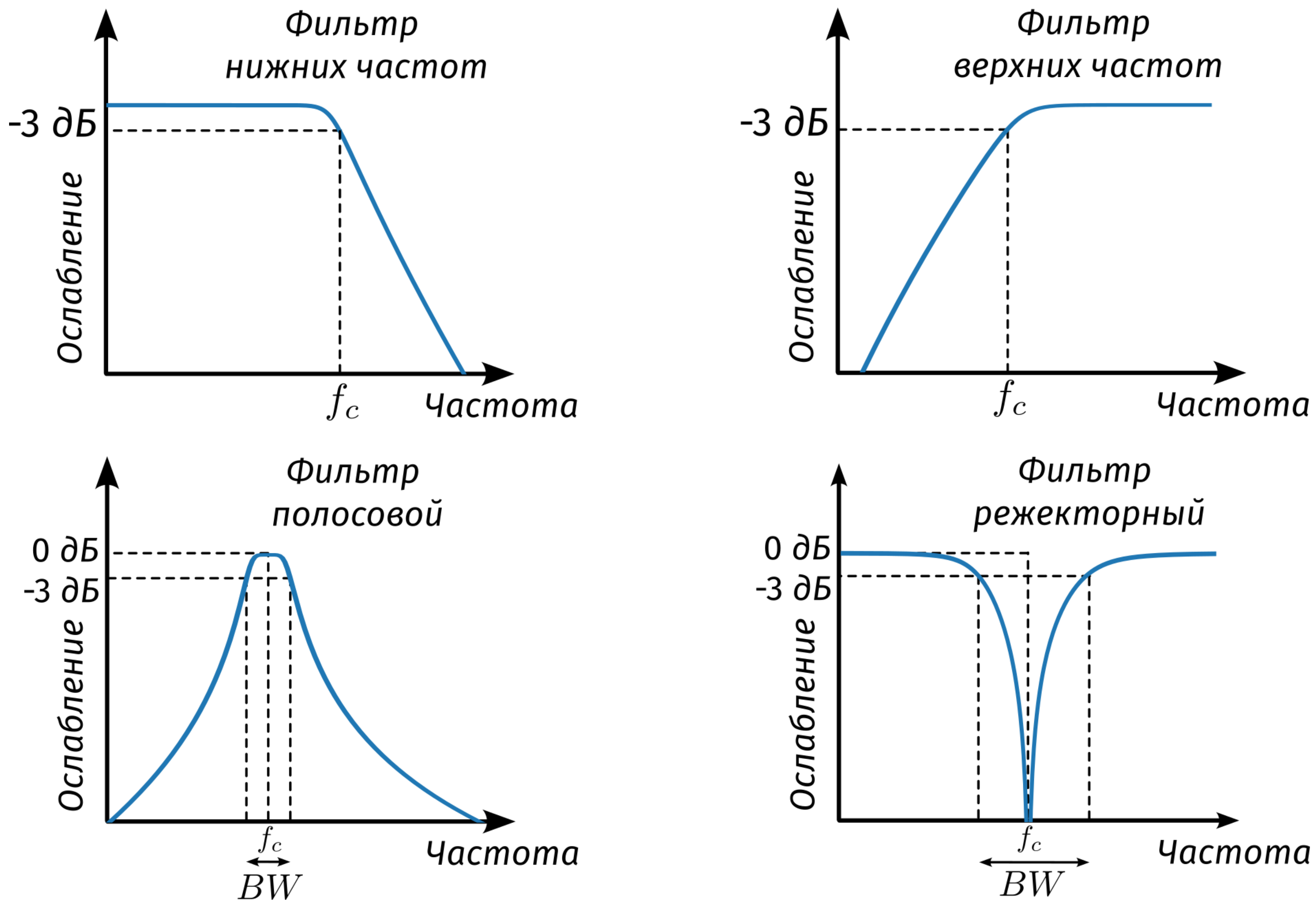
Неравномерность в полосе пропускания

$$A_p = 20\log_{10}(1+\delta_p).$$

Минимальное затухание в полосе подавления:

$$A_s = -20\log_{10}\delta_s.$$

Классификация фильтров по виду АЧХ



1) Фильтры нижних частот (ФНЧ);
2) Фильтры верхних частот (ФВЧ);
3) Полосно-пропускающий фильтр;
4) Полосно-заграждающий фильтр (режекторные).

Добротность
(Q – quality factor)

$$Q = \frac{f_c}{BW}.$$

Процесс проектирования фильтра

Проектирование фильтра начинается с формулировки требований.

- Например, необходимо спроектировать фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $f_c = 1\ \text{кГц}$ и заданным затуханием в полосе ослабления A_s.
- На начальном этапе определяется частота дискретизации f_s (или шаг дискретизации ΔT), которая будет определять полосу обрабатываемых сигналов $[0,\ F_N]$, где $F_N = \frac{f_s}{2}$ – частота Найквиста. Все остальные частоты выражаются в долях частоты Найквиста.
- При проектировании фильтров также часто используют нормированную круговую частоту $\omega = \frac{\Omega}{f_s}$, где Ω – аналоговая частота (в рад/секунду). В этом случае $\omega = \pi$ (рад/отсчет) соответствует частоте Найквиста.

КИХ-фильтр с линейной ФЧХ

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}.$$

Частотная характеристика КИХ-фильтра является 2π-периодичной функцией.

- Часто требуется, чтобы ФЧХ фильтра имела линейный вид. В этом случае фильтр вносит одинаковую задержку для всех частотных компонент.

- Передаточная функция $H(z)$ имеет ***линейную фазу***, если

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_{zp}(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)},$$

где $H_{zp}(\omega)$ – действительная четная функция от ω. $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=|H_{zp}(\omega)|$.

- Фаза $H\left(e^{j\omega}\right)$

$$\arg H(e^{j\omega})=\begin{cases}-\alpha\omega-\beta, & H_{zp}(\omega)>0,\\ -\alpha\omega-\beta-\pi, & H_{zp}(\omega)<0.\end{cases}$$

КИХ-фильтр с линейной ФЧХ

- Есть четыре варианта получить линейную фазу в КИХ-фильтре. Фильтры могут быть четной/нечетной длины и иметь четную или нечетную симметрию

$h(N-1-n)=h(n)$ для всех n – ***четная симметрия***

$h(N-1-n)=-h(n)$ для всех n – ***нечетная симметрия***

Пример

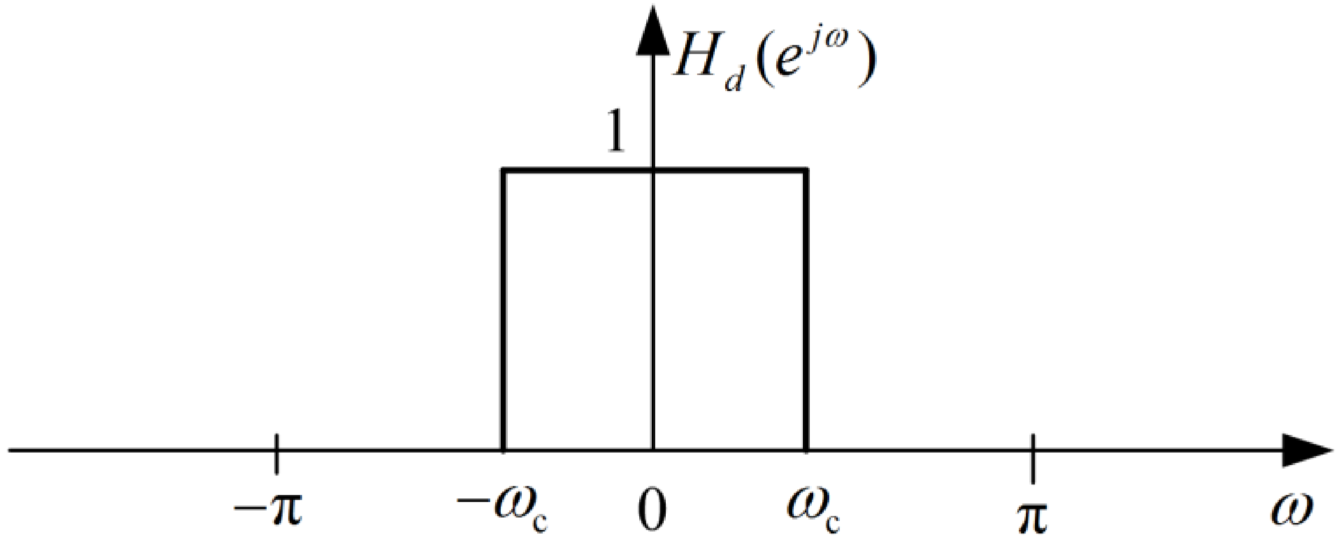
$N=2M+1$, тогда $h(M+n)=h(M-n)$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{k=-M}^{M}h(M+k)e^{-j\omega(k+M)}$$

$$=\underbrace{e^{-jM\omega}}_{\substack{e^{-j(\alpha\omega+\beta)} \\ \alpha=M,\ \beta=0}}\underbrace{\left(h(M)+2\sum_{k=1}^{M}h(M+k)\cos\omega k\right)}_{H_{zp}(\omega)}.$$

Метод оконного взвешивания (1)

- Ограничимся рассмотрением фильтров с линейной фазой.
- Рассмотрим задачу расчёта КИХ-фильтра с нижних частот

