Теория и применение цифровой обработки сигналов

Комплексная форма ряда Фурье

д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

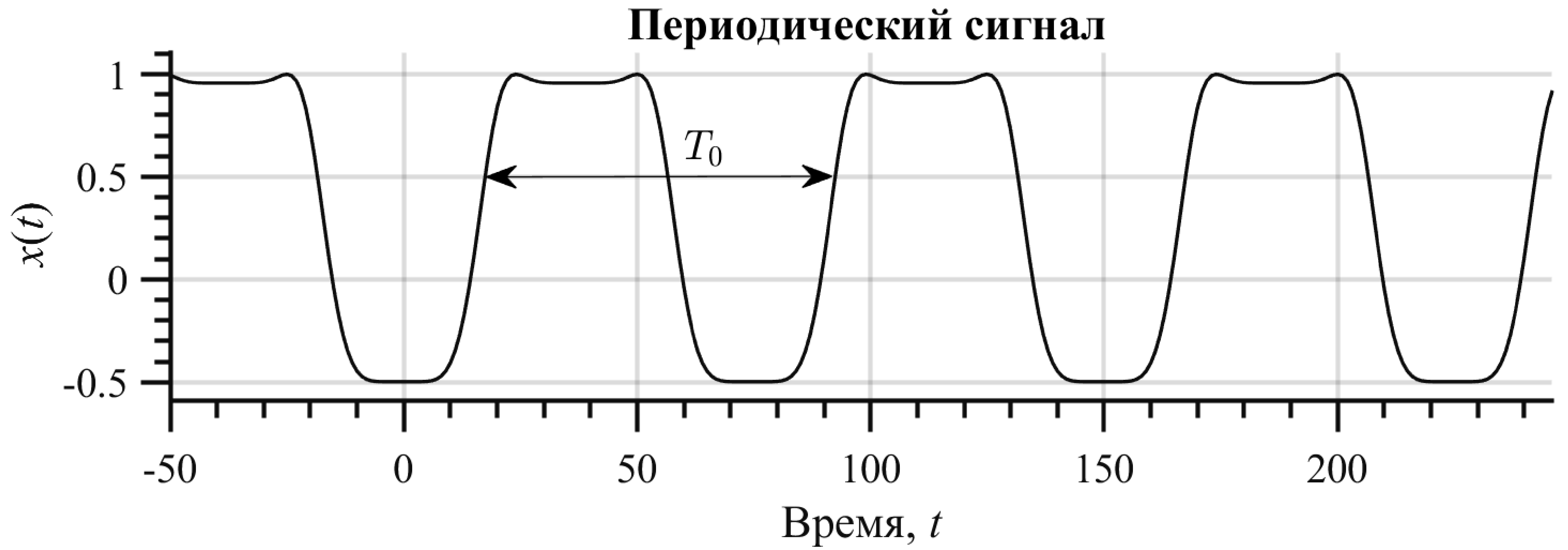
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Ряд Фурье

Тригонометрическая форма ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0}$; T_0 – период сигнала.



Ряд Фурье

Тригонометрическая форма ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \tag{1}$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0}$; T_0 – период сигнала.

Недостатки модели (1):

– Разнородность;

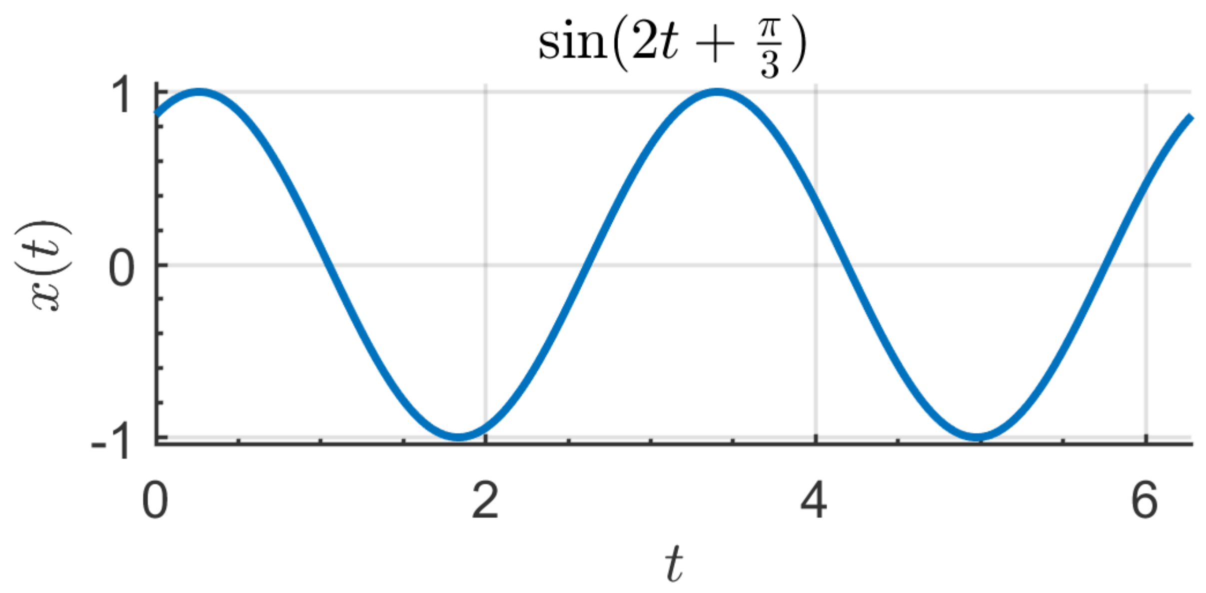
– Информация о наличии в сигнале компоненты с частотой ω_k содержится сразу в двух коэффициентах a_k и b_k;

