Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретизация непрерывных сигналов. Критерий Найквиста

д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

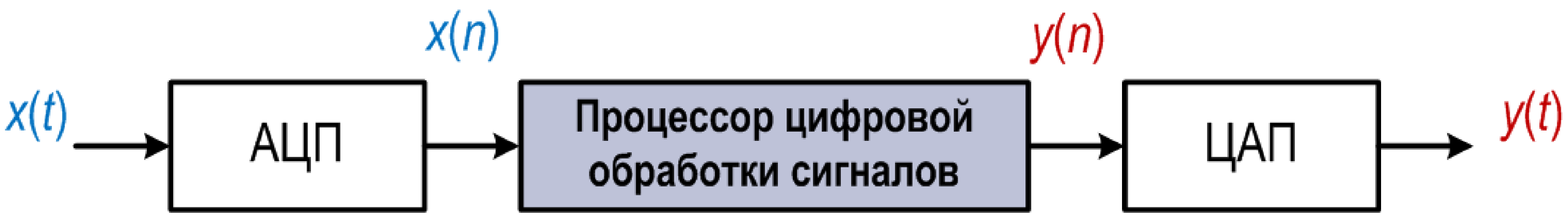
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Типичная система ЦОС

Чаще всего цифровые системы обрабатывают сигналы, поступающие из реального мира.

$$x(n) = x(t)|_{t=nT}.$$



АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

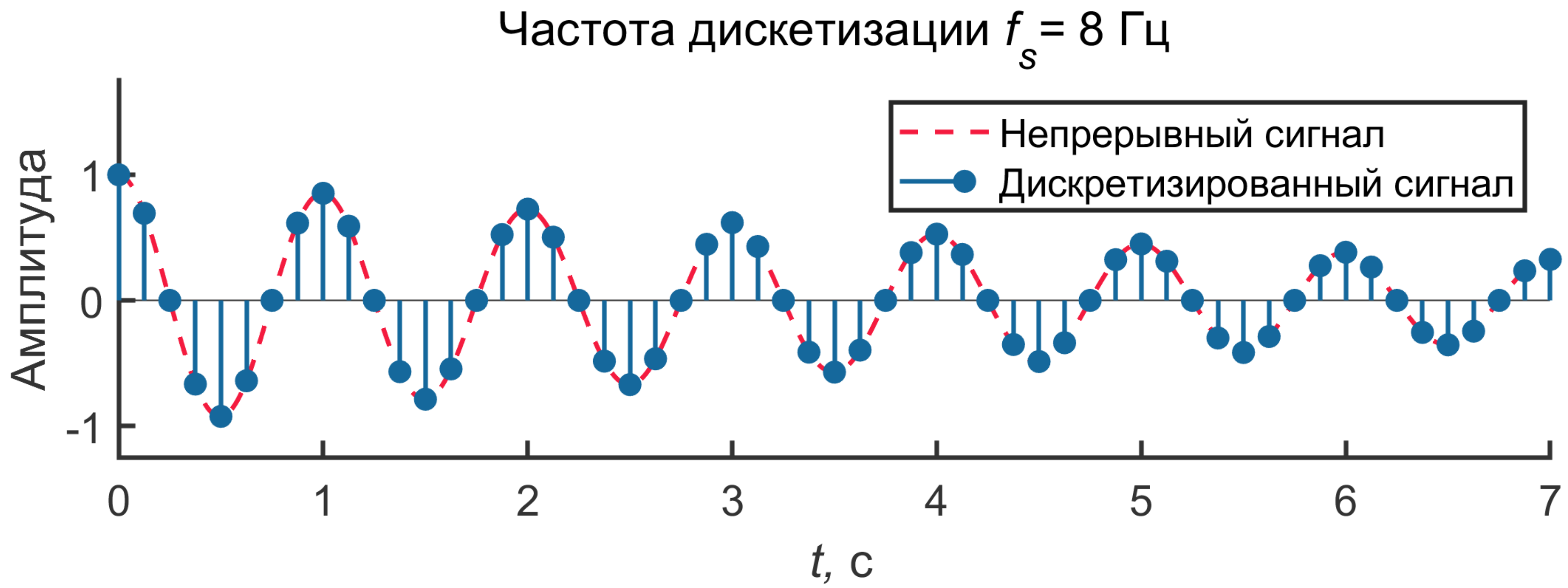
ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь.

