1. Пассажир, опоздавший на поезд, сначала решил догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет 20 рублей, и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на полчаса раньше, истратив при этом на 5 рублей меньше. Какова скорость поезда (в километрах в час), если скорость такси 100 километров в час, автобуса – 80 километров в час, а стоимость проезда 1 километра на такси – 50 копеек.
Ответ: 68.
2. Найдите наименьшее целое значение параметра p, при котором число целочисленных решений неравенства $4x^2-20\left(x-1\right)+3\left|4x-p\right|-p\le 0$ максимально.
Ответ: 13.
3. Найдите сумму решений уравнения $\left(\operatorname{tg}x+\sin x\right)^{1/2}+\left(\operatorname{tg}x-\sin x\right)^{1/2}=2\operatorname{tg}^{1/2}x\cos x$, принадлежащих отрезку $\left[0,2\pi\right]$.
Ответ: $\dfrac{19\pi}{6}$.
4. Найдите сумму всех действительных решений уравнения $\dfrac{\lg\left|x^4+2x^3+2x-1\right|}{\lg\left|x^2+x-1\right|}=2$.
Ответ: -6.
5. При каком наибольшем n найдётся n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?
Ответ: 11.
6. Найдите наибольшее натуральное число n, удовлетворяющее одновременно двум условиям:
1) у числа n есть не менее трёх различных натуральных делителей (включая 1 и само n);
2) сумма двух наибольших делителей числа n в 30 раз больше суммы трёх наименьших делителей.
Ответ: 775.
7. В первом ряду театра 12 мест. Сколькими способами обладатели билетов на эти места могут разместиться на них так, чтобы каждый оказался на своём месте (согласно купленному билету) или на соседнем с ним?
Ответ: 233.
8. Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое целое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть на обе чашки весов?
Ответ: 5.
9. Клетчатая полоска 1×15 занумерована числами 0, 1, …, 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на 1, 2 или 3 поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. При каких начальных положениях фишки при правильной игре выигрывает второй игрок? Запишите в ответ сумму номеров соответствующих клеток.
Ответ: 24.
10. Город имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы разделяют его на кварталы в форме квадратов со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь (в километрах квадратных) можно заключить внутрь замкнутого маршрута по улицам города длиной 10 км?
Ответ: $6{,}24$.
11. Окружность радиуса 4 с центром в точке O разделена точками A, B, C, D, E, F на шесть равных частей. Определите площадь фигуры COE, ограниченной дугой OC с центром в точке B, дугой OE с центром в точке F и дугой CE с центром в точке A.
Ответ: $\dfrac{8\pi}{3}$.
12. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF; точка D лежит на стороне BC, точка E – на стороне AC и точка F – на стороне AB. Сторона AB относится к стороне DF как $8:5$. Найдите синус угла DEC.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{3} \pm 3}{10}$.

13. Длина каждого ребра тетраэдра $ABCD$ равна 15. На рёбрах DA, DC и BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $DM = CN = 5$, $CP = 3$. Пусть Q – точка пересечения плоскости MNP и прямой AB. Найдите длину отрезка BQ.

Ответ: $\dfrac{15}{2}$.

14. Объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 56. На рёбрах BB_1 и CC_1 расположены соответственно точки M и N так, что $BM : BB_1 = 5 : 8$, $CN : CC_1 = 4 : 7$. Найдите объём многогранника $ABCA_1MN$ (усечённой призмы).

Ответ: 41.

15. Три шара попарно касаются; плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найдите радиус самого большого из шаров, если стороны треугольника ABC равны $\sqrt{2}$, 2 и $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

16. Найдите определитель девятого порядка, на главной диагонали которого расположены тройки, под главной диагональю — единицы, а над главной диагональю — пятёрки.

Ответ: 768.

17. При каком наименьшем действительном значении λ многочлены $P(x) = x^3 - \lambda x + 2$ и $Q(x) = x^2 + \lambda x + 2$ имеют общий корень?

Ответ: -1.

18. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. Плоскость P отсекает от трёх боковых рёбер SA, SB и SC соответственно $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{5}$ (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от ребра SD?

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

19. Последовательность (a_n) удовлетворяет при любом натуральном n соотношению $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$. Найдите a_{2023}, если $a_{19} = 19$, $a_{97} = 97$.

Ответ: 1842.

20. Последовательность (a_n) задана соотношениями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n \ge 1$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

21. Функция $f(x) \in C^2[0,1]$ имеет не менее двух нулей на отрезке $[0,1]$ (с учётом кратности) и, кроме того, $|f''(x)| \le 1$ для всех $x \in [0,1]$. Какое наибольшее значение может принимать $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$?

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

22. Вычислите $\displaystyle\int_A \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$, где $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, $A = [-1,3] \setminus \{\{0\} \cup \{2\}\}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{32}{27} - 2\pi$.

23. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой γ, заданной уравнением $x^7 + y^7 = x^3 y^3$.

Ответ: $\dfrac{1}{14}$.

24. Все живые организмы постоянно участвуют в углеродном обмене, получая углерод из окружающей среды. После гибели организма обмен углеродом с окружающей средой прекращается и радиоактивный изотоп ^{14}C в останках постепенно распадается. Скорость распада изотопа ^{14}C, описывающая изменение концентрации изотопа в единицу времени, в соответствии с законом действующих масс в каждый момент времени прямо пропорциональна его текущей концентрации. Время, за которое распадается половина ^{14}C, составляет $5{,}7 \pm 0{,}03$ тысяч лет. При археологических раскопках было найдено дерево, содержание ^{14}C в котором составляет $75\ \%$ от нормального. Определите наименьший возможный возраст (в годах) найденного дерева.

Ответ: $5670\left(2 - \log_2 3\right)$.

25. Пусть $y = y\left(x\right)$ — решение дифференциального уравнения $y' + \dfrac{y}{x} - e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x} = 0$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, удовлетворяющее условию $y\left(\pi\right) = 0$. Найдите $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Ответ: $-\dfrac{3\ln 2}{2\pi}$.

26. Пусть $y = y\left(x\right)$ — решение интегро-дифференциального уравнения

$$\int_0^x y\left(\xi\right)d\xi - \ln\sqrt{y'} - x = 0,\ x > 0,$$

удовлетворяющее условиям $y\left(0\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y\left(x\right) = 1$. Найдите $y\left(10\right)$.

Ответ: $\dfrac{10}{11}$.

27. Пусть $p\left(x\right) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $f\left(\alpha\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{p\left(x\right)}$. Найдите точку минимума функции $f\left(\alpha\right)$.

Ответ: 2.

28. Вычислите $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x\right)\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

29. Вычислите сумму $\left[\dfrac{2024}{2}\right] + \left[\dfrac{2025}{4}\right] + \left[\dfrac{2027}{8}\right] + \ldots + \left[\dfrac{2023+2^n}{2^{n+1}}\right] + \ldots$, где $\left[x\right]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: 2023.

30. Найдите сумму всех действительных решений уравнения $-2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{5}{x^4} + \ldots = 0$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.