Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ)

д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Дискретно-временное преобразование Фурье

ДВПФ – это преобразование Фурье для дискретных сигналов бесконечной длительности

$$x(n), \quad -\infty < n < \infty.$$

Прямое ДВПФ

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}.$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$ имеет период 2π.

Дискретно-временное преобразование Фурье

ДВПФ – это преобразование Фурье для дискретных сигналов бесконечной длительности

$$x(n), \quad -\infty < n < \infty.$$

Прямое ДВПФ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

$X(e^{j\omega})$ имеет период 2π.

Обратное ДВПФ

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Дискретно-временное преобразование Фурье

ДВПФ – это преобразование Фурье для дискретных сигналов бесконечной длительности

$$x(n), \quad -\infty < n < \infty.$$

Прямое ДВПФ

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

$X(e^{j\omega})$ имеет период 2π.

Обратное ДВПФ

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Обозначение $X(e^{j\omega})$

- отражает периодическую природу преобразования, поскольку очевидно, что $e^{j(\omega+2\pi)} = e^{j\omega}$;
- позволяет сразу определить, что функция является преобразованием Фурье от последовательности дискретного времени;
- унифицирует обозначения ДВПФ и z-преобразования.

Пример ДВПФ

Найти ДВПФ последовательности

$$x(n) = \alpha^n u(n), \quad |\alpha| < 1.$$

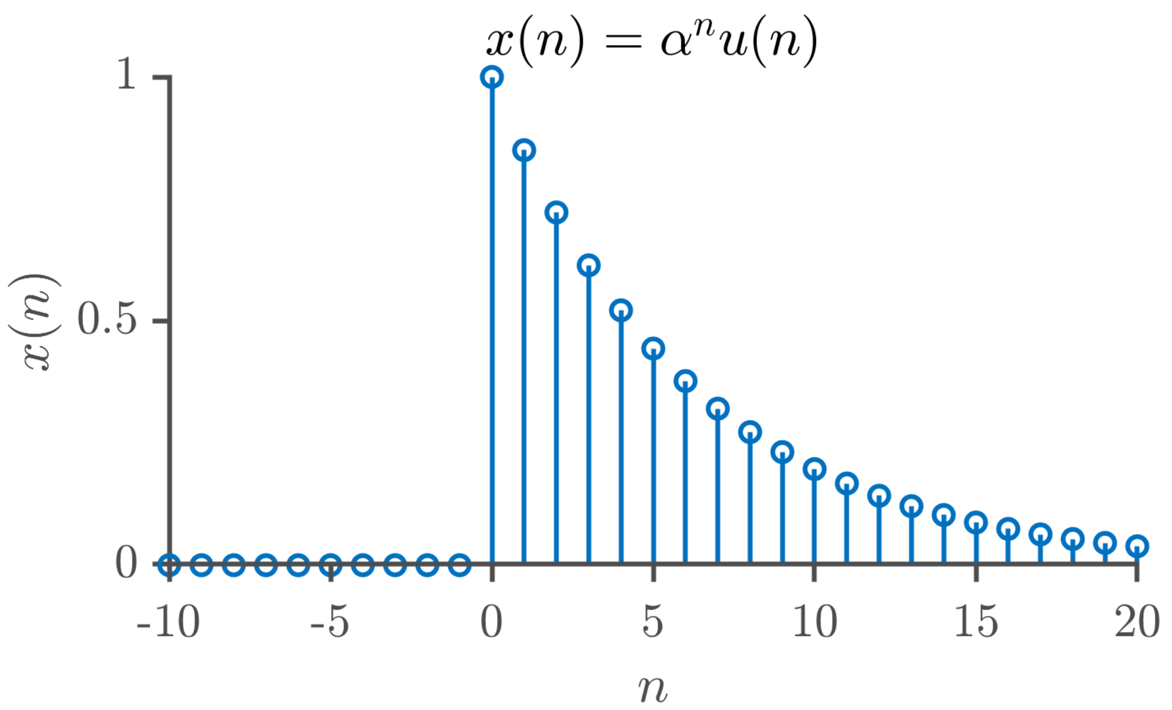
Пример ДВПФ

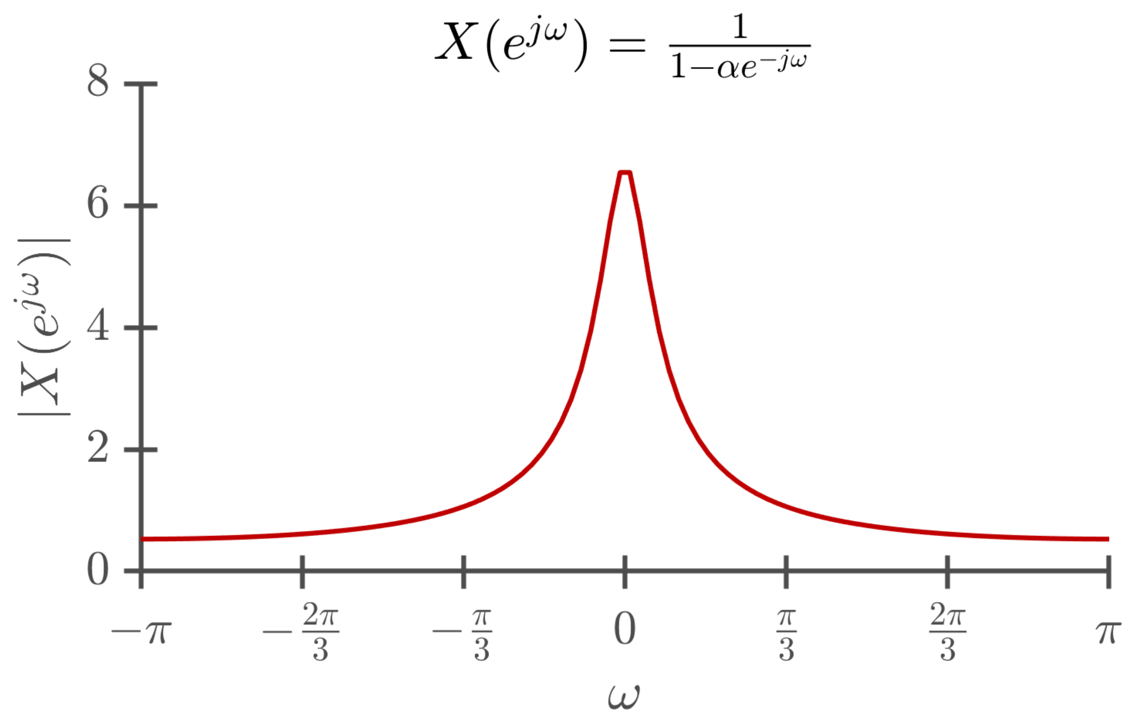
Найти ДВПФ последовательности $x(n) = \alpha^n u(n), \ |\alpha| < 1.$
По определению:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n.$$

Используя выражение: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1,$ получим