✓ АЦП непрерывно дискретизирует сигнал с частотой равной f_s.

✓ Для работы в реальном масштабе времени процессор должен закончить все вычисления в пределах интервала дискретизации $T = 1/f_s$ и передать выходной отсчет на ЦАП.

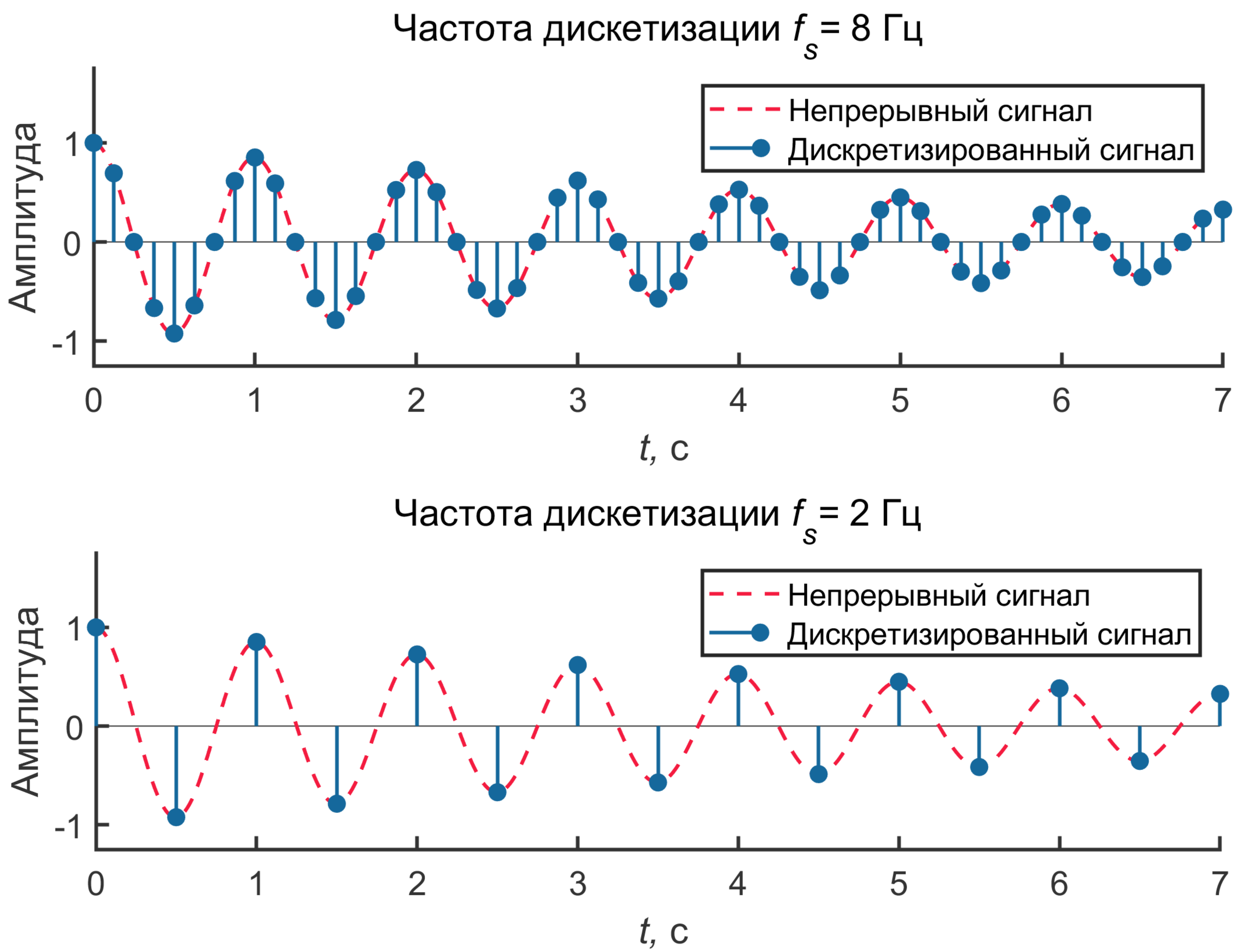
Пример дискретизации сигнала

Чем больше число отсчетов в секунду (f_s), тем более точным будет представление сигнала в цифровом виде.



