Теория и применение цифровой обработки сигналов

Анализ разностных уравнений при помощи Z-преобразования

д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Введение

ЛС-система (цифровой фильтр)

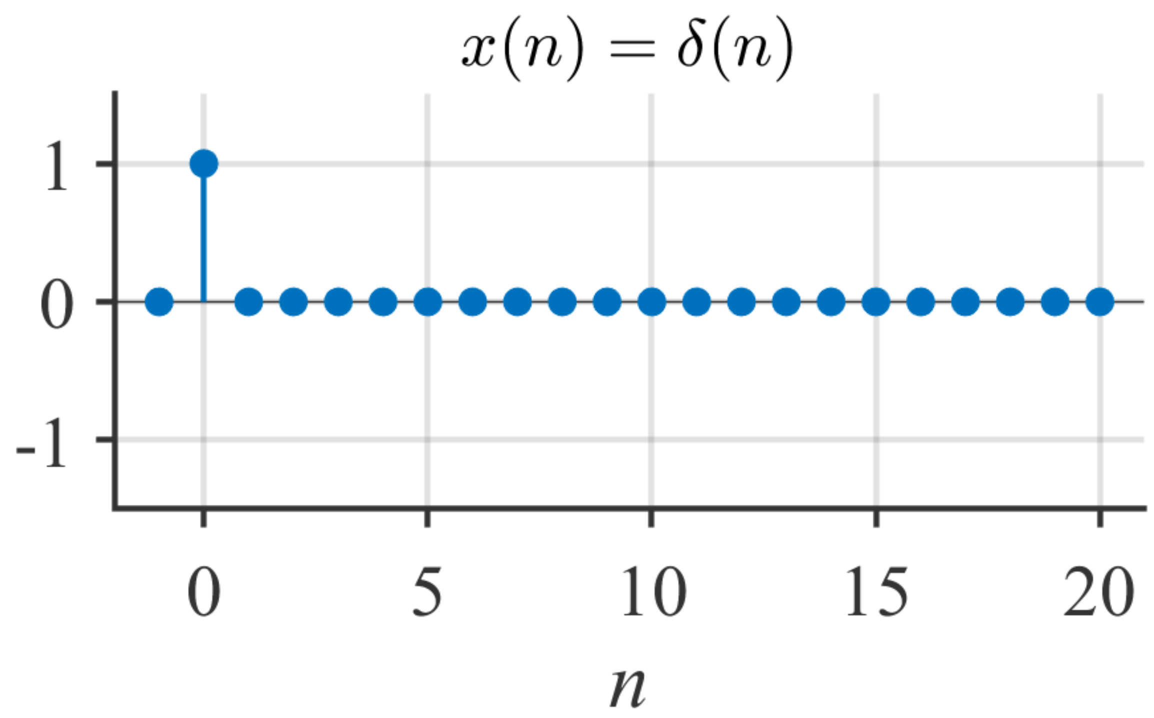
$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Введение