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}.$$



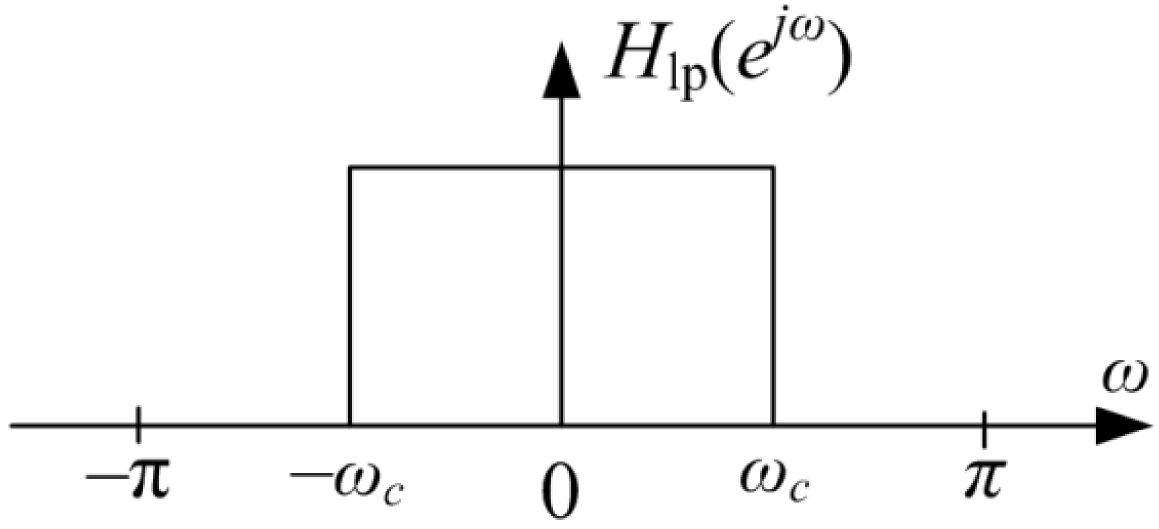


Импульсная характеристика идеального ФНЧ

Важный пример использования ДВПФ: поиск импульсной характеристики идеального фильтра нижних частот (ФНЧ).

КЧХ идеального ФНЧ

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$



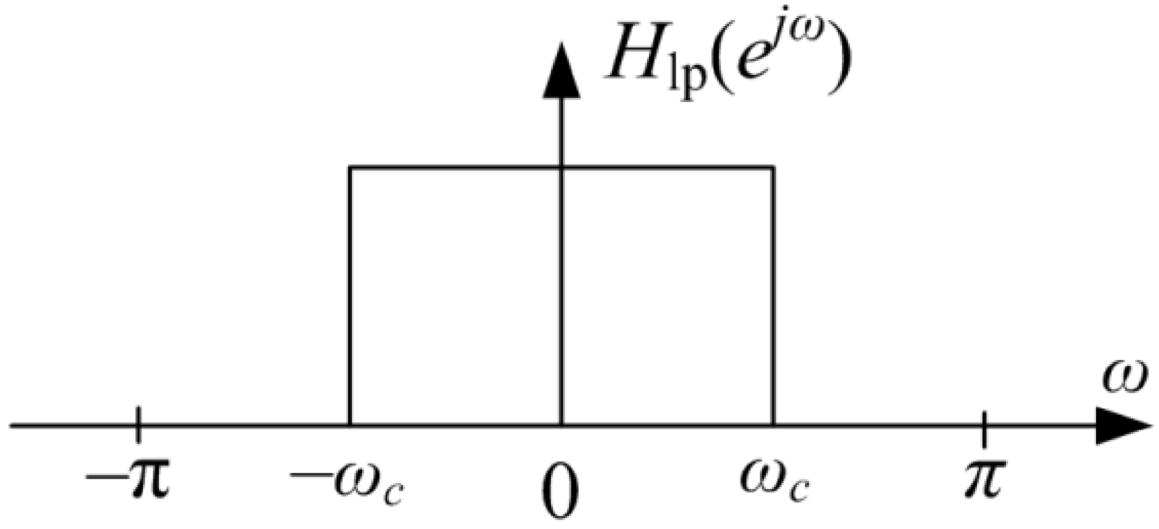
$$h_{lp}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

Импульсная характеристика идеального ФНЧ

Важный пример использования ДВПФ: поиск импульсной характеристики идеального фильтра нижних частот (ФНЧ).