– Модель (1) неявно подразумевает, что сигнал $x(t)$ действительный.

Пример разложения в ряд Фурье

Иллюстрация недостатка 2: рассмотрим периодический сигнал:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \quad T_0 = 2\pi.$$



Найти его разложения в ряд Фурье.

Решение

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = ?$$

Пример разложения в ряд Фурье

Иллюстрация недостатка 2: найдем разложения в ряд Фурье периодического сигнала:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \quad T_0 = 2\pi.$$

Решение

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2t + \frac{\pi}{3})\, dt = 0.$$

Перепишем $x(t)$ в следующем виде:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(2t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(2t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t).$$

Найдем коэффициенты a_k

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(\frac{2\pi kt}{T_0})\, dt = ?$$

Пример разложения в ряд Фурье

Иллюстрация недостатка 2: найдем разложения в ряд Фурье периодического сигнала:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \quad T_0 = 2\pi.$$

Решение

Перепишем $x(t)$ в следующем виде: $x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t).$

Найдем коэффициенты a_k

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T_0}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)\right)\cos(kt)\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2t)\cos(kt)\,dt}_{=0} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\cos(kt)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\pi\,\delta(k-2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(k-2).$$

Пример разложения в ряд Фурье

Иллюстрация недостатка 2: найдем разложения в ряд Фурье периодического сигнала:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)$$

Решение

$a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(k-2).$

Найдем коэффициенты b_k

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin\left(\frac{2\pi k t}{T_0}\right)dt = ?$$

Пример разложения в ряд Фурье

Иллюстрация недостатка 2: найдем разложения в ряд Фурье периодического сигнала:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)$$

Решение

$a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(k-2).$

Найдем коэффициенты b_k

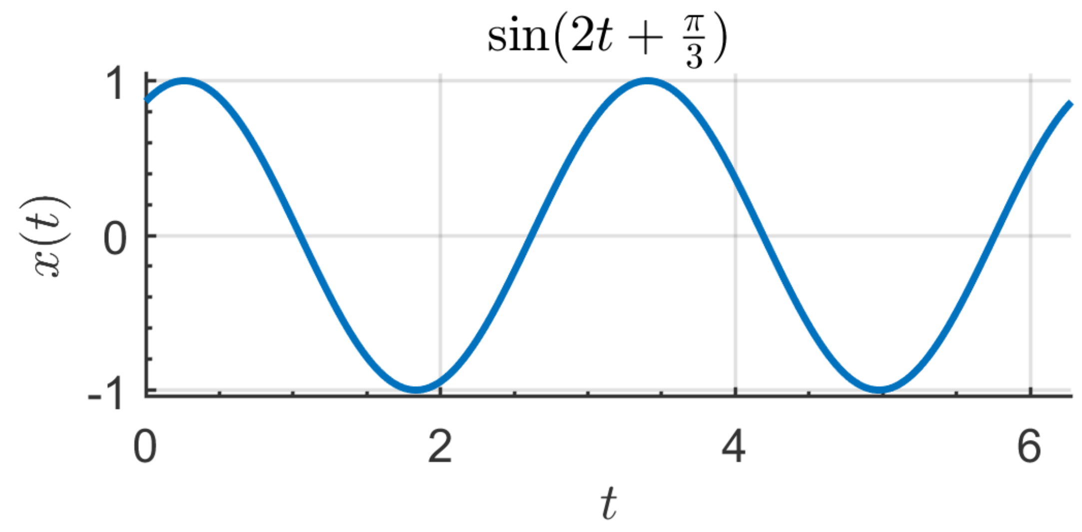
$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)\right)\sin(kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(2t)\sin(kt)\,dt}_{=\pi\delta(k-2)} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2t)\sin(kt)\,dt}_{=0} = \frac{1}{2}\,\delta(k-2).$$