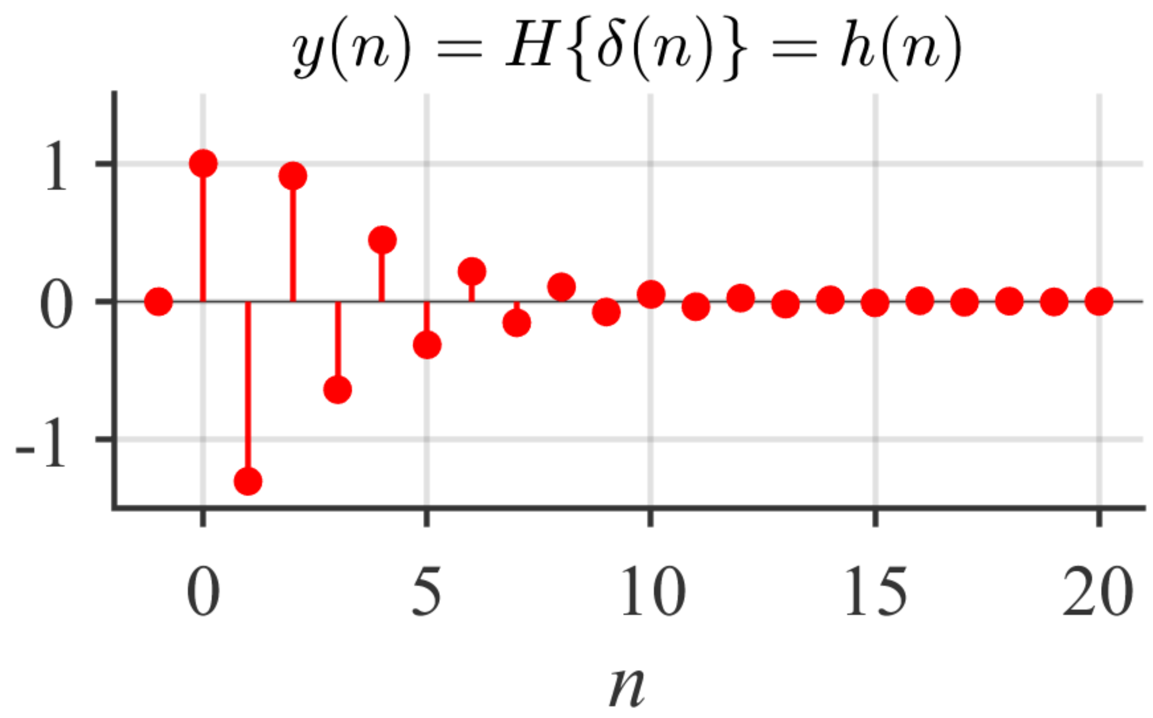
Цифровой фильтр

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Вход – дельта-импульс



Выход

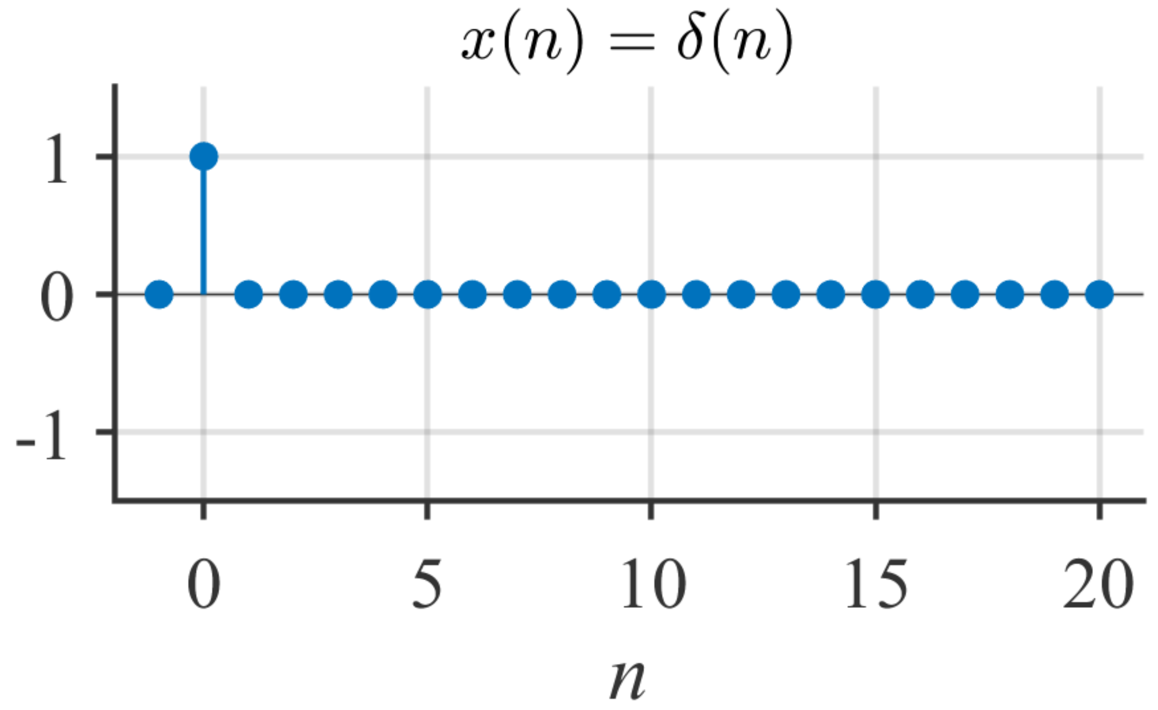


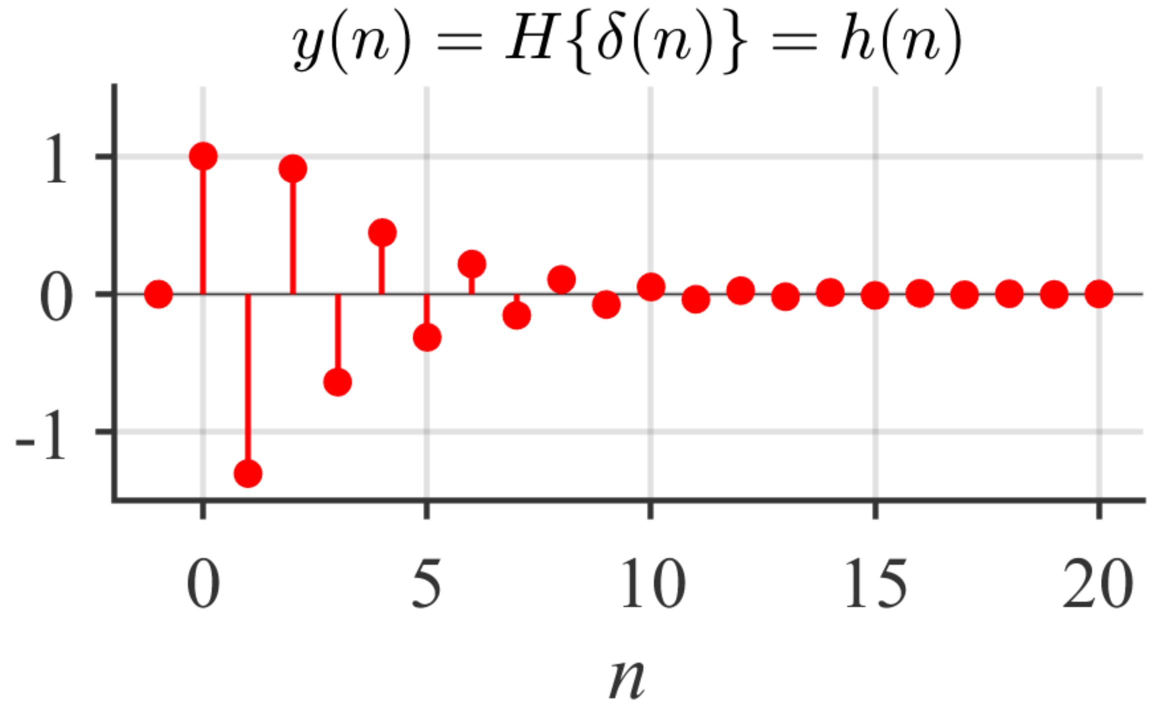
Введение

Цифровой фильтр

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Вход – **дельта-импульс**	Выход – **импульсная характеристика**