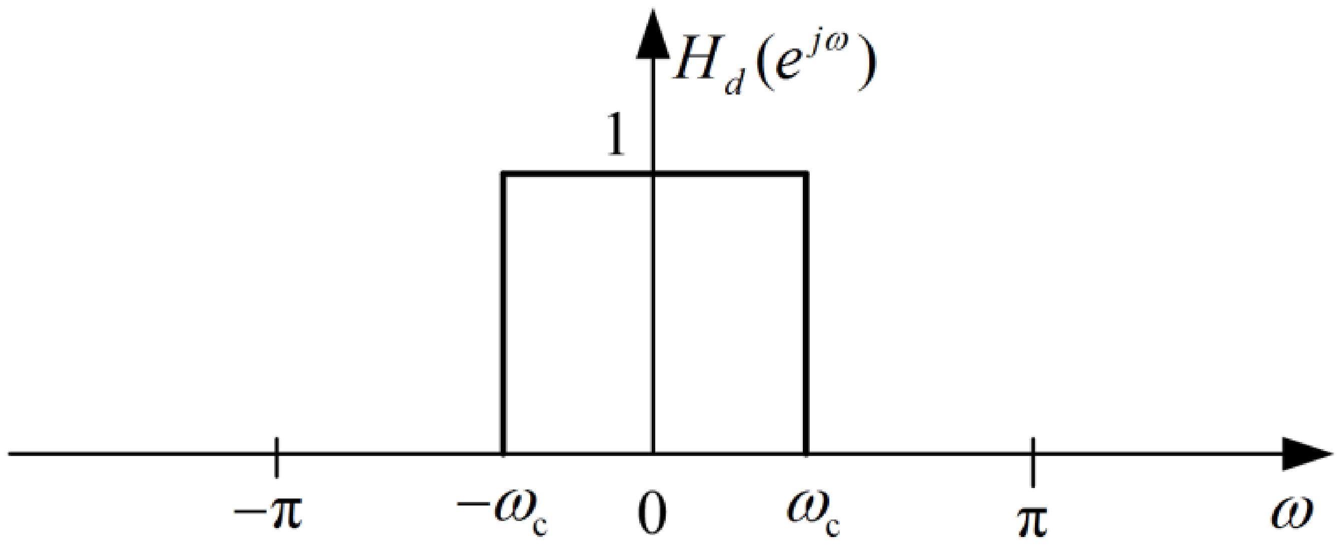


Мы ищем коэффициенты дискретного фильтра $h_d(n)$, которые связаны с $H_d(e^{j\omega})$ дискретным временным преобразованием Фурье (ДВПФ).

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = ?$$

Метод оконного взвешивания (1)

- Рассмотрим задачу расчёта КИХ-фильтра с нижних частот

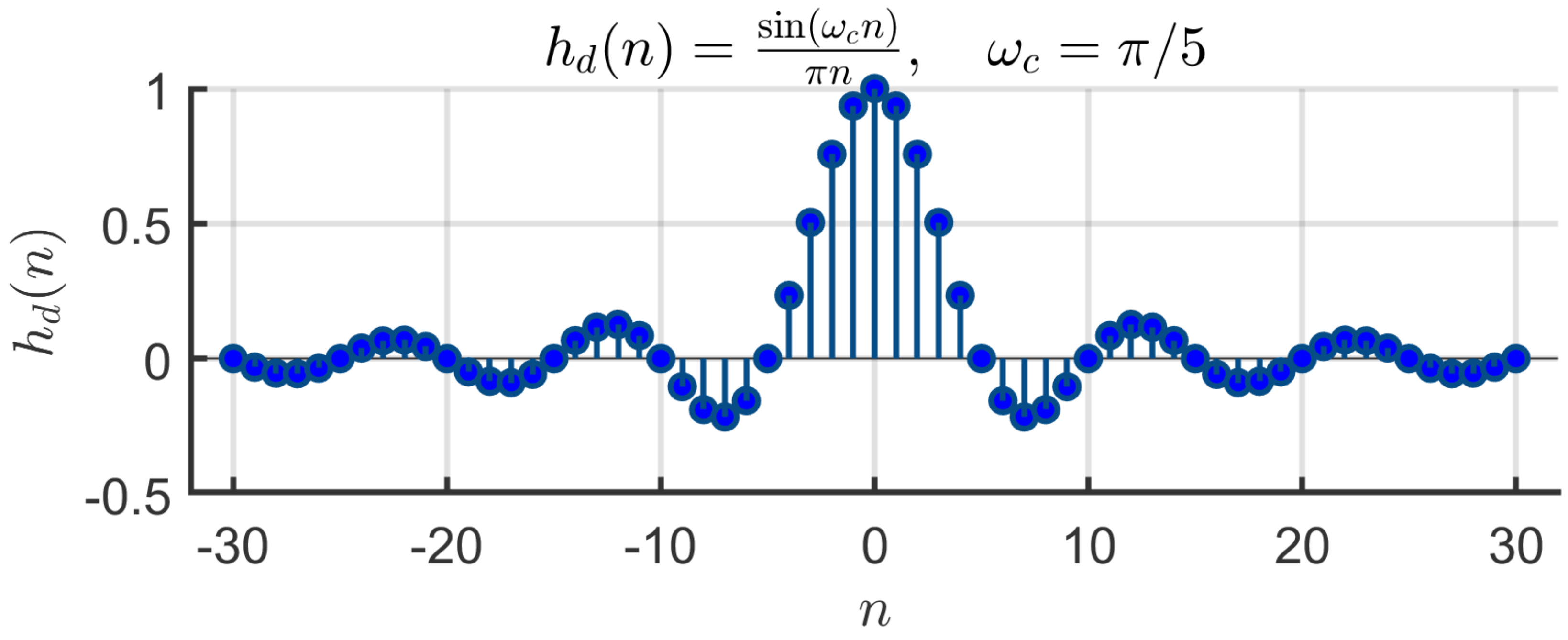


Мы ищем коэффициенты дискретного фильтра $h_d(n)$, которые связаны с $H_d(e^{j\omega})$ дискретным временным преобразованием Фурье (ДВПФ).

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}.$$

Метод оконного взвешивания (2)

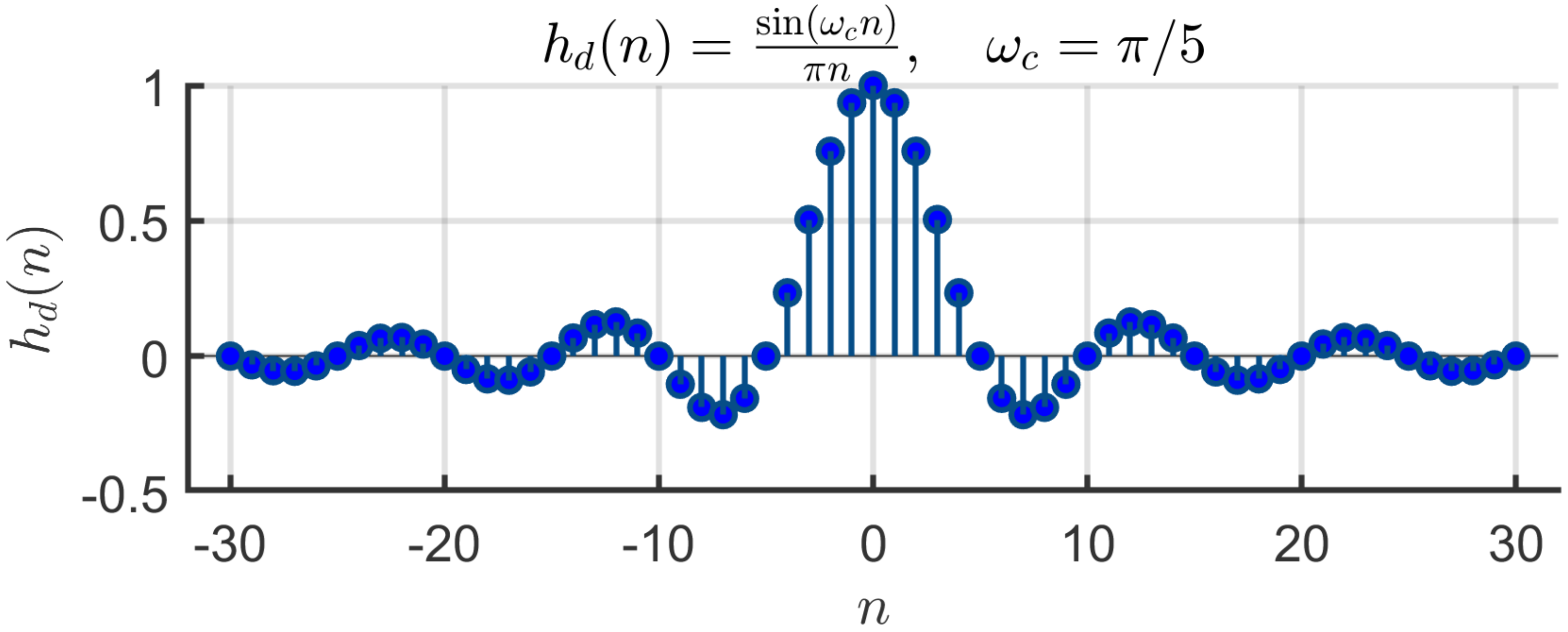
Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



Число коэффициентов фильтра бесконечно ….

Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)

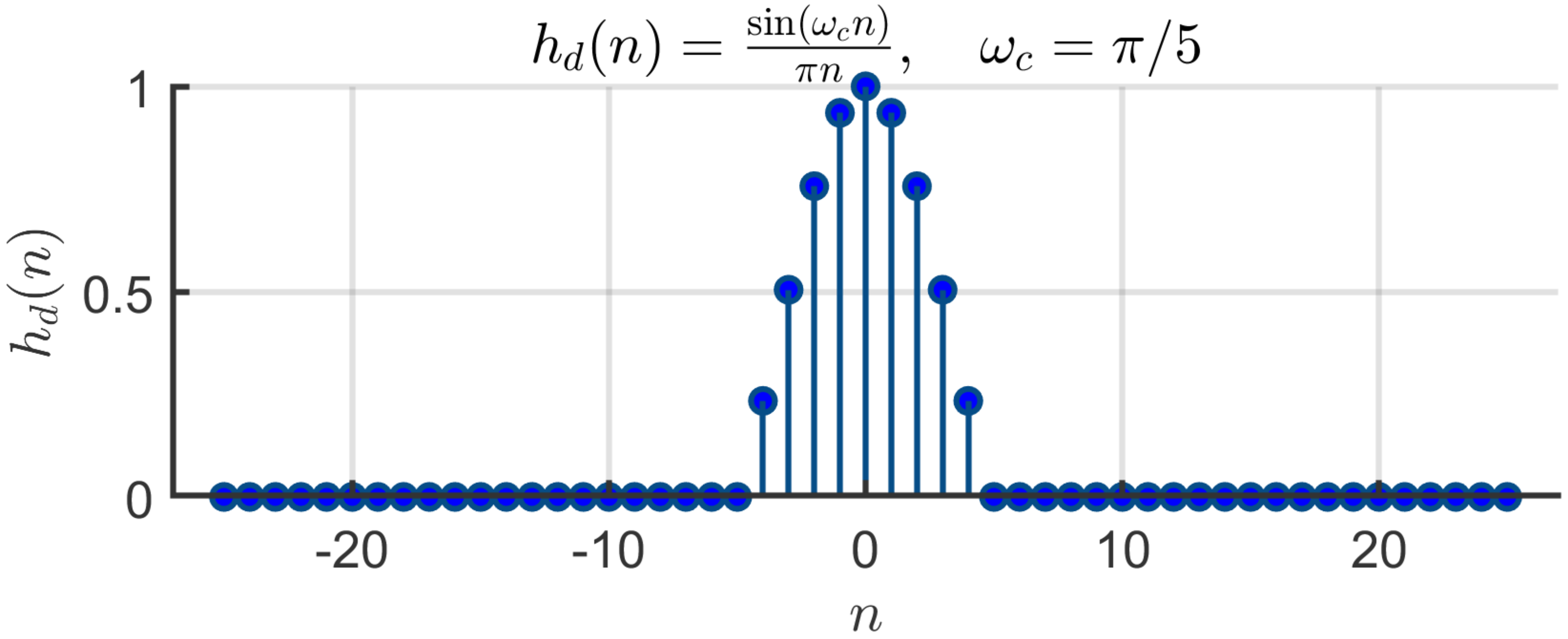


Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$

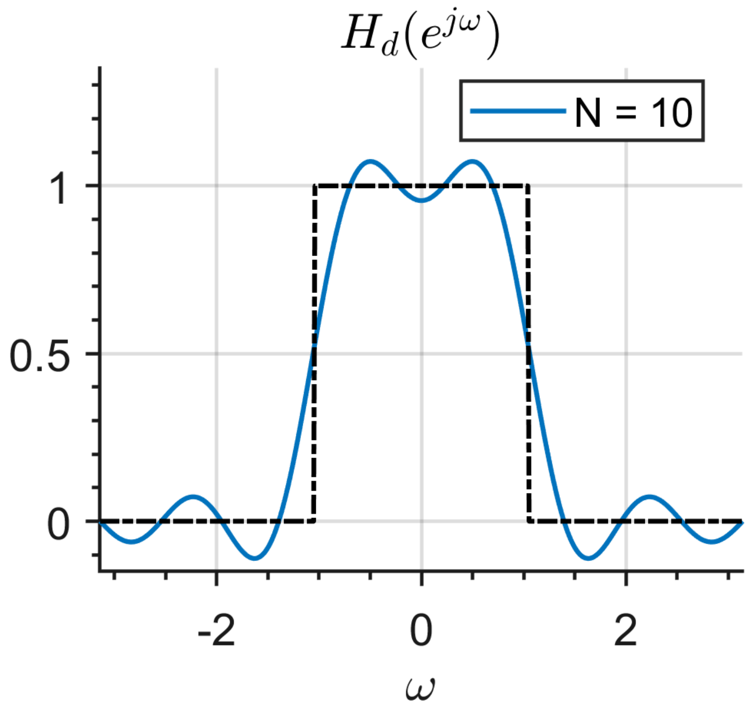
Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



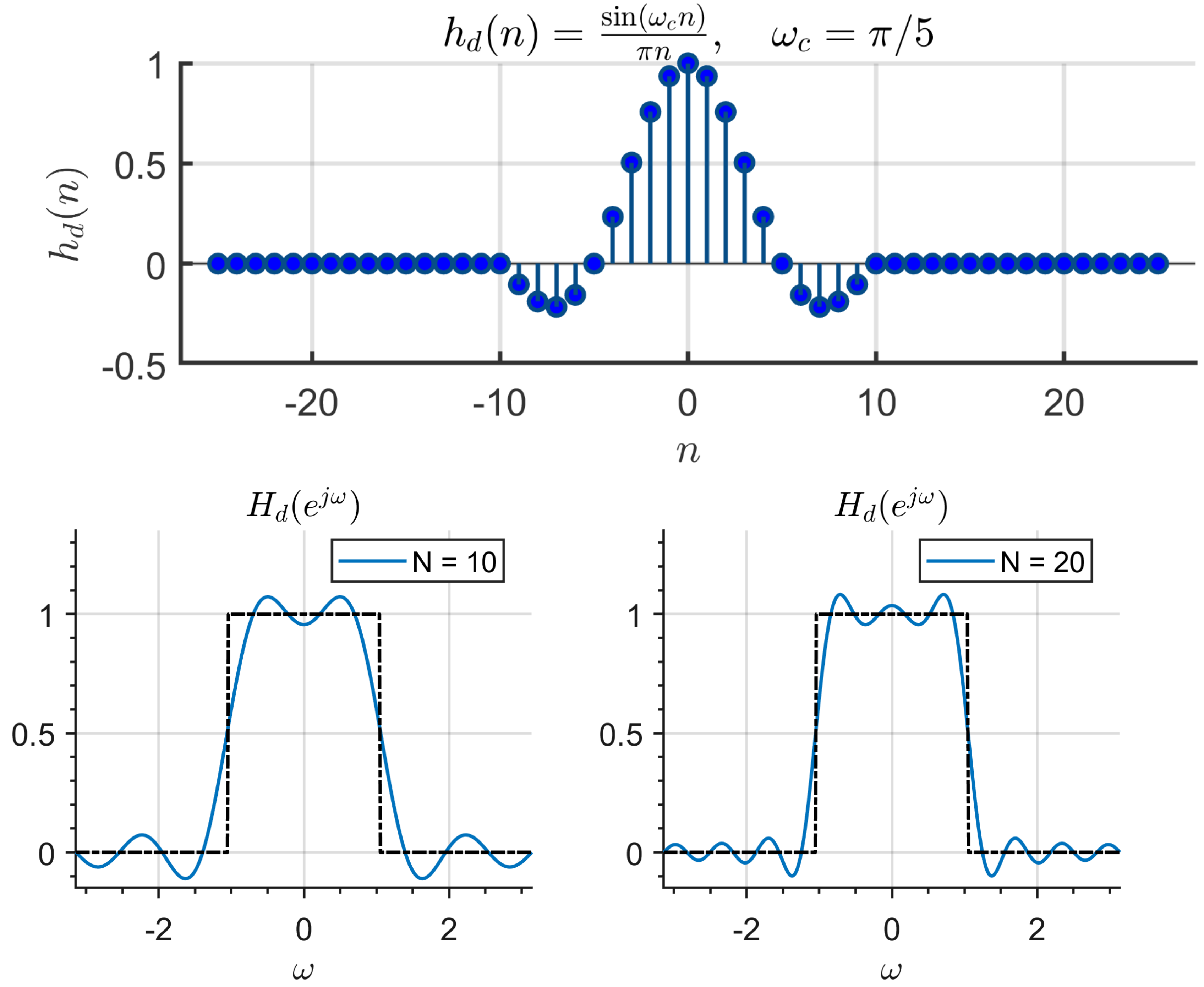
Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$



Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)