КЧХ идеального ФНЧ

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$



Решение

$$h_{lp}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

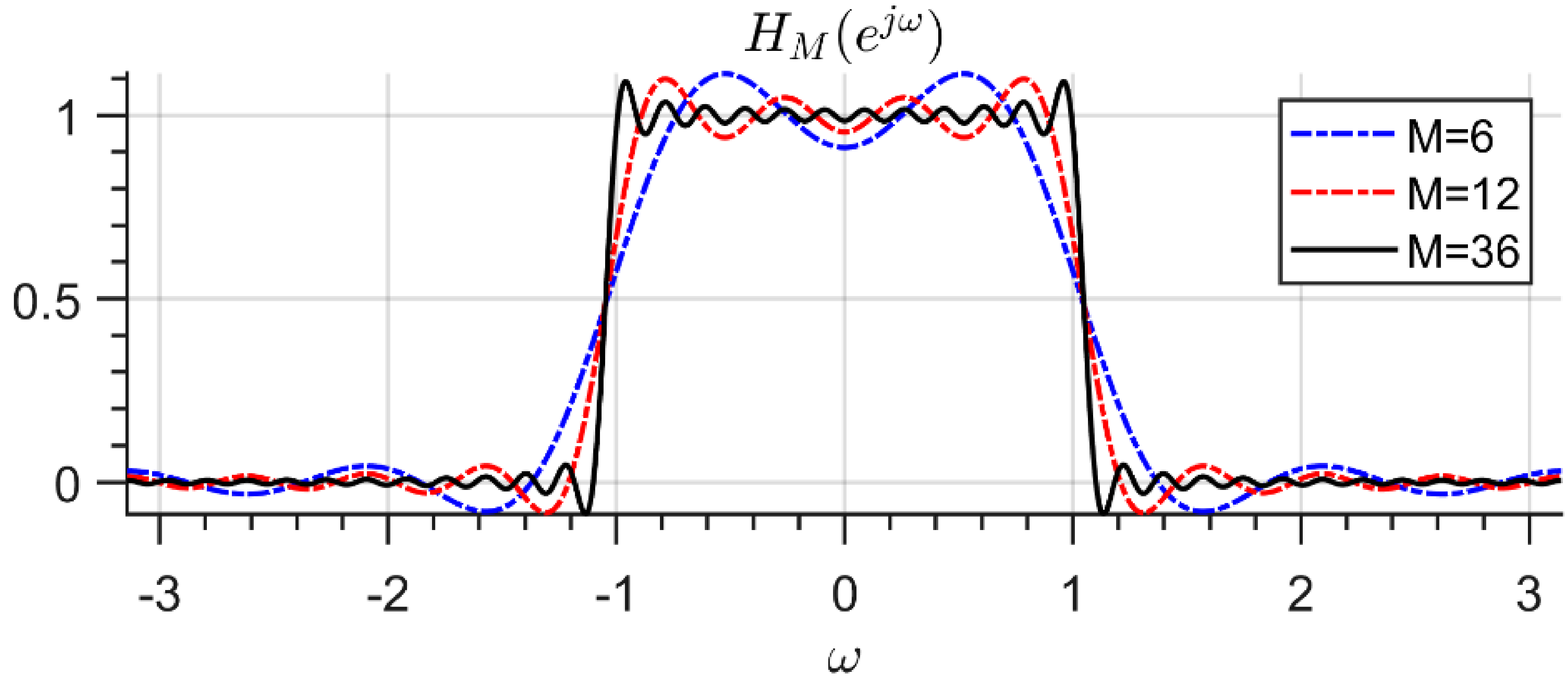
Частотная характеристика «неидеального» ФНЧ

Ограничим ***импульсную характеристику*** идеального ФНЧ временным диапазоном $-M \le n \le M$:

$$h_M(n) = h_{lp}(n) \times (u(n+M) - u(n-M))$$

и найдем его ***частотную характеристику*** используя ДВПФ:

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_M(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}.$$



ДВПФ спектр

ДВПФ представляет собой ***спектральное*** представление дискретного сигнала.

Спектр – это набор частотной и амплитудной информации, необходимой для синтеза дискретного сигнала.

ДВПФ спектр

Спектр *– это набор частотной и амплитудной информации, необходимой для синтеза дискретного сигнала*.

Представим ОДПФ в виде суммы Римана

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega_k})\Delta\omega\right)e^{j\omega_k n}$$

где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ – расстояние между частотами $\omega_k = 2\pi k/N$ в диапазоне интегрирования $0 \le \omega \le 2\pi$, который покрывается если выбрать $k = 0,1, \dots N-1$.