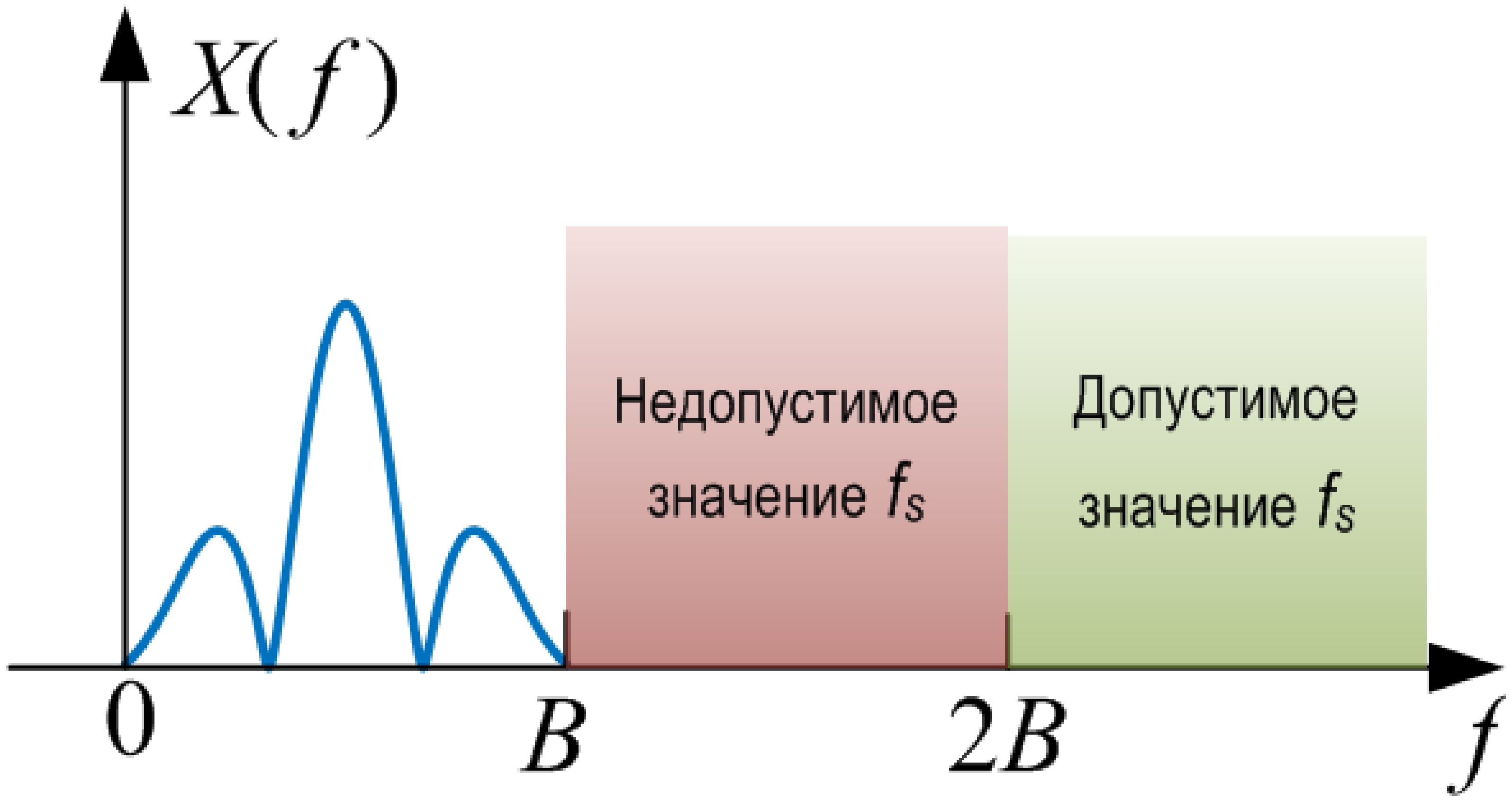
Пример дискретизации сигнала

Чем больше число отсчетов в секунду (f_s), тем более точным будет представление сигнала в цифровом виде.



Критерий Найквиста

Частота дискретизации f_s сигнала с шириной полосы B должна удовлетворять условию $f_s > 2B$, в противном случае информация о сигнале теряется.



Когда $f_s < 2B$ возникает эффект ***наложения спектров*** (или, как его ещё называют, явление ***подмены частот***).