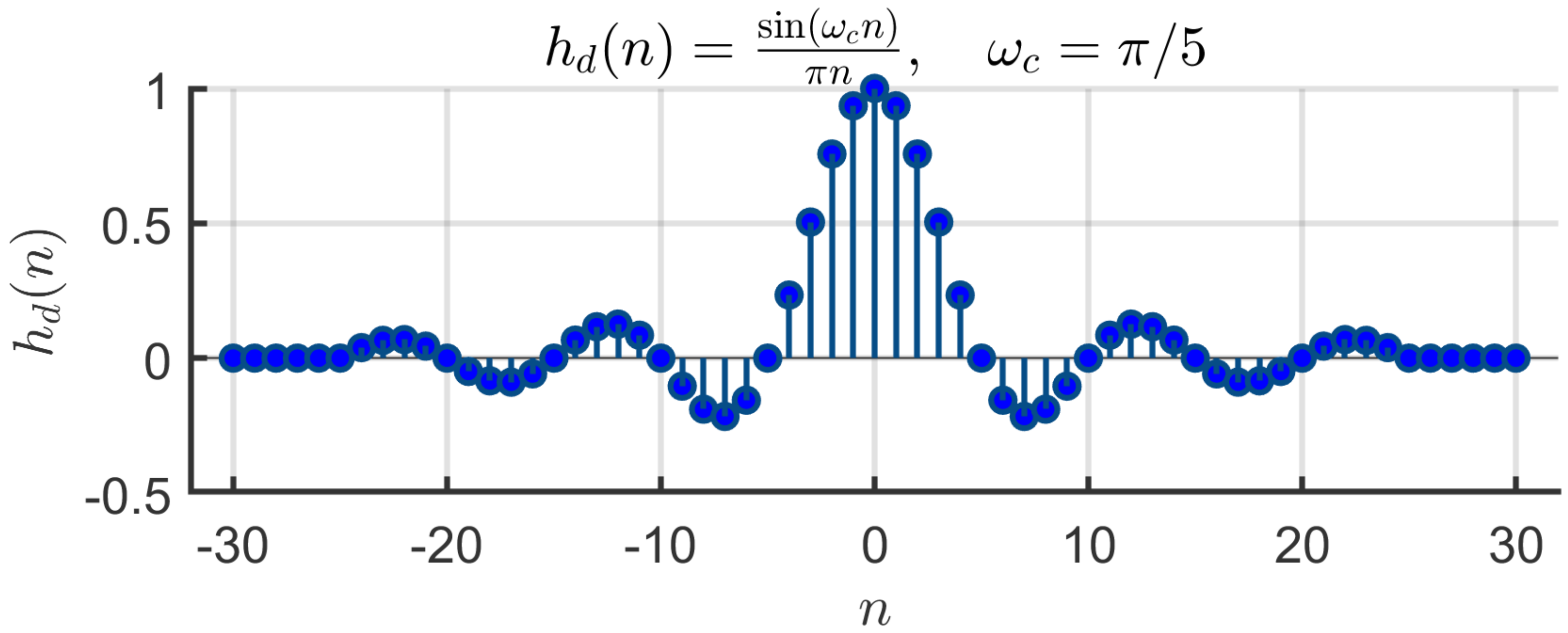


Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n)e^{j\omega n}$$

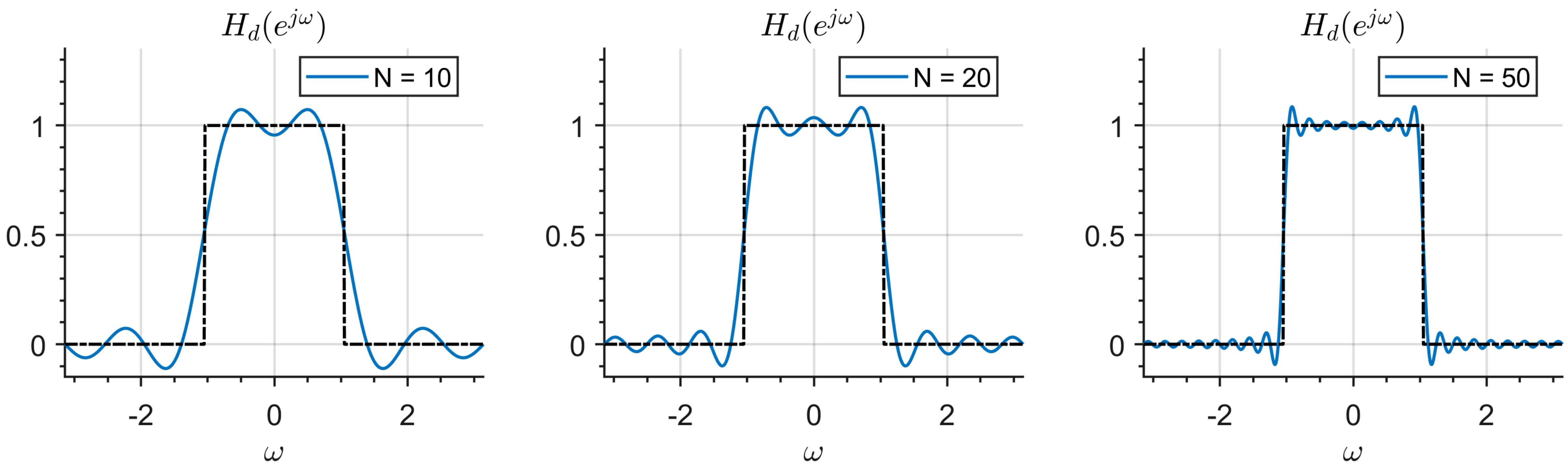
Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$



Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра $h(n)$ получается умножением импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра $h(n)$ получается путем умножения импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Это равносильно свертке в частотной области

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}).$$

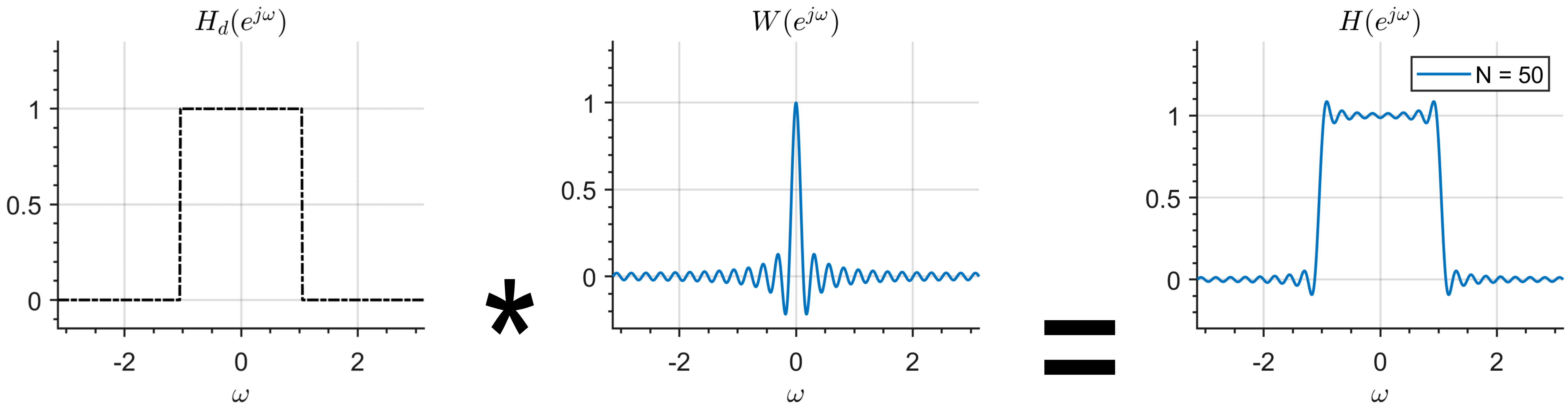
Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра $h(n)$ получается путем умножения импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

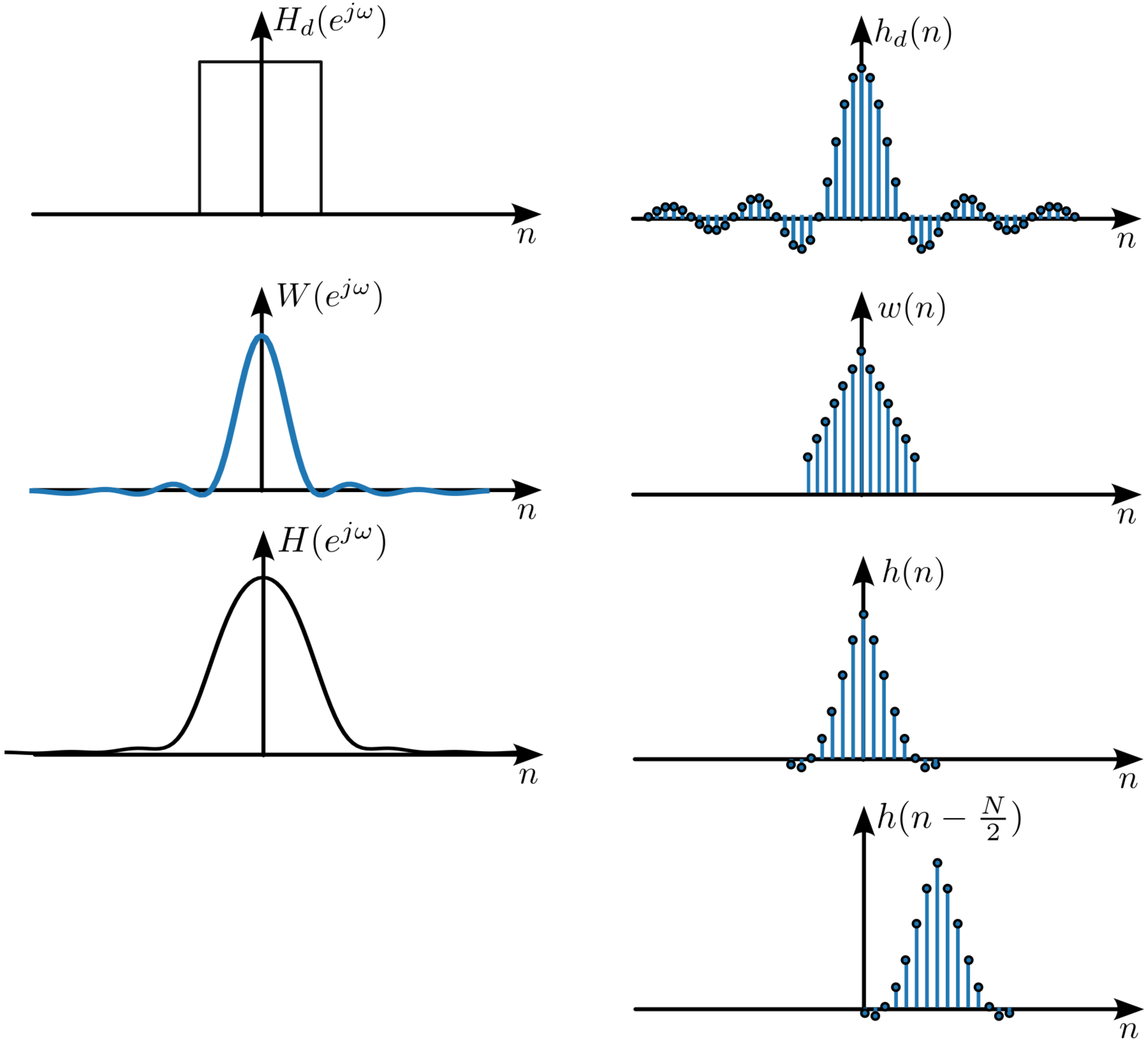
$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Это равносильно свертке в частотной области