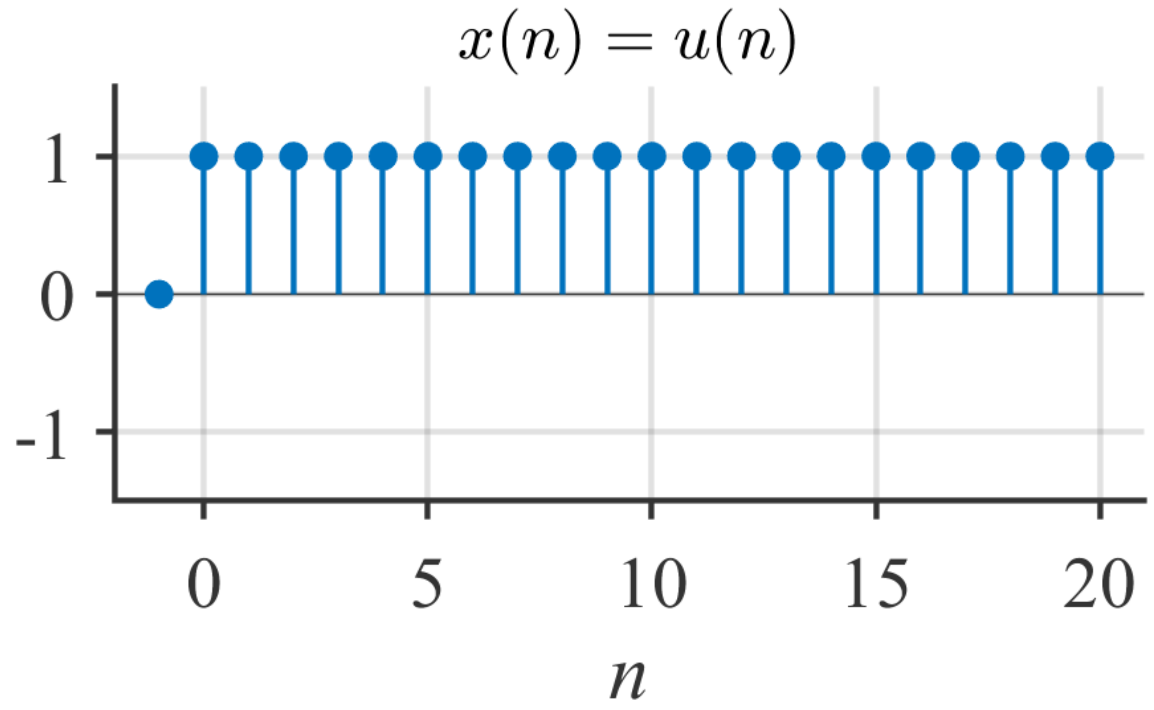


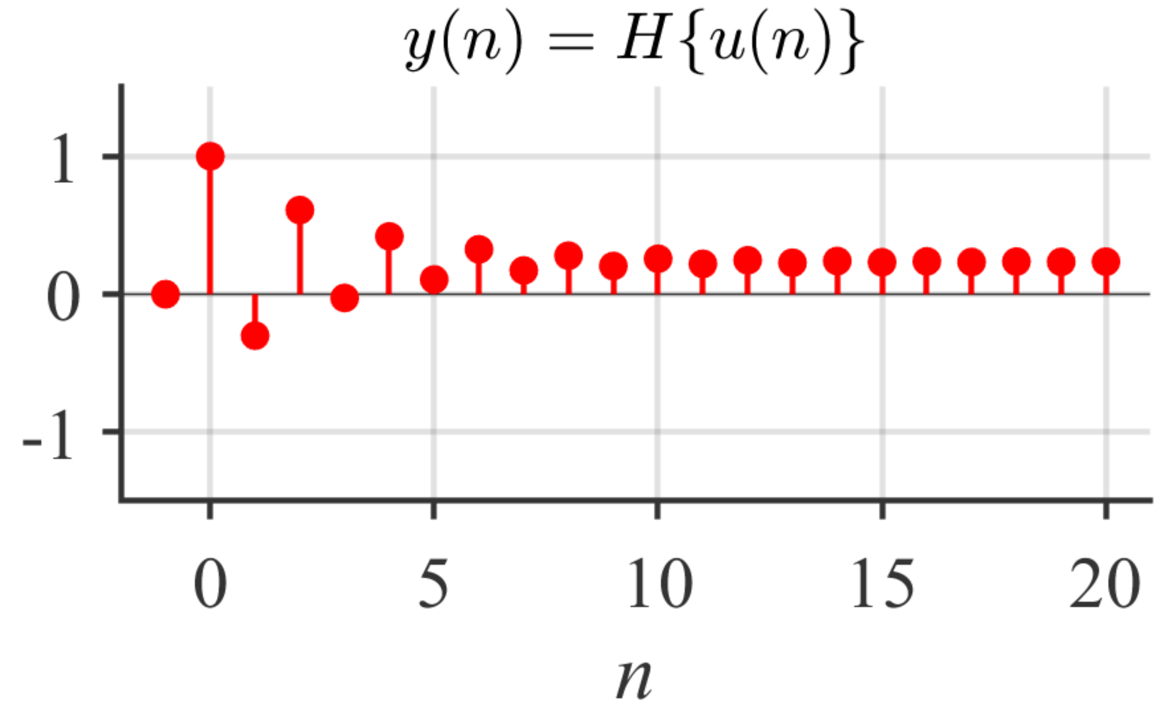
Введение

Цифровой фильтр

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Вход – единичный скачок	Выход