Эффект подмены частот

Рассмотрим сигнал $\cos(2\pi f_1 t)$ с частотой $f_1 = 0{,}5$ Гц. Выполним дискретизацию с частотой $f_s = 0{,}6$ Гц (что не удовлетворяет критерию Найквиста).

Эффект подмены частот

Рассмотрим сигнал $\cos(2\pi f_1 t)$ с частотой $f_1 = 0{,}5$ Гц. Выполним дискретизацию с частотой $f_s = 0{,}6$ Гц (что не удовлетворяет критерию Найквиста).

Из-за «неправильной» дискретизации получился сигнал с частотой ниже, чем у исходного сигнала, т.е. произошел ***эффект подмены частот***.

Полученный сигнал имеет частоту, которая равна разности $f_s - f_1$ (в нашем случае $f_s - f_1 = 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1$ Гц, т.е. период равен 10 с.)

Почему происходит подмена частот?

Рассмотрим пример синусоиды:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad f_0 = \frac{p+q}{2T}, \qquad p \in \mathbb{Z}, \qquad q \in \mathbb{Q}, \qquad |q| < 1 \tag{1}$$

Выполнив процесс дискретизации $t \to nT$ и мы получим

$$x(n) = \cdots$$

Почему происходит подмена частот?

Рассмотрим пример синусоиды:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad f_0 = \frac{p+q}{2T}, \qquad p \in \mathbb{Z}, \qquad q \in \mathbb{Q}, \qquad |q| < 1$$

Выполнив процесс дискретизации $t \to nT$ и мы получим

$$x(n) = \sin\left(2\pi \frac{p+q}{2T} nT\right) = \sin(\pi(p+q)n) =$$

$$= \underbrace{\sin(\pi p n)}_{=0} \cos(\pi q n) + \cos(\pi p n) \sin(\pi q n) =$$

$$= \cos(\pi p n) \sin(\pi q n).$$

Теперь в зависимости от четности *p* имеется две возможности:

1) Если p – четное, то $\cos(\pi p n) = 1$ для всех n, поэтому

$$x(n) = \sin(\pi q n) = \sin\left(2\pi \left(\frac{q}{2T}\right) nT\right) \tag{2}$$

2) Если p – нечетное, то

$$x(n) = (-1)^n \sin(\pi q n) = \cos \pi n \sin(\pi q n) = -\sin\big(\pi n(1-q)\big). \tag{3}$$

Пример «неправильной» дискретизации

Какая будет частота дискретного сигнала, если исходный сигнал имеет вид

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

и $T = 0{,}005$ с (т.е. $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}005} = 200$ Гц); $f_0 = 1025$ Гц.

Пример «неправильной» дискретизации

Какая будет частота дискретного сигнала, если исходный сигнал имеет вид

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

и $T = 0{,}005$ с (т.е. $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}005} = 200$ Гц); $f_0 = 1025$ Гц.

Решение

$$f_0 = \frac{p+q}{2T} \Rightarrow 1025 = \frac{p+q}{0{,}01} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p + q = 10{,}25$$