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}).$$



Четыре этапа метода оконного взвешивания



Пример проектирования фильтра

- Пусть необходимо рассчитать КИХ-фильтр нижних частот длины $N = 13$, частота среза $f_c = 100$ Гц, частота дискретизации $f_s = 1000$ Гц.
- В терминах нормализованной частоты, частота среза равна:

$$\omega_c = 2\pi \cdot (f_c/f_s) = \pi/5.$$

- Идеальная импульсная характеристика:

$$h_d(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \frac{\sin \pi n/5}{\pi n} = \frac{1}{5}\operatorname{sinc}(\frac{n}{5})$$

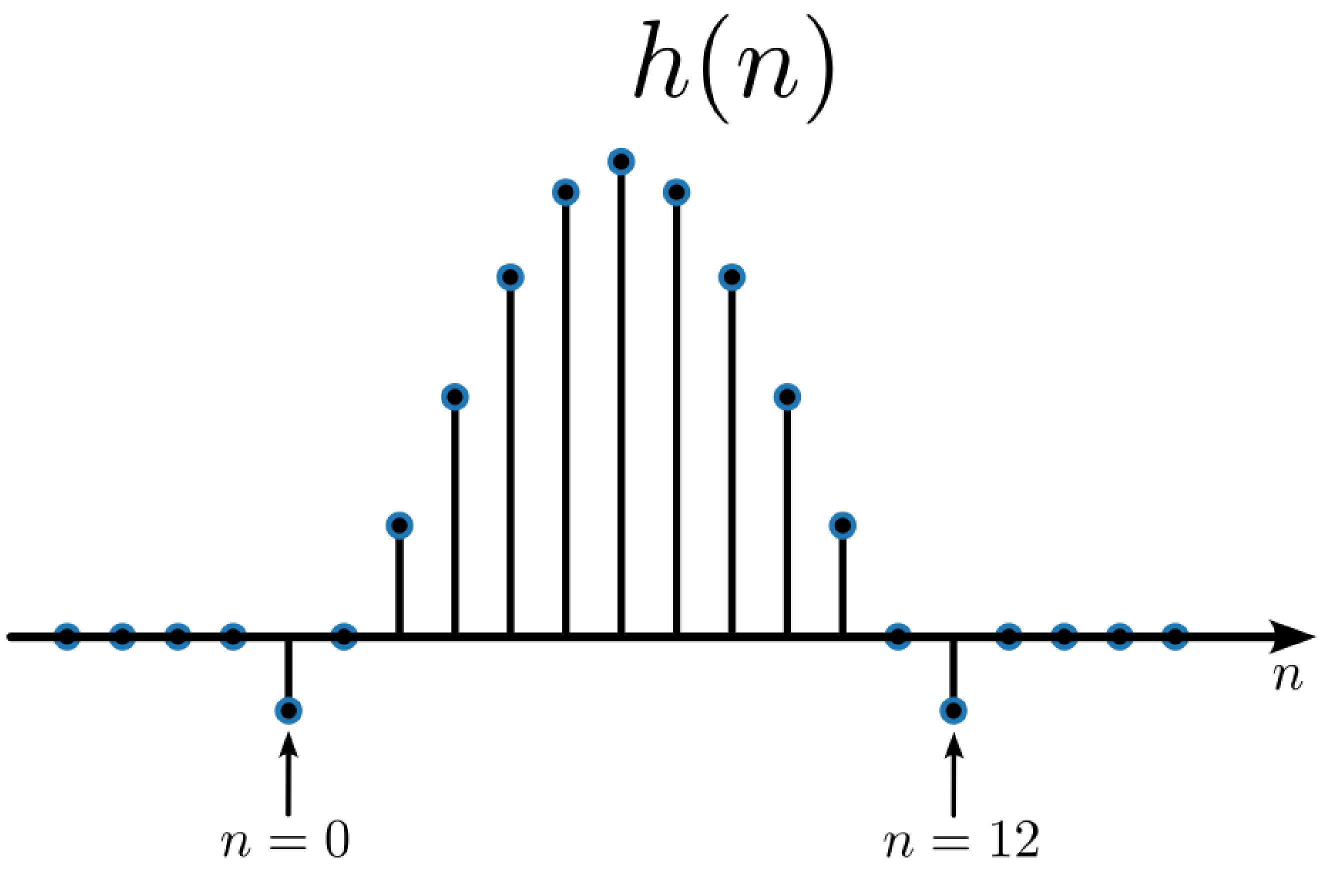
- Импульсная характеристика детерминированного КИХ-фильтра:

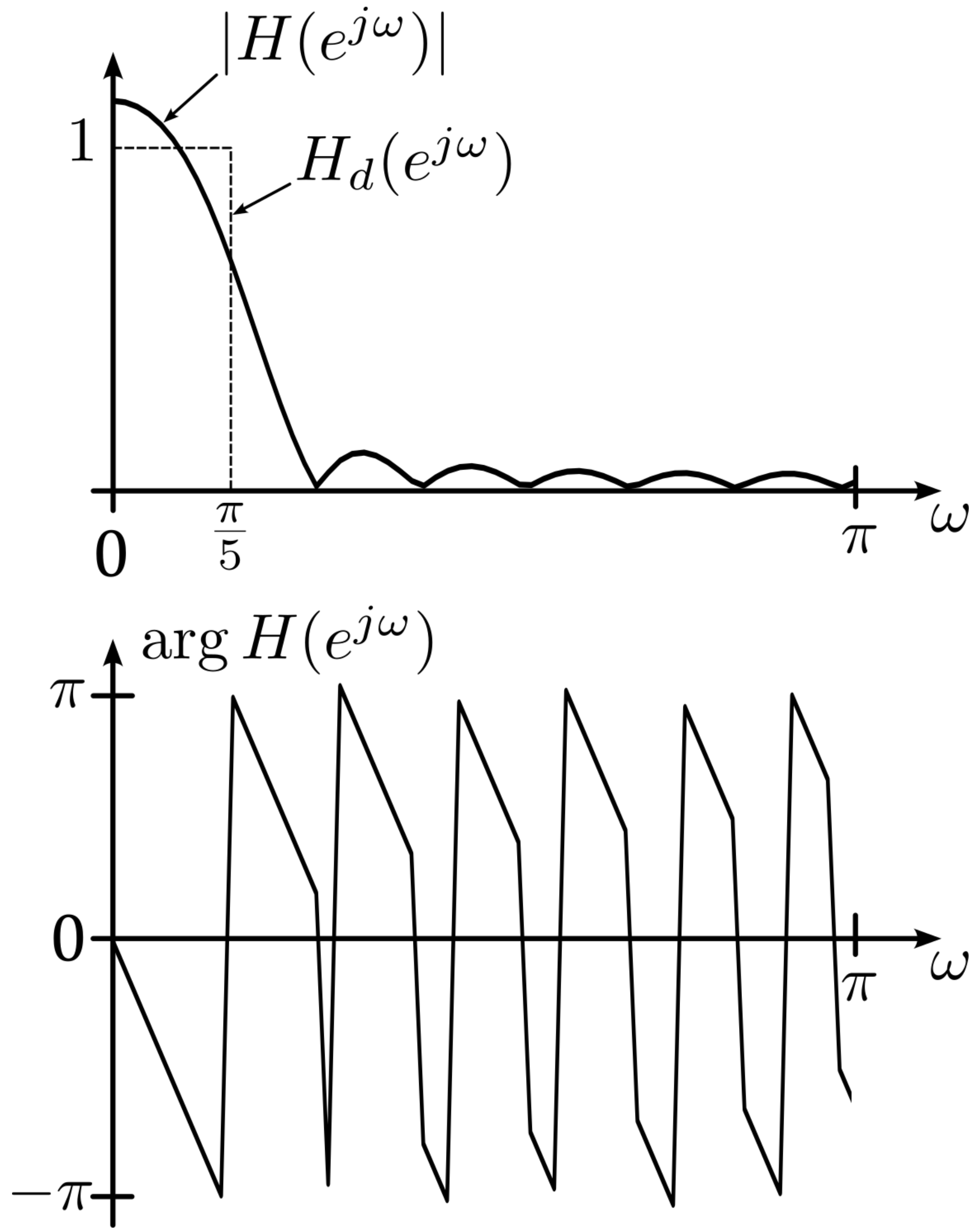
$$h(n) = h\left(n - \frac{N-1}{2}\right) = \frac{1}{5}\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{5}(n-6)\right).$$