Пример разложения в ряд Фурье

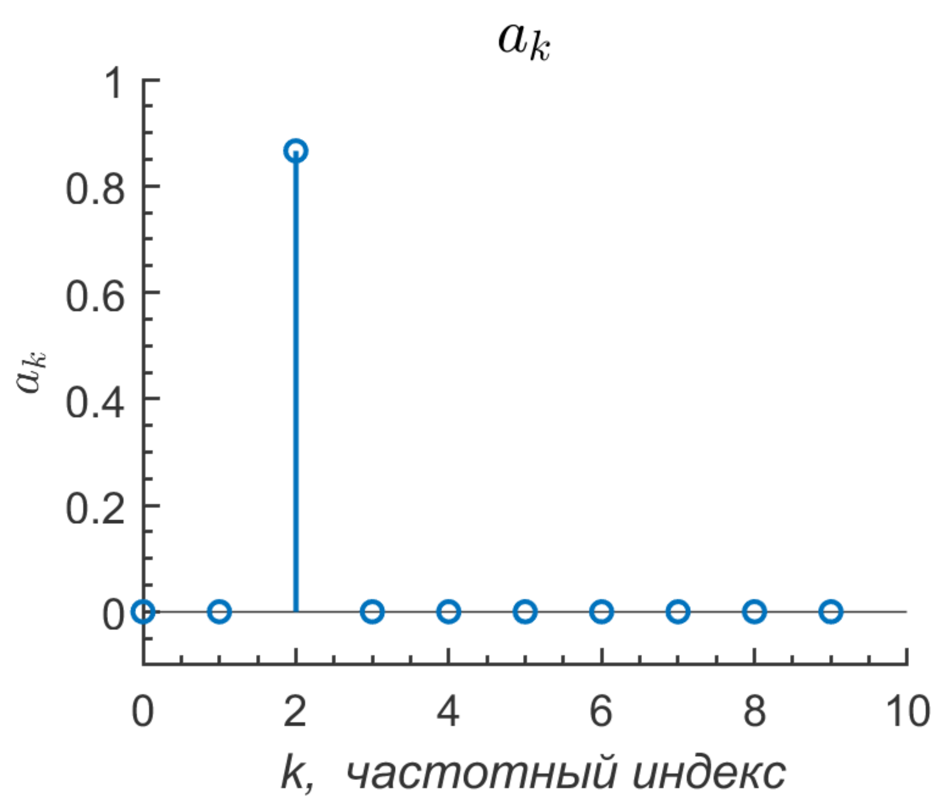
Найдем разложения в ряд Фурье периодического сигнала:

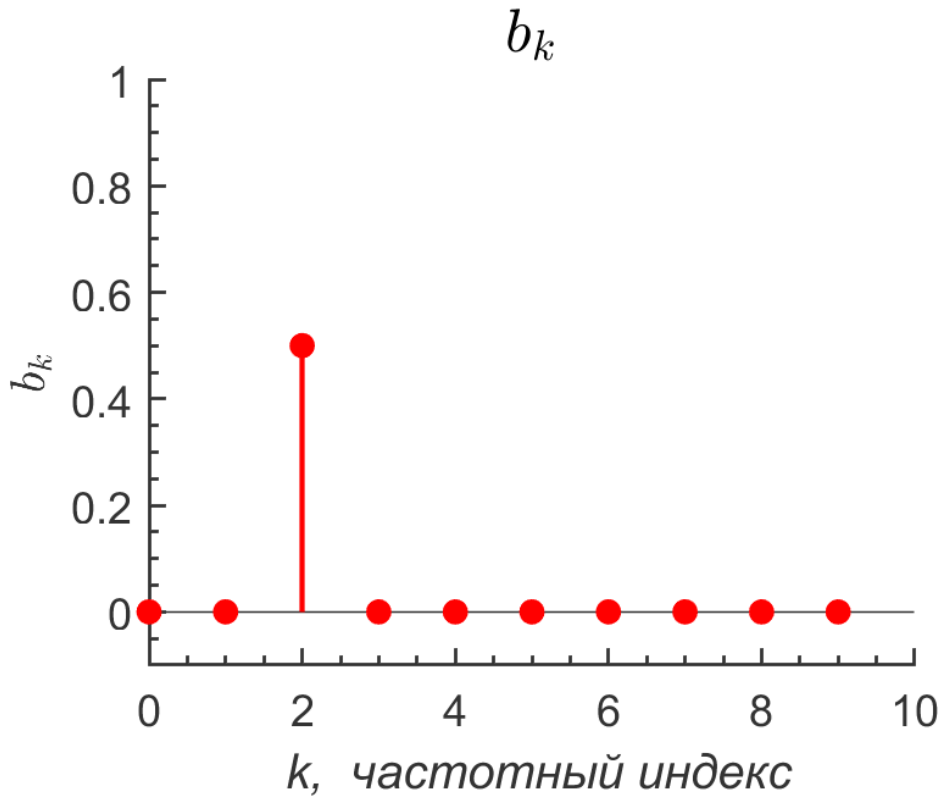
$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \quad T_0 = 2\pi.$$