$$\Rightarrow p = 10, \quad q = 0{,}25.$$

Таким образом *p* – четное, следовательно, полученная частота

$$f_0' = \frac{q}{2T} = \frac{0{,}25}{0{,}01} = 25 \text{ Гц}.$$

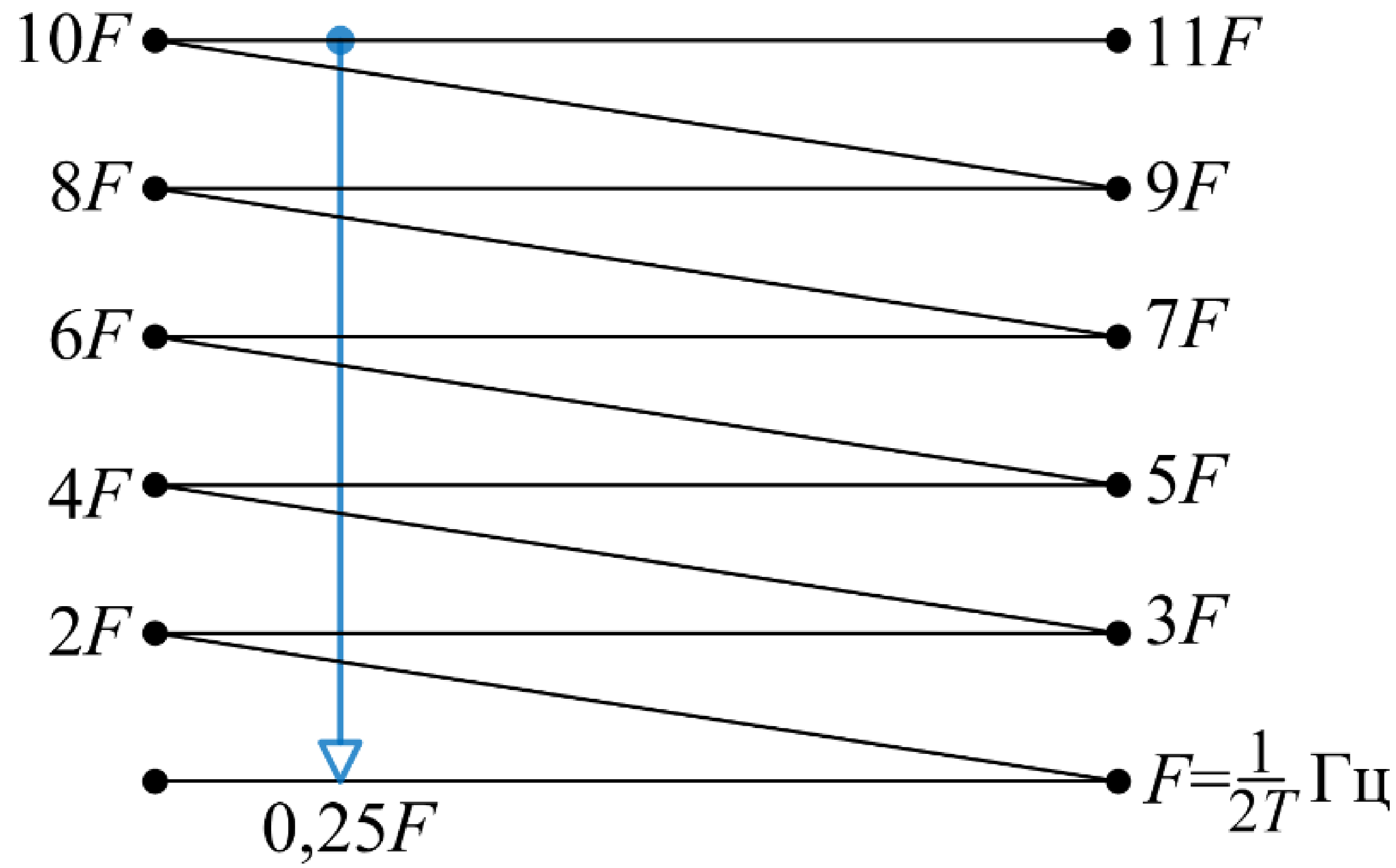
Частота Найквиста

Частота $(2T)^{-1}$ играет особую роль для цифровых сигналов, её обозначают через F (от англ. *folding*):