Пример проектирования фильтра

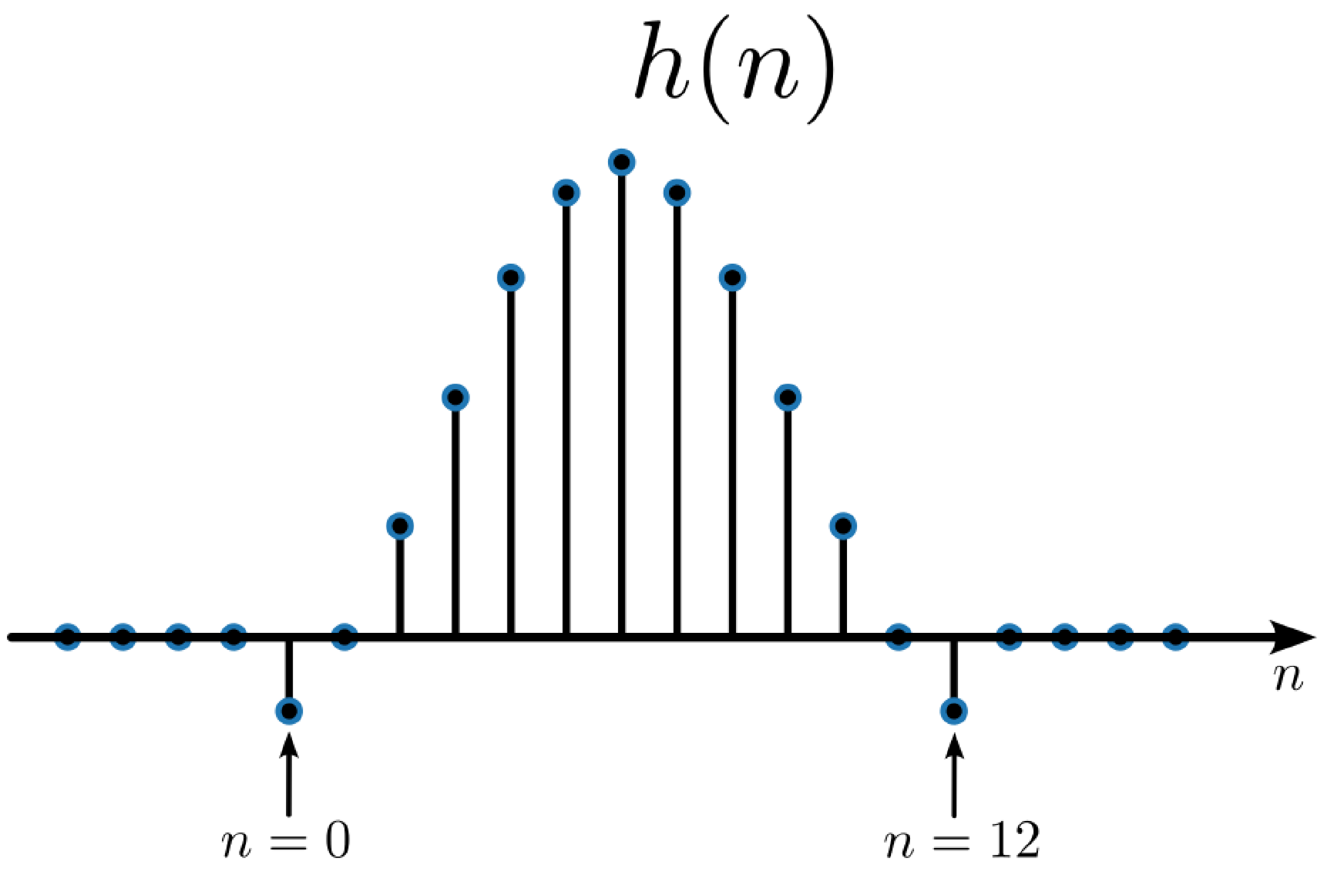
- Импульсная характеристика детерминированного КИХ-фильтра:

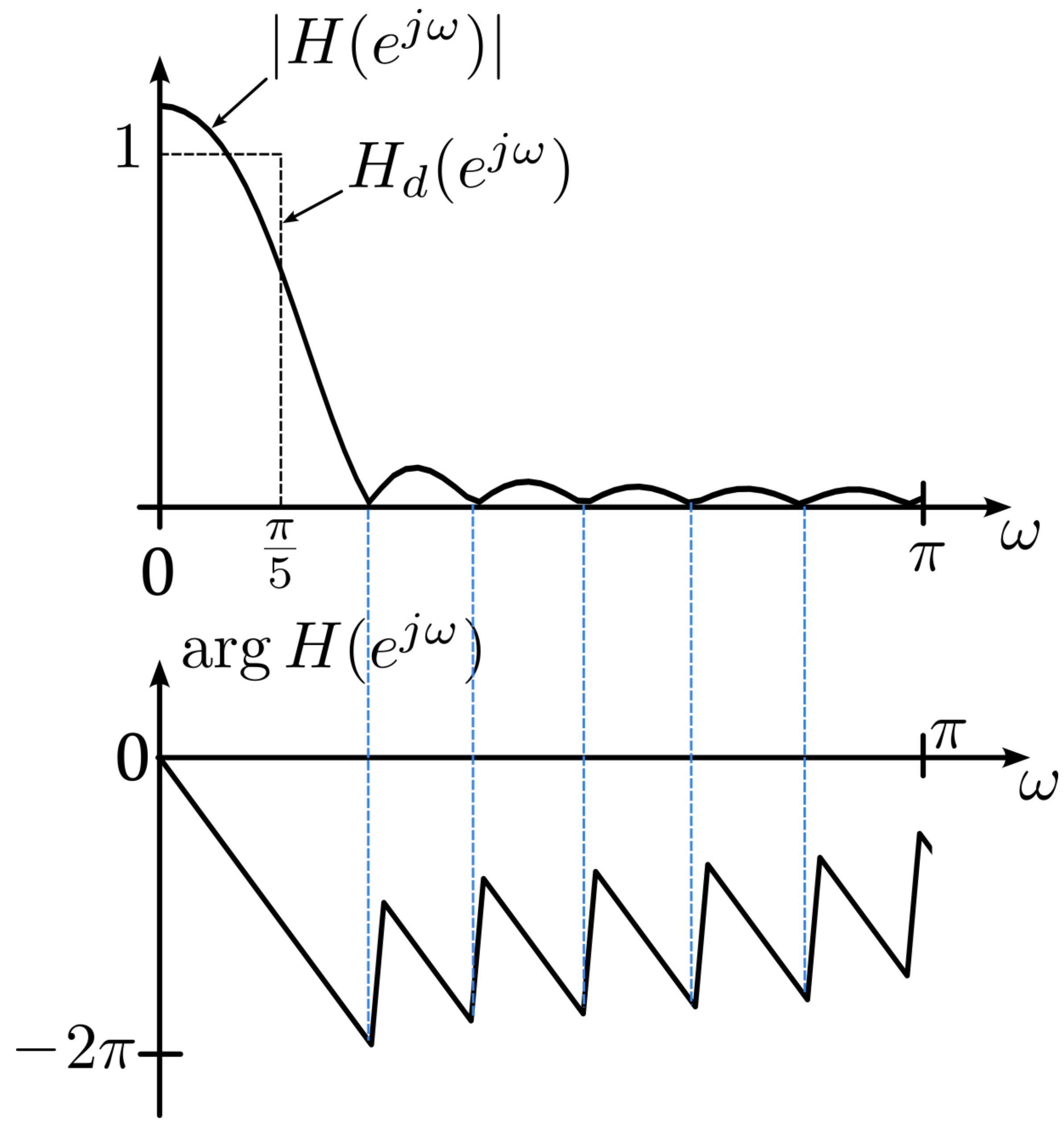
$$h(n) = h\left(n - \frac{N-1}{2}\right) = \frac{1}{5}\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{5}(n-6)\right).$$





Пример проектирования фильтра






```
unwrap([-pi-0.1, pi-0.5])=
[-3.2415 -3.6415]
```

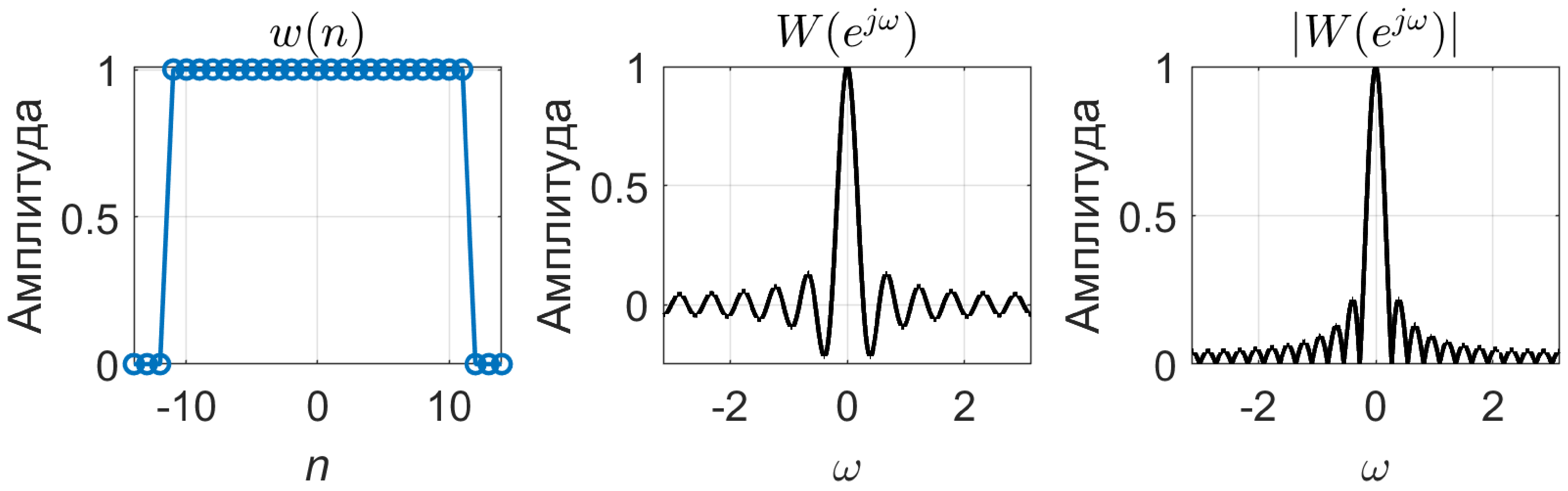
Прямоугольное окно

$$w(n) = \begin{cases} 1, & -N \le n \le N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Частотная характеристика