Решение

$$a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(k-2) \quad b_k = \frac{1}{2}\delta(k-2).$$





Равенство Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Равенство Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$$

Вычитая и складывая равенства получим

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2}.$$

Равенство Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

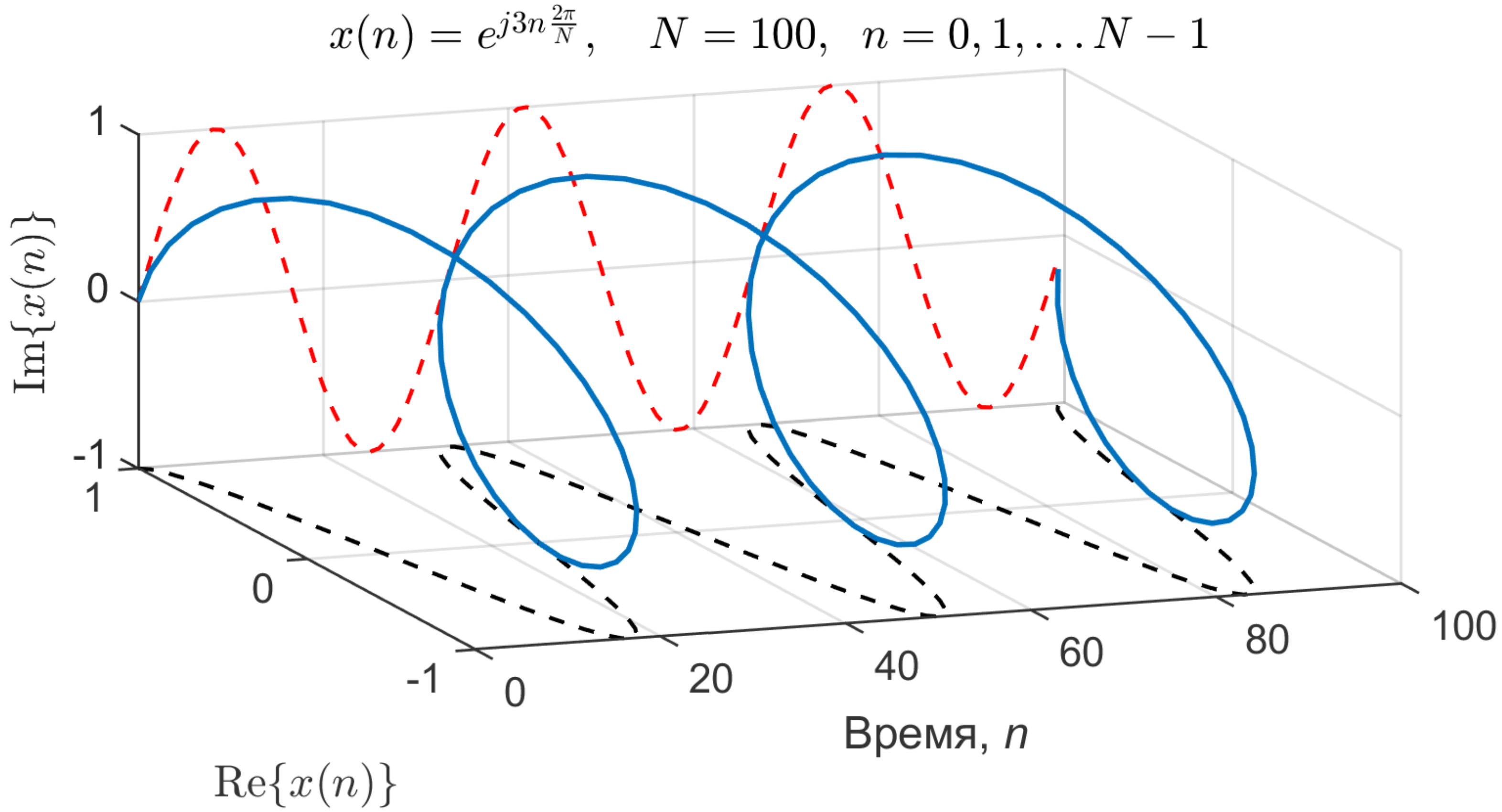
$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$$