$$F = (2T)^{-1} = \frac{f_s}{2}.$$

Диаграмма подмен Найквиста

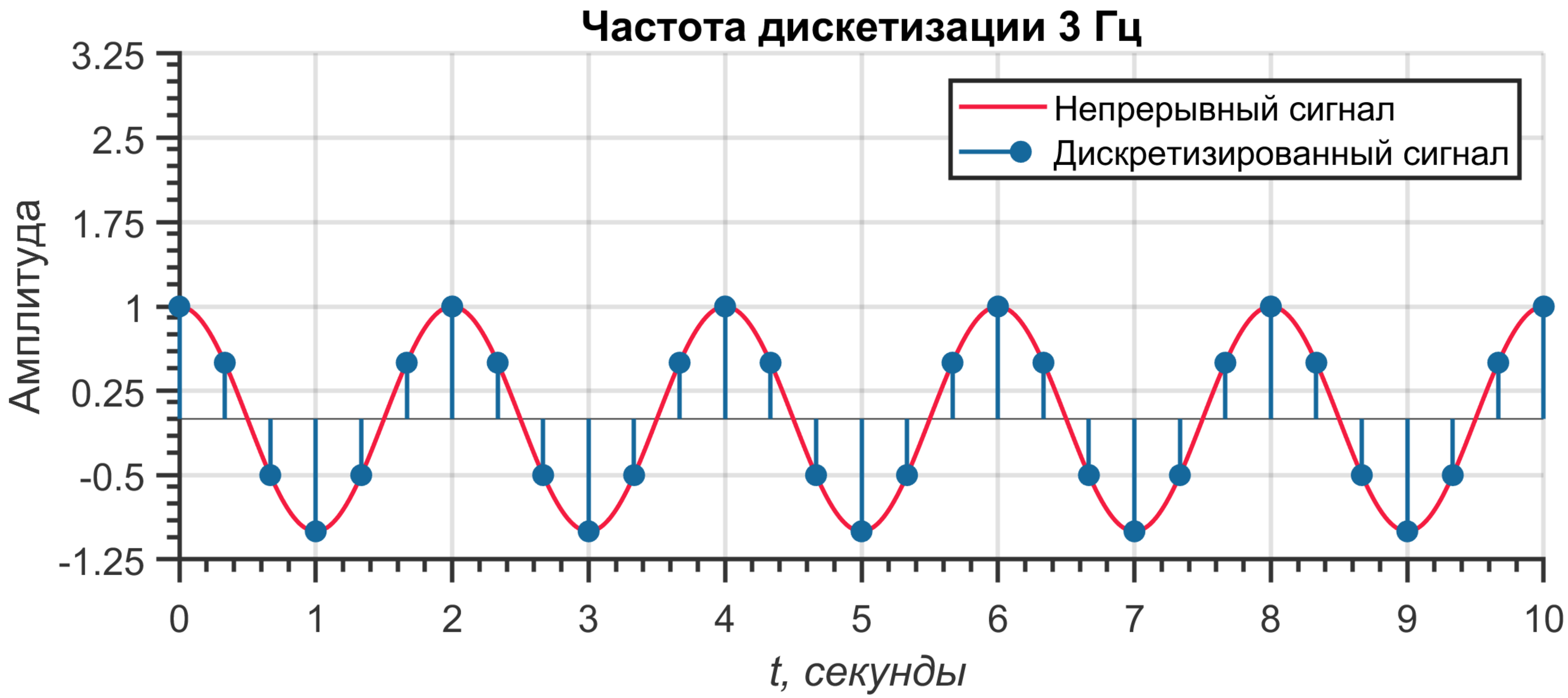
Диаграмму подмен Найквиста можно использовать для нахождения частот подмены для данной частоты сигнала и заданной частоты дискретизации.



Частота 1025 Гц отвечает величине 10,25 *F* при скорости отсчетов 200 выборок в секунду (f_s =200 Гц, $F = \frac{f_s}{2}$=100 Гц). Если из этой точки опустить перпендикуляр, то получится 0,25 *F*. То же значение получится, если взять 1.75 *F*, 2.25 *F*, 3.75 *F*, 4.25 *F*, 5.75 *F*, 6.25 *F*, 7.75 *F*, 8.25 *F*, 9.75 *F* и т.д.