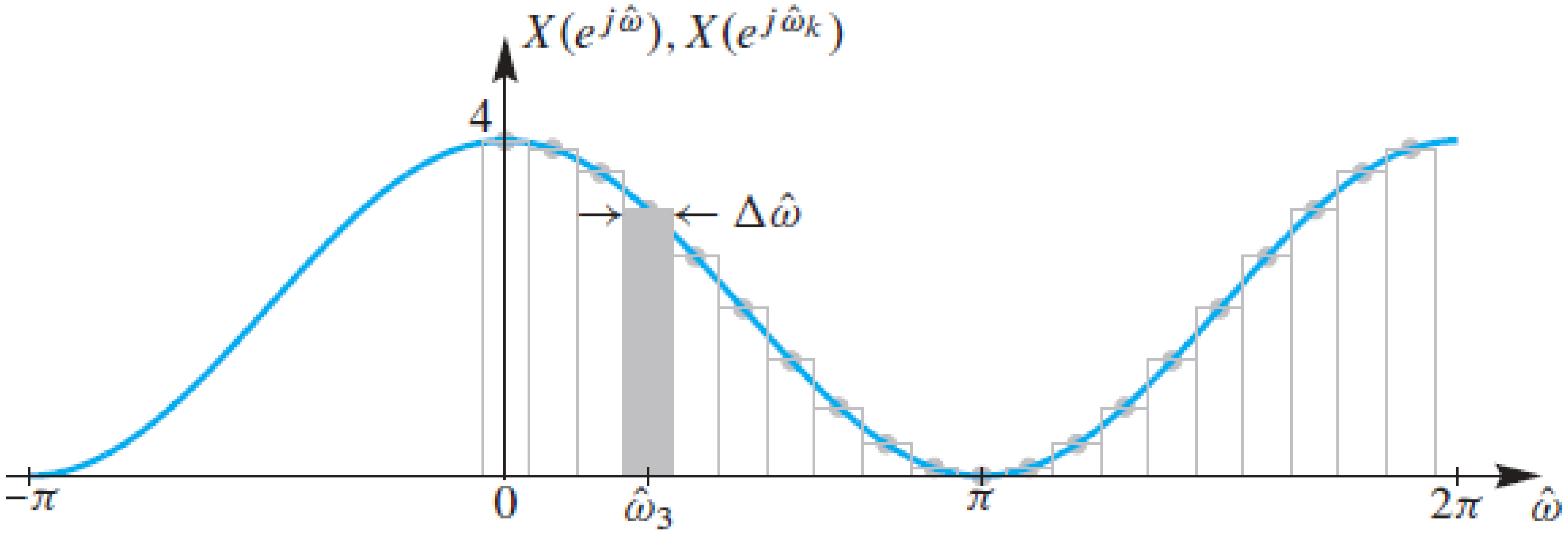


Figure 7-2 Riemann sum approximation to the integral of the inverse DTFT. Here, $X(e^{j\hat{\omega}}) = 2(1 + \cos\hat{\omega})$, which is the DTFT of $x[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$.

Связь ДВПФ со сверткой

Пусть $x(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ и $h(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega})$, тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

Доказательство

$$\text{DTFT}\{x(n) * h(n)\} = \text{DTFT}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\, e^{-j\omega n} = \big|_{m\,=\,n-k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(m)\, e^{-j\omega(m+k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

$$= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Свойства ДВПФ

Пусть $x(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ и $y(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$)

Свойство	**Сигнал**	**ДВПФ**
Линейность	$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Сдвиг	$x(n - n_0)$	$e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$
Модуляция	$e^{jn\omega_0}x(n)$	$X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
Свертка «во времени»	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Сопряжение	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Производная	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Свертка «по частоте»	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Задача 1

Найти частотную характеристику фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра), используя ДВПФ

$$y(n) = 5x(n-1) - 4x(n-3) + 3x(n-5)$$

Задача 1 (решение)

Найти частотную характеристику фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра), используя ДВПФ

$$y(n) = 5x(n-1) - 4x(n-3) + 3x(n-5).$$

Решение

КИХ-фильтр имеет следующую импульсную характеристику

$$h(n) = 5\delta(n-1) - 4\delta(n-3) + 3\delta(n-5)$$

Переводя каждый импульс по отдельности и используя свойства сдвига и линейности получаем:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 5e^{-j\omega} - 4e^{-3j\omega} + 3e^{-j5\omega}.$$

Задача 2

Найти обратное ДВПФ от

$$X\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega n_0}.$$

Задача 2 (решение)

Найти обратное ДВПФ от

$$X\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega n_0}.$$

Решение

В общем случае имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega n_0}e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n_0)}d\omega.$$

Для $n = n_0$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1d\omega = 1$$

Для $n \neq n_0$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega(n-n_0)}}{j(n-n_0)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{j\omega(n-n_0)} - e^{-j\omega(n-n_0)}}{j2\pi(n-n_0)} = 0$$