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-jn\omega} = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}(2N+1)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

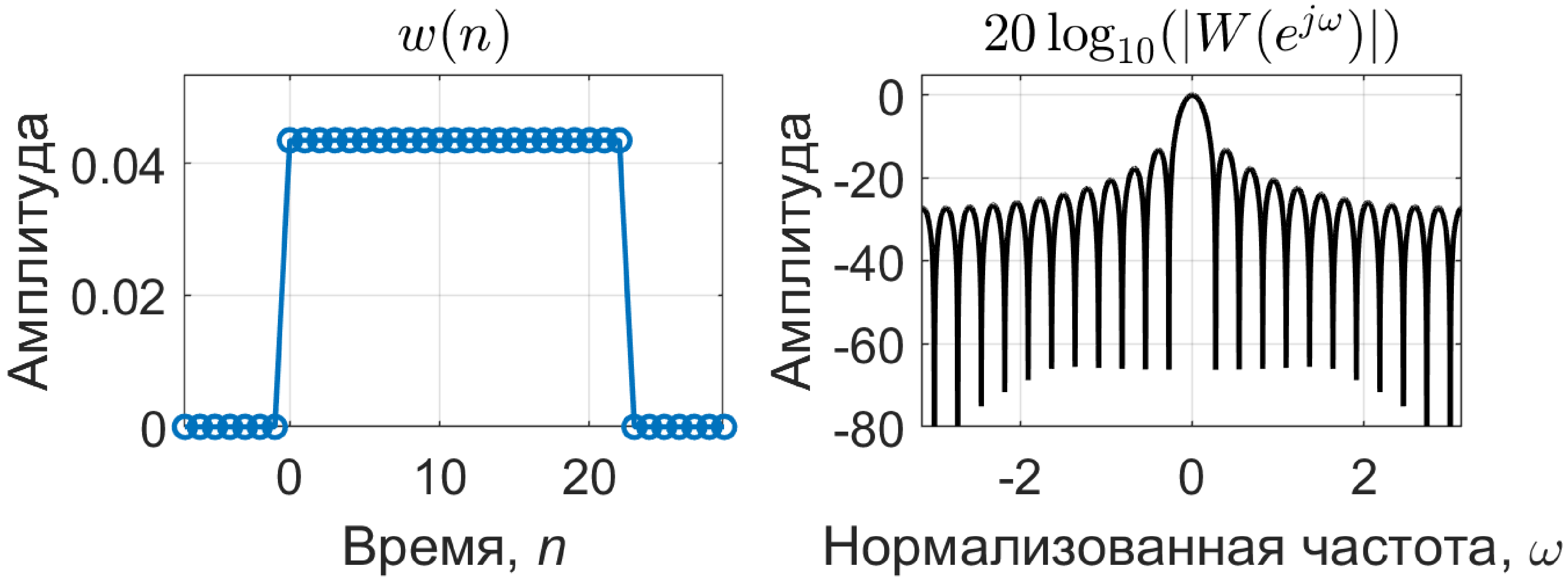
Для вычисления прямоугольного окна в `Matlab` есть функция `boxcar(N)`.



Прямоугольное окно

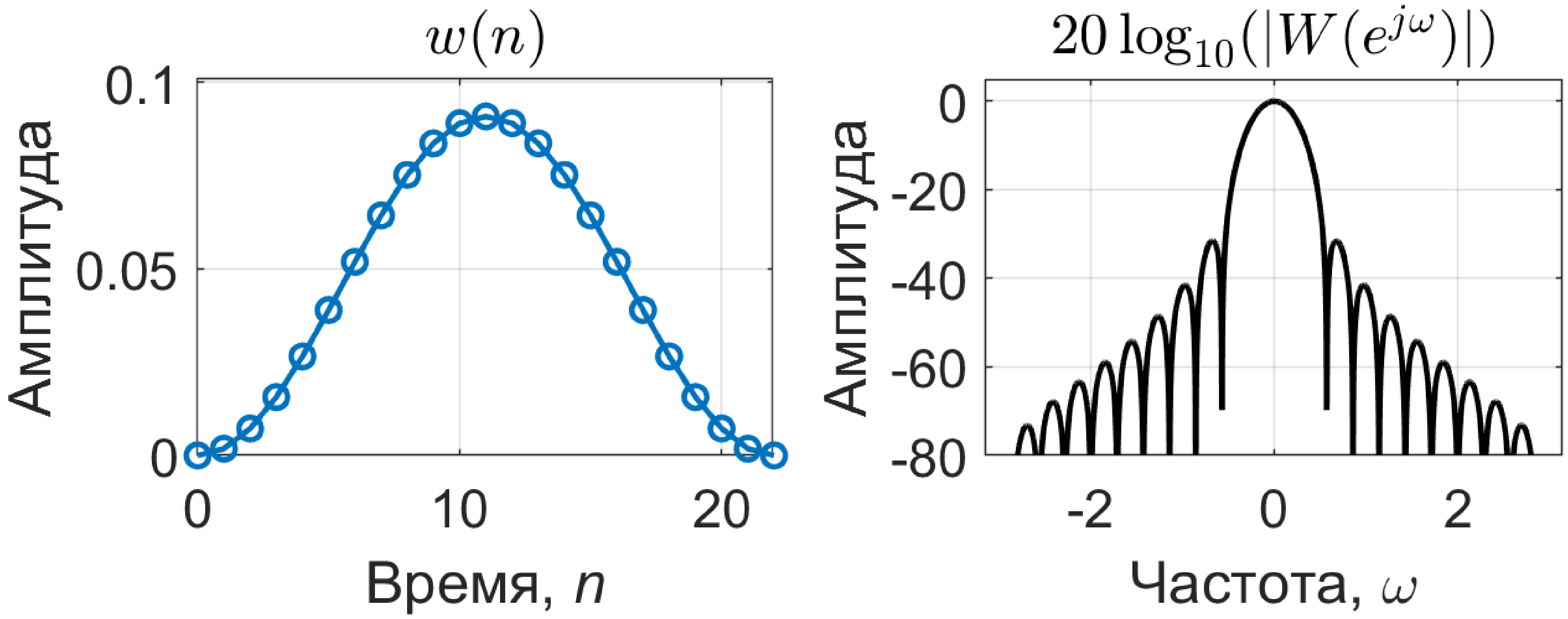
Перевод в децибелы

$$20\log_{10}|W(e^{j\omega})|$$



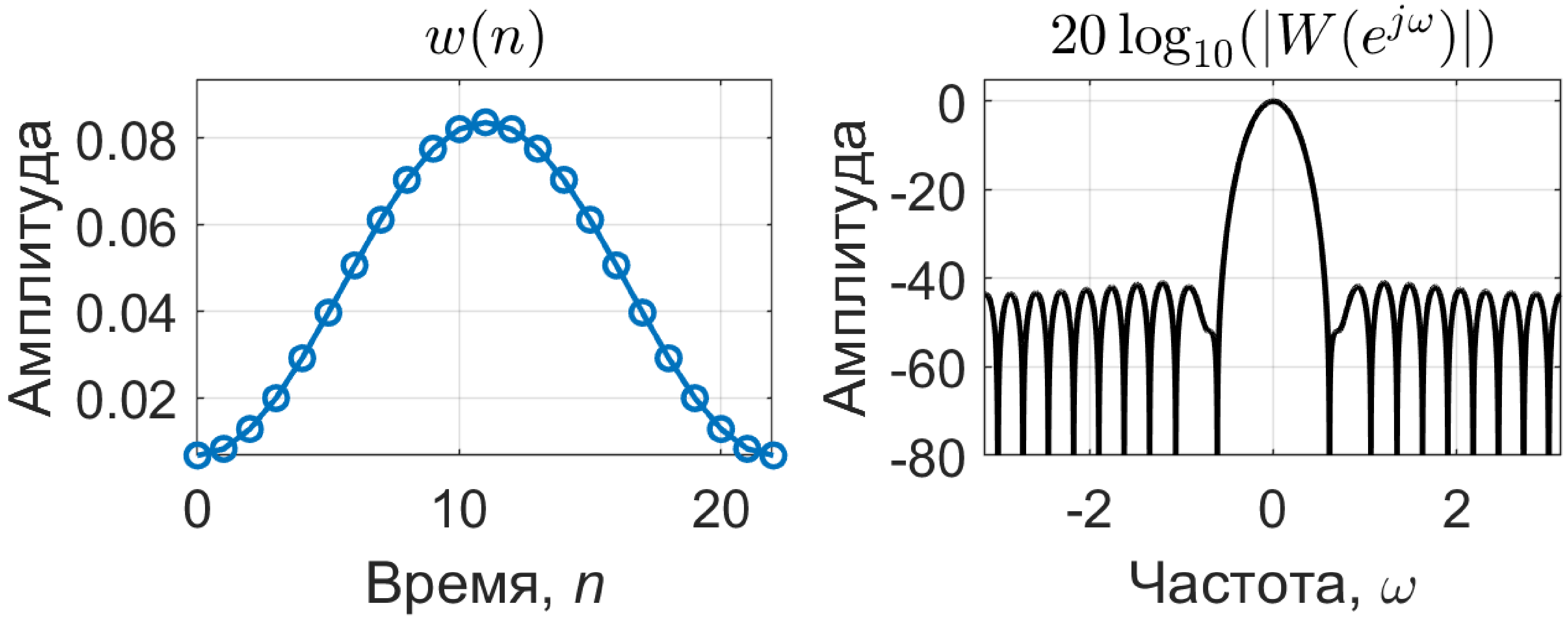
Окно Ханна

$$w(n) = 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Окно Хемминга

$$w(n) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Сравнение оконных функций

Для сравнения оконных функций можно использовать отношение уровня главного лепестка к боковому (англ. peak-to-sidelobe ratio – PSLR)

$$PSLR = \left|\frac{W(0)}{W(e^{j\omega_1})}\right|,$$

где ω_1 – частота на которой боковой лепесток достигает максимума.