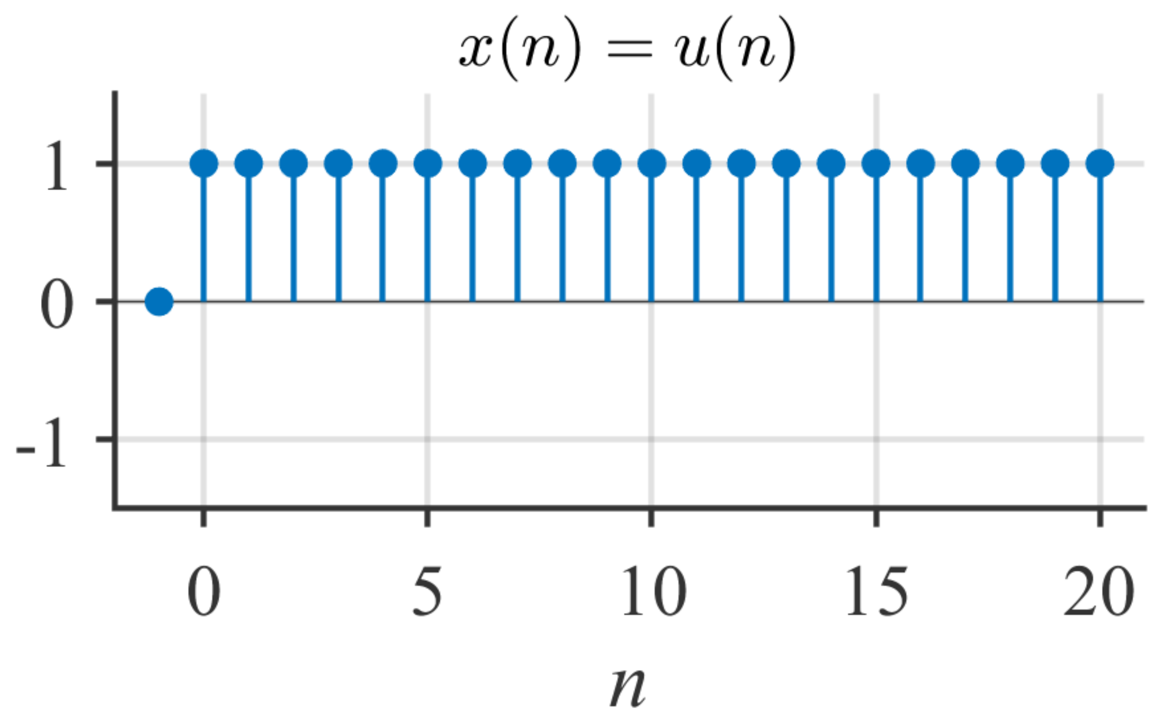


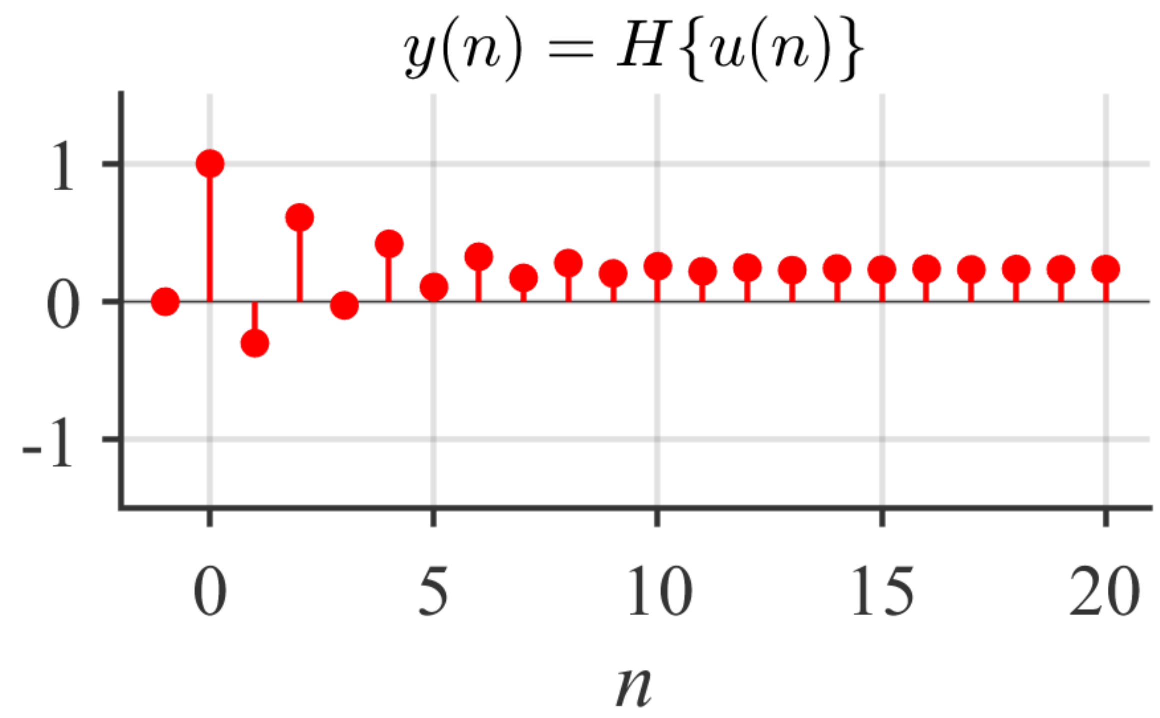
Введение

Цифровой фильтр

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Вход – **единичный скачок**	Выход – **переходная характеристика**





Разностное уравнение

Цифровой фильтр

$$a_0 y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$$

где a_k и b_k – фиксированные коэффициенты.

Разностное уравнение

Цифровой фильтр

$$a_0 y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$$

где a_k и b_k – фиксированные коэффициенты.

Чаще всего $a_0 = 1$.

Разностное уравнение