Вычитая и складывая равенства получим

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Визуализация равенства Эйлера



$$x(n) = e^{j3n\frac{2\pi}{100}},$$

$$\mathrm{Re}\{x(n)\} = \cos 3n\frac{2\pi}{100},$$

$$\mathrm{Im}\{x(n)\} = \sin 3n\frac{2\pi}{100}.$$

Переход к комплексному базису

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

Если выполнить замену

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}}{2},$$

$$\sin \omega_k t = \frac{e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}}{2j},$$

То получим

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t},$$

Упрощение выражений

Пусть $T_0 = 2\pi$, тогда $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0} = k$

и ряд Фурье примет вид:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Переход к комплексному базису

Переходя к комплексным экспонентам $e^{\pm kt}$ получаем

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{jk} + e^{-jk}) + \frac{b_k}{2j} (e^{jk} - e^{-jk}) \right)$$

Переход к комплексному базису

Переходя к комплексным экспонентам $e^{\pm kt}$ получаем

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{jk} + e^{-jk}) + \frac{b_k}{2j} (e^{jk} - e^{-jk}) \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + \frac{b_k}{j}) e^{jk} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - \frac{b_k}{j}) e^{-jk}.$$

Переход к комплексному базису

Переходя к комплексным экспонентам $e^{\pm kt}$ получаем

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{jk} + e^{-jk}) + \frac{b_k}{2j} (e^{jk} - e^{-jk}) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + \frac{b_k}{j}) e^{jk} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - \frac{b_k}{j}) e^{-jk}.$$

Пусть $c_k = a_0/2, \;\; c_k = (a_k - jb_k)/2, \;\; c_k^* = (a_k + jb_k)/2$, тогда

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk}.$$

Переход к комплексному базису

Пусть $c_k = a_0/2, \;\; c_k = (a_k - jb_k)/2, \;\; c_k^* = (a_k + jb_k)/2$, тогда

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk}.$$

Подставляем a_k и b_k из исходных выражений для коэффициентов Фурье:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt\,, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-kt}\,dt\,, \qquad c_k^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{kt}\,dt = c_{-k}$$

Переход к комплексному базису

Пусть $c_k = a_0/2, \;\; c_k = (a_k - jb_k)/2, \;\; c_k^* = (a_k + jb_k)/2$, тогда

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk} + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk}},$$

Подставляем a_k и b_k из исходных выражений для коэффициентов Фурье:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt\,, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-kt}\,dt\,, \qquad c_k^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{kt}\,dt = c_{-k}$$

Заметим, что в этом месте появляется член ряда Фурье с ***отрицательной частотой***:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk}$$

Комплексный ряд Фурье

Формула синтеза ($T_0 = 2\pi$)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk}.$$

Формула анализа

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-kt}\,dt$$

Особенности

Коэффициенты Фурье сопряженно-симметричны: $c_k = c_{-k}^*$.

Коэффициенты c_k содержат амплитудную и фазовую информацию.

Комплексный ряд Фурье значительно упрощает запись. Затруднения из-за необходимости думать о комплексных функциях с положительными и отрицательными частотами вполне оправдывается тем выигрышем, который получается из-за простоты алгебраических выражений.

Комплексная форма ряда Фурье

Было	Стало
$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t},$

Преимущества комплексной формы записи

– Однородность;
– Информация о наличии в сигнале компоненты с частотой ω_k содержится сразу в одном коэффициенте c_k;
– Поскольку c_k являются комплексными, сигнал $x(t)$ может тоже принимать комплексные значения.

Недостатки

– Наличие в модели отрицательных частот.