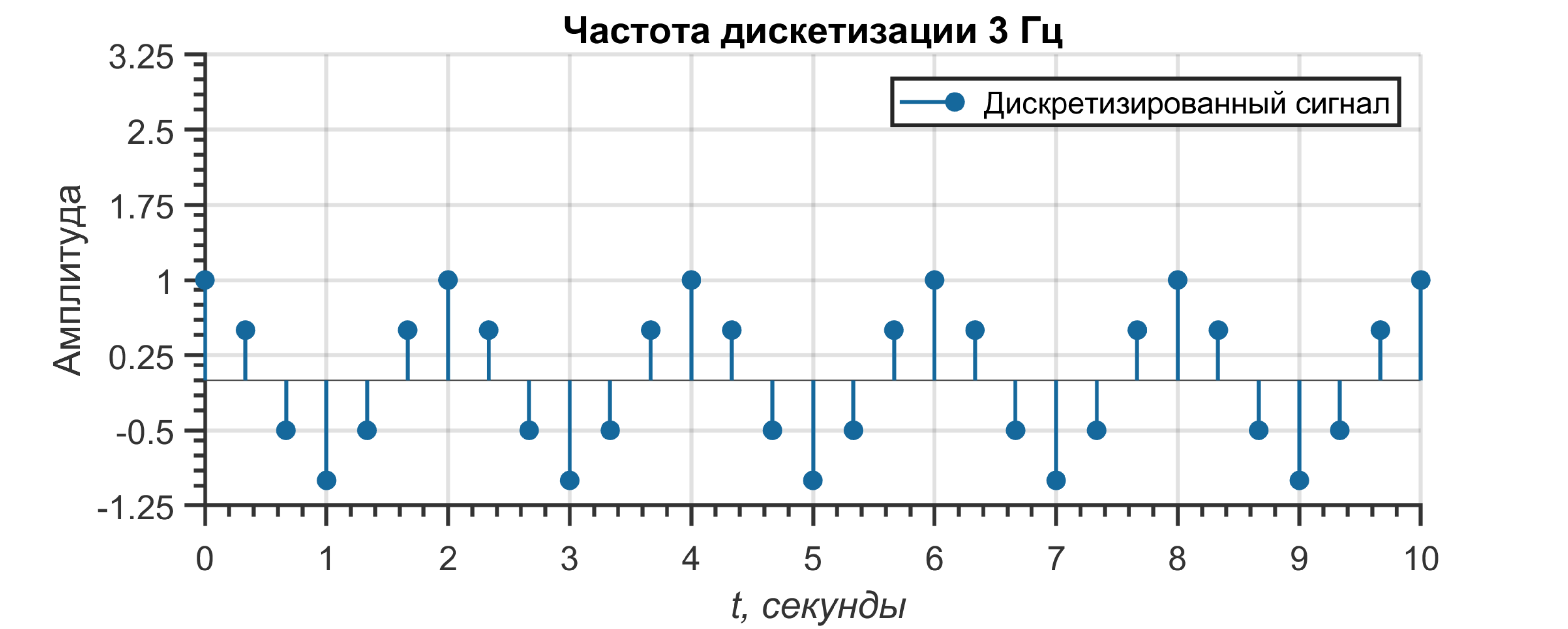
Подмена частот

Синусоида с частотой 0,5 Гц. f_s =3 Гц.