Цифровой фильтр

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$$

где a_k и b_k – фиксированные коэффициенты.

Реализация

Для реализации фильтра в MATLAB используется функция

```
y=filter(b, a, x)
```

где b – коэффициенты прямой связи,
a – коэффициенты обратной связи,
x – входной сигнал.

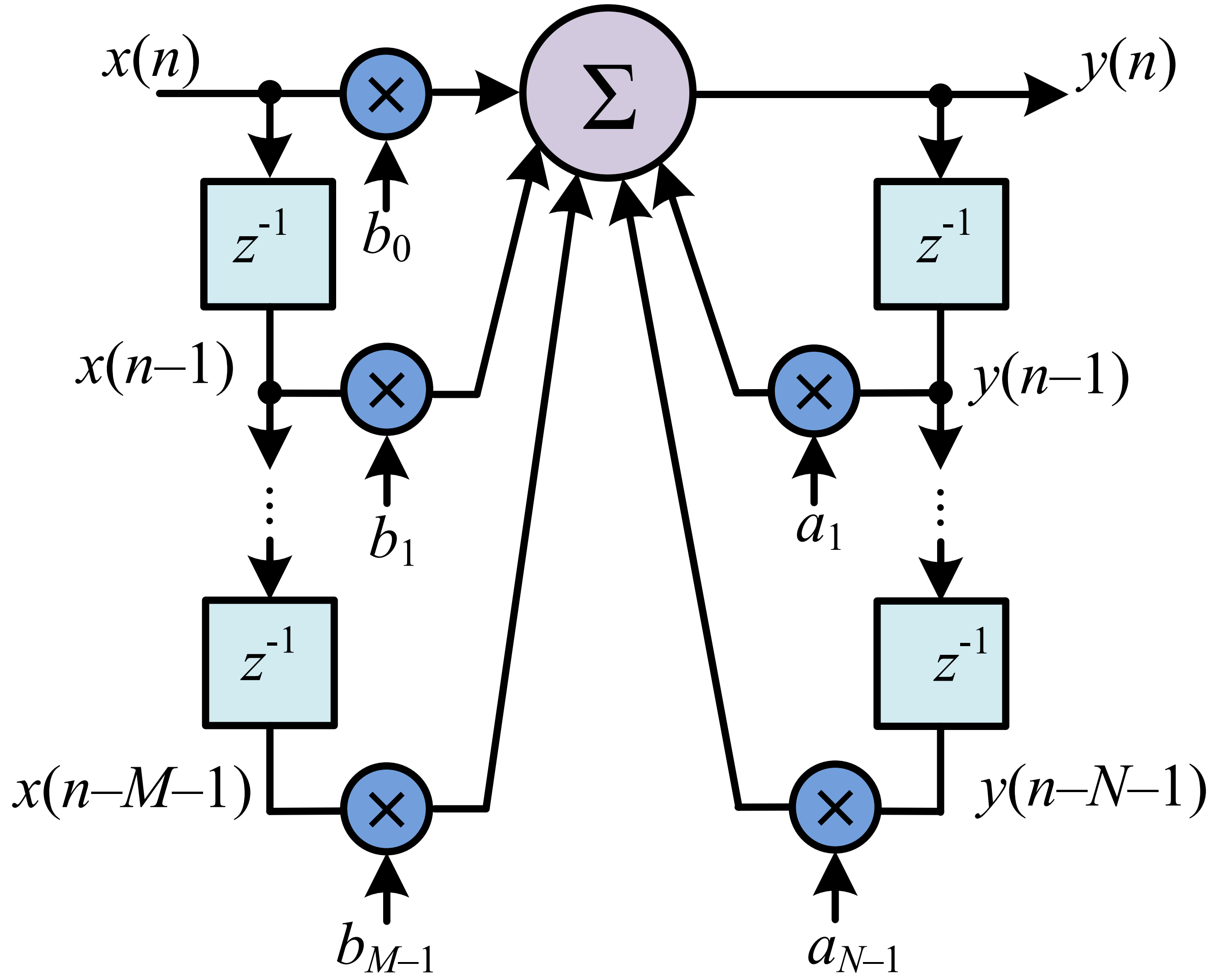


Схема реализации разностного уравнения (z^{-1} – блок единичной задержки)

Разностное уравнение (пример)

Цифровой фильтр

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$$

где a_k и b_k – фиксированные коэффициенты.