PSLR прямоугольного окна

Для прямоугольного окна $\omega_1 = \frac{3\pi}{(2N+1)}$. Следовательно

$$PSLR = (2N+1)\sin\left(\frac{3\pi}{2(2N+1)}\right)$$

Для больших N $\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2(2N+1)}\right) \approx \frac{3\pi}{2(2N+1)}$

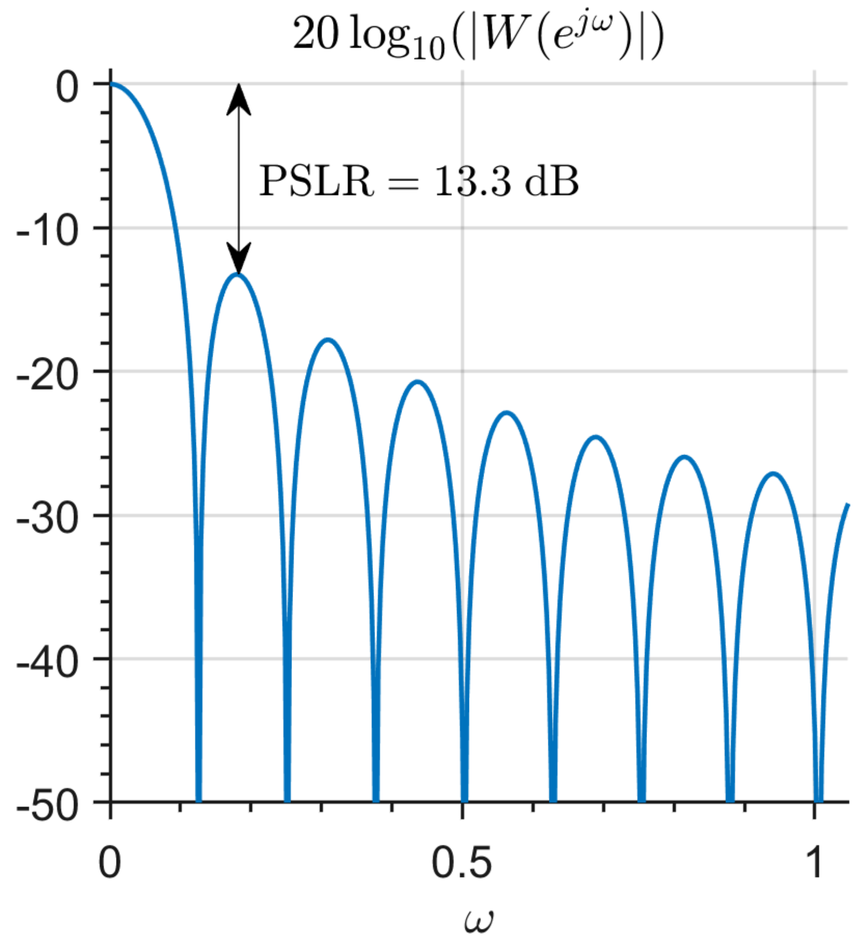
Поэтому отношение равно

$$PSLR \approx \frac{3\pi}{2} = 13.5\ dB.$$

Сравнение оконных функций

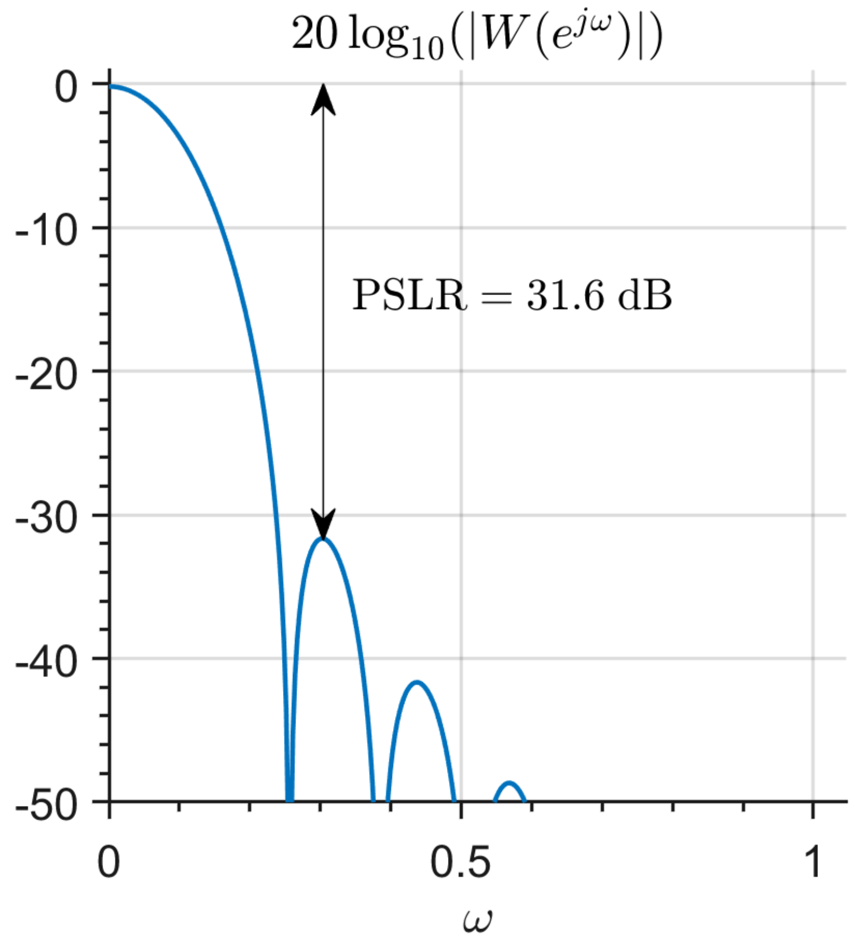
Прямоугольное окно

$$w(n) = u(n) - u(n - N + 1)$$



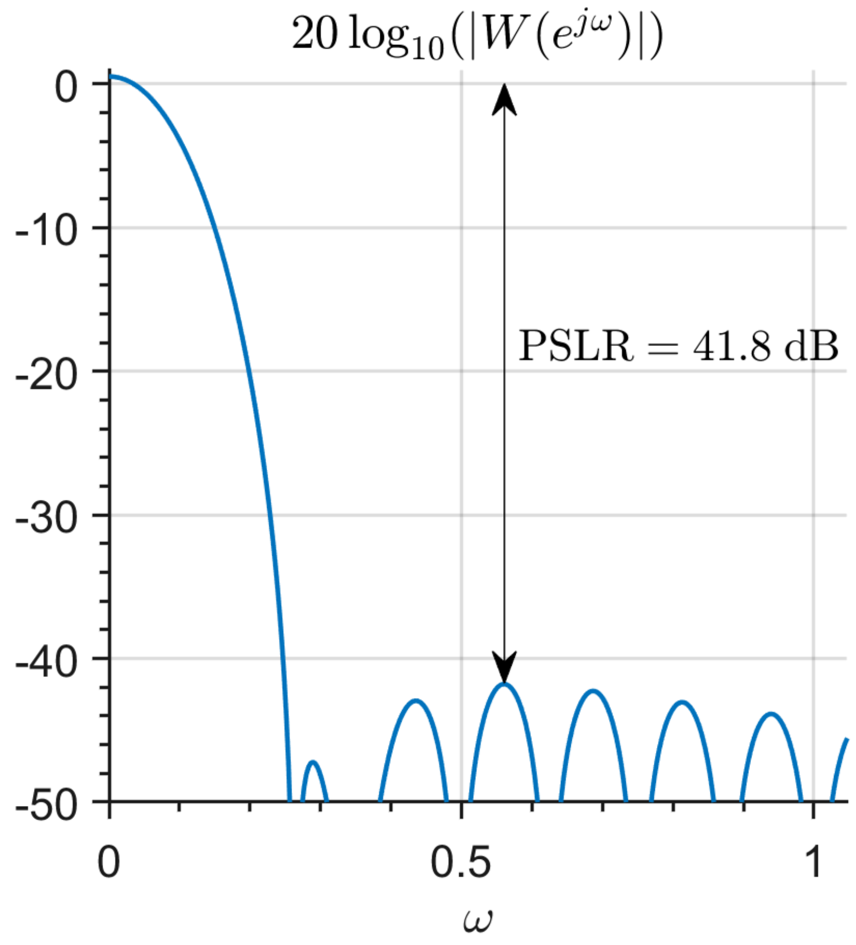
Окно Ханна

$$w(n) = 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Окно Хемминга

$$w(n) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Характеристики окна Хемминга

• Зависимость ширины полосы перехода (от полосы пропускания к полосе подавления) фильтра, построенного на основе окна Хемминга от длины фильтра N выражается формулой:

$$\Delta f = \frac{3{,}3}{N},$$

где Δf – нормированная ширина полосы перехода.

• Максимально возможное затухание в полосе подавления при использовании окна Хемминга 53 дБ.

• Минимальная амплитуда неравномерности в полосе пропускания (A_p) составляет $0{,}0194$ дБ.