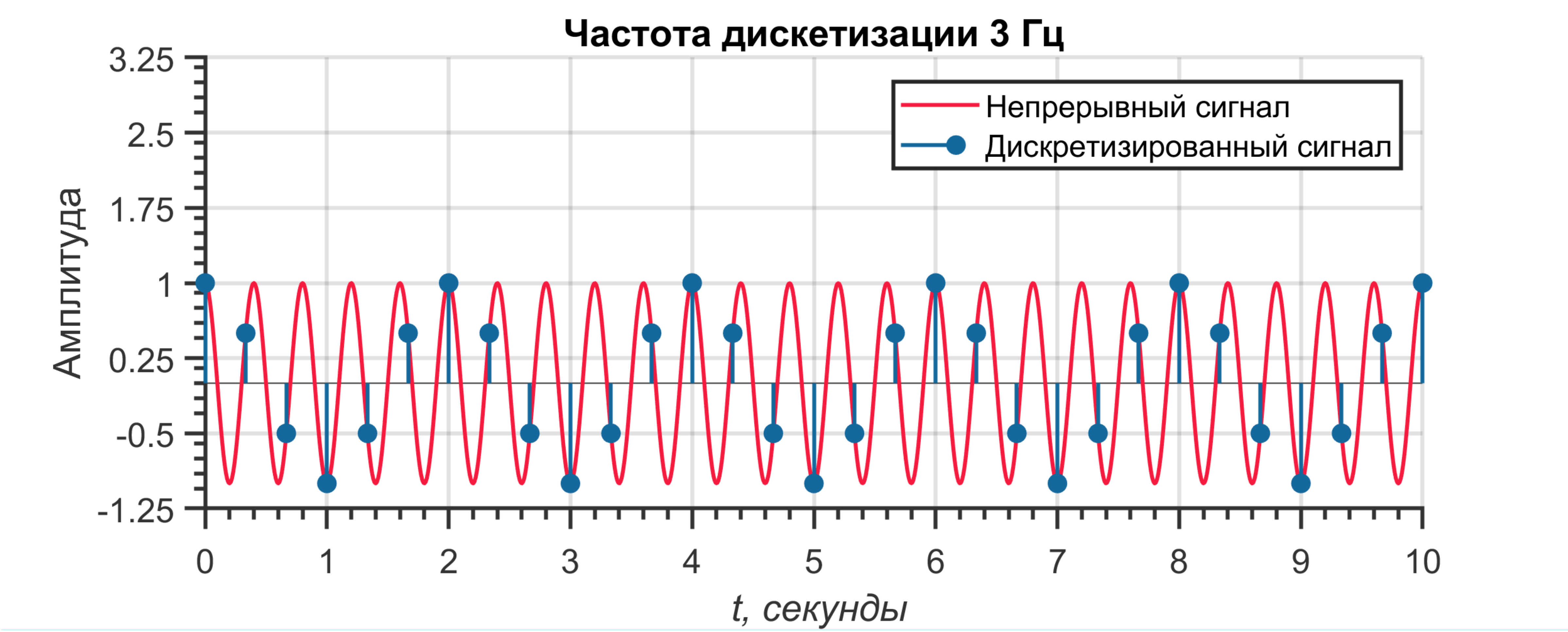
Подмена частот

Сколько различных аналоговых сигналов могут соответствовать данному дискретному сигналу?



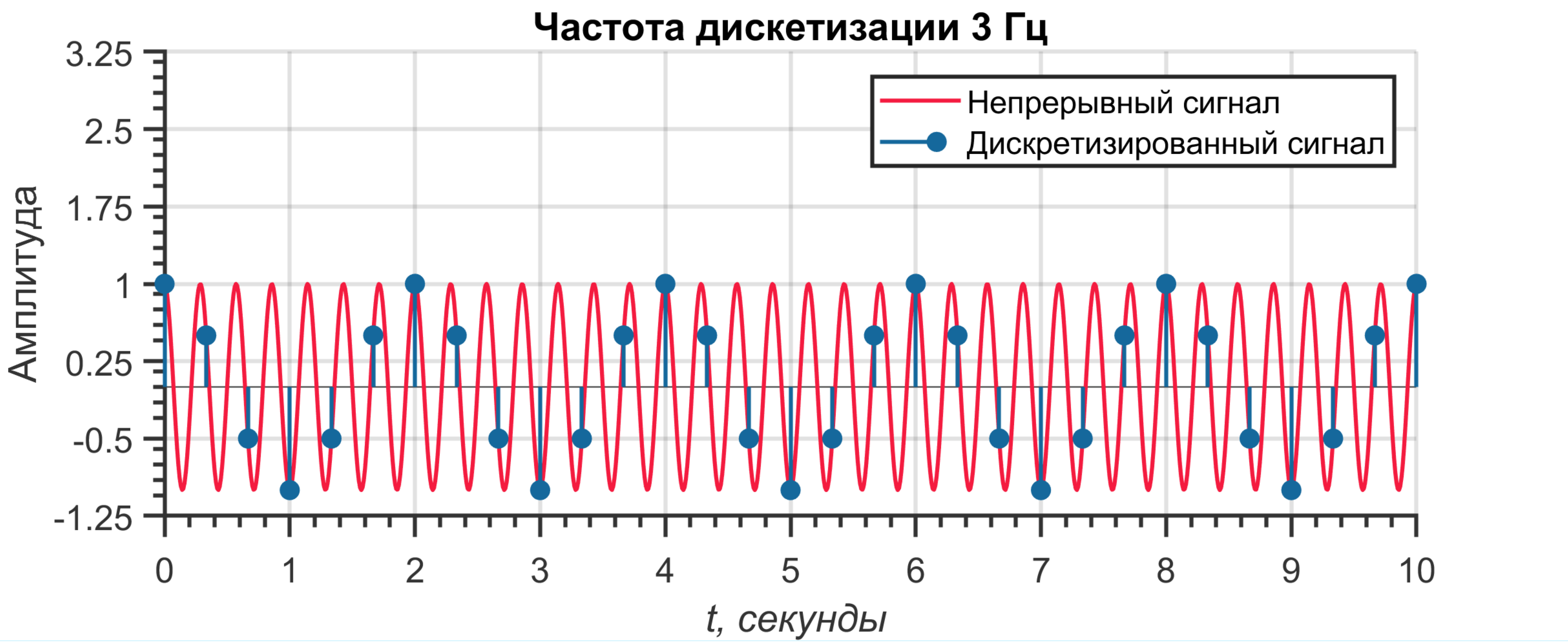
Подмена частот

Синусоида с частотой 2,5 Гц.



Подмена частот

Синусоида с частотой 3,5 Гц.



Подмена частот

Синусоида с частотой 5,5 Гц.