Реализация

Для реализации фильтра в `MATLAB` используется функция

```
y=filter(b, a, x)
```

где b – коэффициенты прямой связи,
a – коэффициенты обратной связи,
x – входной сигнал.

Пример

Пусть задано разностное уравнение цифрового фильтра

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Найти коэффициенты b и a для функции `filter`.

```
b =?
a =?
```

Разностное уравнение (пример)

Цифровой фильтр

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$$

где a_k и b_k – фиксированные коэффициенты.

Реализация

Для реализации фильтра в `MATLAB` используется функция

```
y=filter(b, a, x)
```

где b – коэффициенты прямой связи,
a – коэффициенты обратной связи,
x – входной сигнал.

Пример

Пусть задано разностное уравнение цифрового фильтра

$$y(n) = x(n) - 0{,}6x(n-1) - 0{,}7y(n-1).$$

Найти коэффициенты b и a для функции `filter`.

Ответ

```
b = [1 -0.6]
a = [1  0.7]
```

Анализ разностного уравнения: основная идея

Основная идея: применим z-преобразование к разностному уравнению и найдем функцию

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

$H(z)$ – ***передаточная функция*** фильтра, по которой легко определить является ли фильтр устойчивым или нет.

Анализ разностного уравнения:

Временная область	Z-область
$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$	$Y(z) = ?.$

Анализ разностного уравнения

Временная область	Z-область
$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$	$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z).$

Анализ разностного уравнения

Временная область	Z-область
$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$	$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z).$

Для получения передаточной функции преобразуем выражение из z-области

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}.$$

Анализ разностного уравнения

Временная область	Z-область
$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k).$	$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z).$

Для получения передаточной функции преобразуем выражение из z-области

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}.$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Нули и полюса

Запишем передаточную функцию, факторизовав полиномы числителя и знаменателя

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{K(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})} =$$

$$= \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)}.$$

Обычно мы факторизуем полином на множители вида $(z - z_k)$. Однако легко проверить, что

$$(z - z_k) = z(1 - z^{-1} z_k).$$

Нули и полюса

Запишем передаточную функцию, факторизовав полиномы числителя и знаменателя

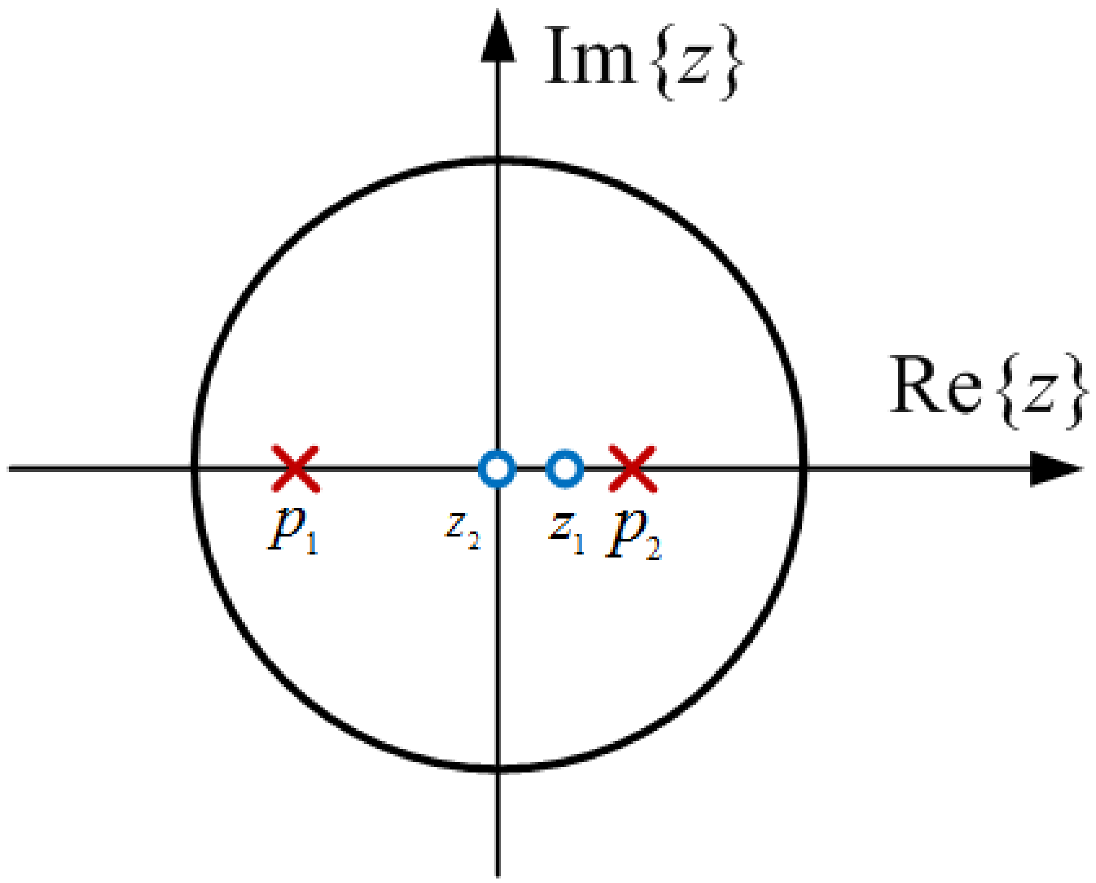
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{K(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})} =$$