Условие ортогональности функций

Комплекснозначные функции $u_k(t)$ ортогональны, если

$$\langle u_k(t), u_m(t)\rangle = \int_0^{T_0} u_k(t)u_m^*(t)dt = 0 \quad \text{для } k \neq m.$$

Легко проверить, что $u_k(t) = e^{jkt}$ (т.е. при $T_0 = 2\pi$) ортогональны:

$$\langle e^{jkt}, e^{jmt}\rangle = ?$$

Условие ортогональности

Комплекснозначные функции $u_k(t)$ ортогональны, если

$$\langle u_k(t), u_m(t) \rangle = \int_0^{T_0} u_k(t) u_m^*(t) dt = 0 \quad \text{для } k \neq m.$$

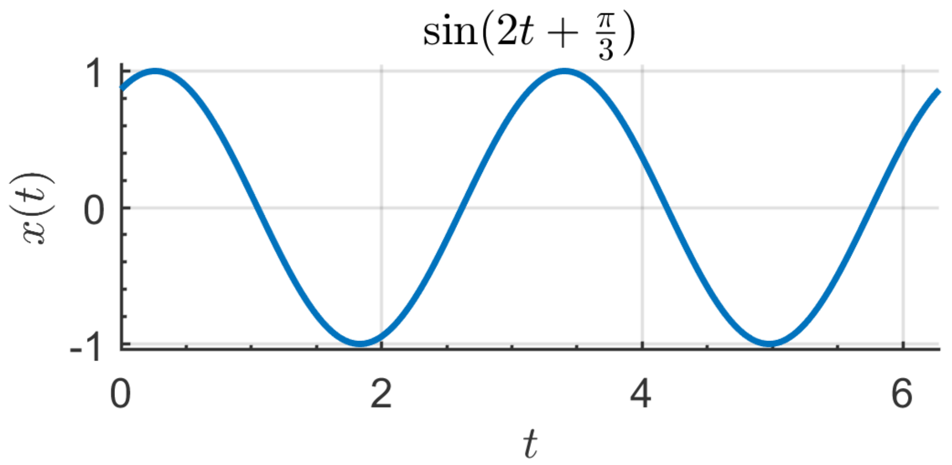
Легко проверить, что $u_k(t) = e^{jkt}$ (т.е. при $T_0 = 2\pi$) ортогональны:

$$\langle e^{jkt}, e^{jmt} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{jkt} e^{-jmt} = \begin{cases} 2\pi, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Пример разложения в комплексный ряд Фурье

Рассмотрим периодический сигнал:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \quad T_0 = 2\pi.$$



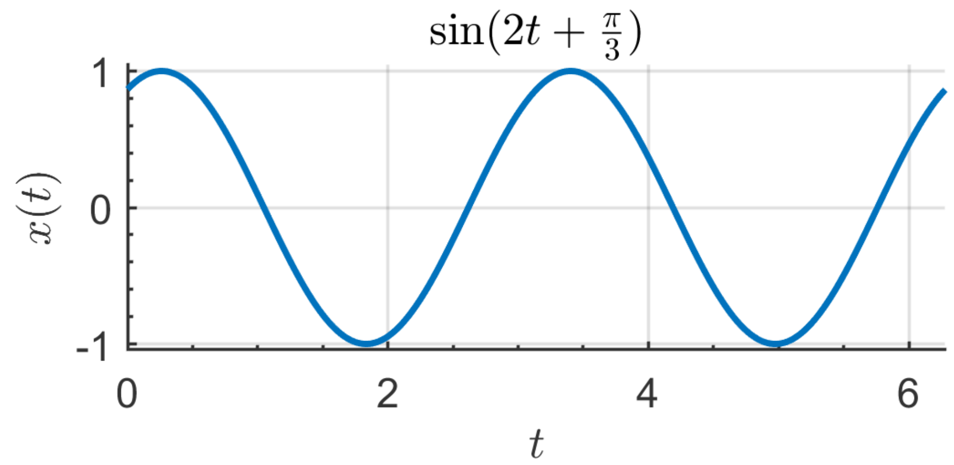
Найти его разложения в комплексный ряд Фурье.

Решение

Пример разложения в комплексный ряд Фурье

Рассмотрим периодический сигнал:

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), \;\; T_0 = 2\pi.$$



Найти его разложения в комплексный ряд Фурье.

Решение

$$a_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(k-2), \;\; b_k = \frac{1}{2}\delta(k-2) \Rightarrow c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \;\text{ и }\; c_{-k} = c_k^*.$$