$$= \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)}.$$

Диаграмма нулей и полюсов

На диаграмме ***крестиком*** обозначается положение ***полюсов***, а ***кружком*** – положение ***нулей***.

У устойчивого фильтра все полюса должны лежать внутри единичной окружности в z-плоскости.



Пример

Определить стабильность фильтра с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ и $a_1 = -0{,}5$ и изобразить его схему.

Пример

Определить стабильность фильтра с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ и $a_1 = -0{,}5$ и изобразить его схему.

Решение

Найдем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1}} = \frac{z + 1}{z - 0{,}5}.$$

Полюс фильтра $p_1 = 0{,}5$ лежит внутри единичной окружности и, следовательно, фильтр ***устойчив***.

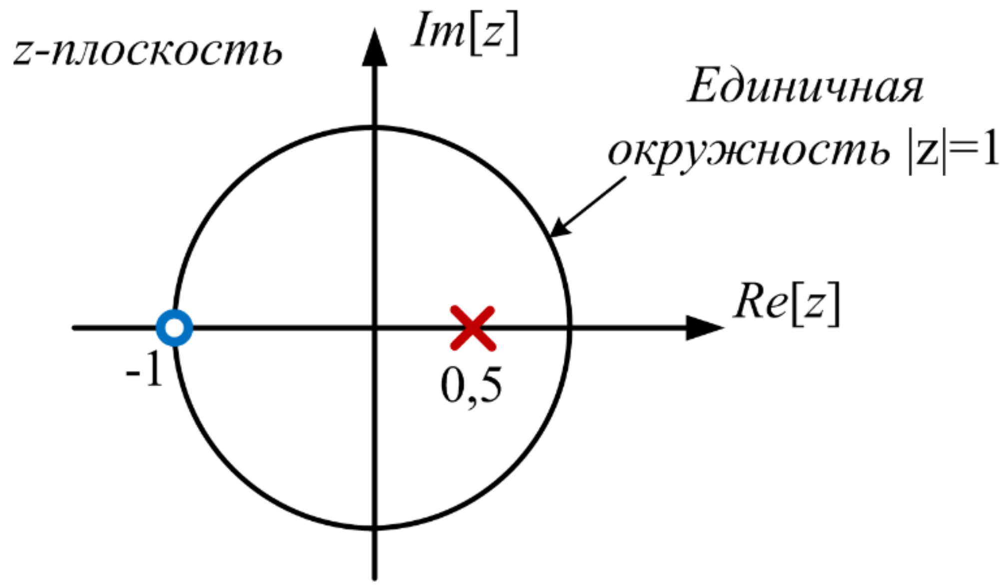
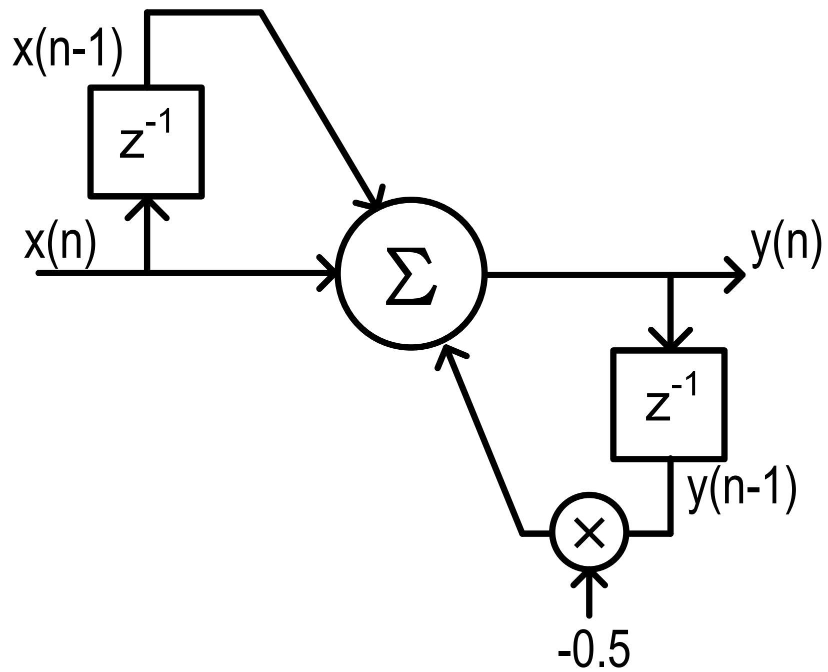


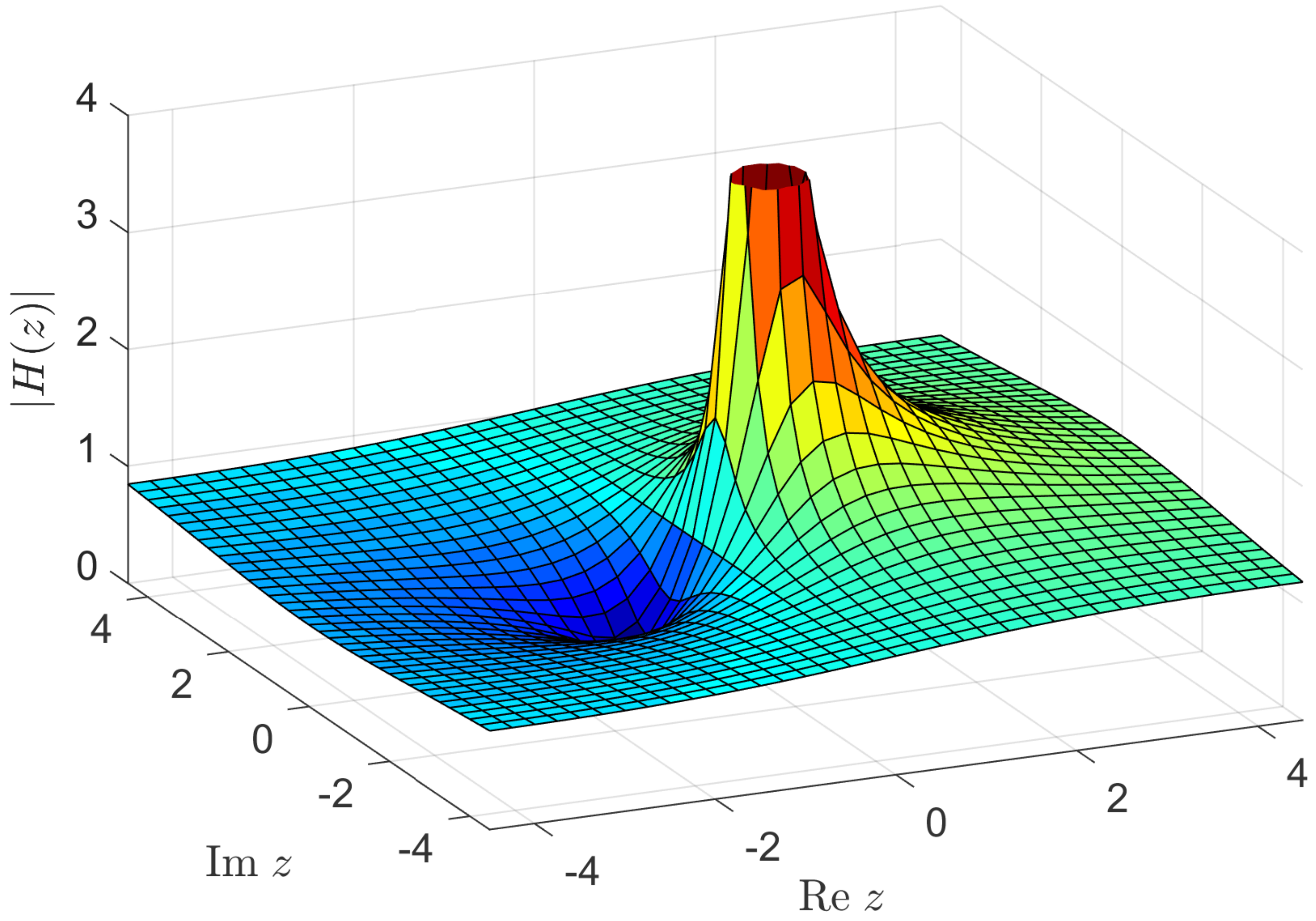
Диаграмма нулей и полюсов

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + 0{,}5y(n-1).$$



Передаточная функция $|H(z)|$ в z-плоскости

Представление передаточной функции в виде диаграммы нулей и полюсов схематично. Модуль передаточной функции $|H(z)|$ представляет собой поверхность в z-плоскости.



Передаточная функция $|H(z)|$ в z-плоскости

Зачем полюсам находится внутри единичной окружности?

$$H(z) = \frac{\prod_{k=0}^{M-1}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1}(1 - p_k z^{-1})} = \cdots$$

Зачем полюсам находится внутри единичной окружности?

$$H(z) = \frac{\prod_{k=0}^{M-1}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1}(1 - p_i z^{-1})} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Что произойдет если взять обратное z-преобразование от $H(z)$?

Зачем полюсам находится внутри единичной окружности?

$$H(z) = \frac{\prod_{k=0}^{M-1}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1}(1 - p_i z^{-1})} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Найдем импульсную характеристику $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} A_k p_k^n u(n)$$

Z-преобразование стандартных последовательностей (выдержка из таблицы)

Последовательность	Z-преобразование	Область сходимости (ОС)
$r^n u(n)$	$\frac{1}{1 - rz^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$

Пример

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1}} = -2 + \frac{3}{1 - 0{,}5z^{-1}}.$$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-2 + \frac{3}{1 - 0{,}5z^{-1}}\right\} = -2\delta(n) + 3(0{,}5)^n u(n)$$