Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

Библиотека БГУИР

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ИЗБРАННЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей
I ступени высшего образования, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2022

УДК 517(076)
ББК 22.1я73
С23

Авторы:

Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
Т. С. Степанова, И. Е. Конюх, Н. Л. Новротская

Рецензенты:

кафедра высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
(протокол № 7 от 29.01.2021);

доцент кафедры вычислительной математики
Белорусского государственного университета
кандидат физико-математических наук, доцент В. И. Белько

Библиотека БГУИР

С23 **Сборник** задач по избранным главам высшей математики : пособие / Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2022. – 92 с. : ил.
ISBN 978-985-543-656-1.

Входит в состав методического комплекса и является продолжением серии практикумов по высшей математике для студентов технических и экономических специальностей по разделам «Кратные интегралы», «Дифференциальные уравнения», «Теория поля», «Ряды», «Теория функций комплексной переменной». Рекомендуется использовать для реализации смешанной модели обучения по ИТ-специальностям.

УДК 517(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-656-1

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2022

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения заданная (явно/неявно/параметрически) функция $y(x)$:

а) $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$, $y = (x+2)^5$. **Ответ:** да.

б) $xy' - y = xe^x$, $y = x\int \frac{e^x}{x}dx + 3x$. **Ответ:** да.

в) $(x+y)^2 y' = 1$, $y = \operatorname{arctg}(x+y)$. **Ответ:** да.

г) $(x-2y)y' = 2x - y$, $x^2 - xy + y^2 = 7$. **Ответ:** да.

д) $dx + (y-x-1)dy = 0$, $\begin{cases} x = t - 2e^t + 4, \\ y = t + 4. \end{cases}$ **Ответ:** да.

е) $y''^2 + 2y'' + x = 5$, $\begin{cases} x = 5 - t^2 - 2t, \\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{6}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 8. \end{cases}$ **Ответ:** да.

2. Составить дифференциальное уравнение данного семейства кривых:

а) $2x^2 + y^2 - Cy = 0$. **Ответ:** $(2x^2 - y^2)y' - 4xy = 0$.

б) $y = \cos(3x + C)$. **Ответ:** $y'^2 + 9y^2 = 9$.

в) Семейство окружностей с общим центром $A(1;2)$.

Ответ: $(y-2)y' + x - 1 = 0$.

д) $y = Cx^3 + x$. **Ответ:** $xy' - 3y + 2x = 0$.

е) Семейство парабол с вершинами в т. $O(0;0)$ и осью симметрии Ox.

Ответ: $2xy' - y = 0$.

ж) $x^2 - y^2 = Cx$. **Ответ:** $2xyy' = x^2 + y^2$.

3. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

а) $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$. **Ответ:** $y = \frac{x+C}{1-Cx}$.

б) $(1+x^2)e^y dy - 2x(1+e^y)dx = 0$. **Ответ:** $e^y = Cx^2 + C - 1$.

в) $y' = e^{x+y}$. **Ответ:** $e^x + e^{-y} + C = 0$.

г) $y - xy' = 1 + x^2 y'$. **Ответ:** $y = \frac{Cx}{x+1} + 1$.

Библиотека БГУИР

д) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$. **Ответ:** $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}\right|=2\sin\dfrac{x}{2}+C$.

е) $xdy-\dfrac{ydx}{\ln x}=0$. **Ответ:** $y=C\cdot\ln x$.

4. Решить задачу Коши:

а) $(y-4)dx-(x+1)dy=0,\ \ y(1)=10$. **Ответ:** $y=3x+7$.

б) $y\cos\sqrt{x}dx-\sqrt{x}dy=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi^2}{36}\right)=2e$. **Ответ:** $y=2e^{2\sin\sqrt{x}}$.

в) $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})dy=0,\ \ y(0)=2$. **Ответ:** $y^2(e^{2x}+1)=8$.

5. Решить уравнение:

а) $y'=3y+2x-5$. **Ответ:** $9y+6x-13=Ce^{3x}$.

б) $y'=\sin^2(x-y+5)$.

Ответ: $\operatorname{tg}(x-y+5)=x+C;\ \ x-y+5=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

в) $y'=\dfrac{2x+y-1}{4x+2y+3}$.

Ответ: $\ln|2x+y+1|=x-2y+C,\ \ y=-2x-1$.

г) $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

Ответ: $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.

6. Найти кривую, у которой отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке.

Ответ: $y^2-x^2=C$.

7. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;3)$, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке M в четыре раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку M с началом координат.

Ответ: $y=3x^4$.

8. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

Ответ: $y=Cx^2$.

9. Тело охладилось за 10 мин от 100 до 60°. Температура окружающего воздуха равна 20°. За какое время тело остынет от 100 до 25°, если известно, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды?

Ответ: 40 мин.

Библиотека БГУИР

10. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля равна 10 м/с. Когда скорость корабля уменьшится до 1 м/с, если известно, что через 5с она стала равна 8 м/с?

Ответ: $t = \dfrac{5}{\lg 1,25} \approx 52\,(\text{с})$.

11. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

Ответ: $m = 10e^{-3} \approx 0,5\,(\text{кг})$.

12. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 3 м от начала отсчета пути и имела скорость 15 м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 12 с после начала движения.

Ответ: $S = S(12) - S(0) = 30\,\text{м}$, $v(12) = \dfrac{15}{11}\,\text{м/с}$.

13. Определить, является ли данная функция однородной. Если является, то однородная какой степени:

а) $f(x, y) = 5x + 4y$. **Ответ:** да, первой степени.

б) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 7$. **Ответ:** нет.

в) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y - 5y^3}{x^3 + 2xy^2}$. **Ответ:** да, нулевой степени.

г) $f(x, y) = xy^2 + 3x^2 - 6y$. **Ответ:** нет.

д) $f(x, y) = \sqrt[3]{x + 8y}$. **Ответ:** да, степени $\dfrac{1}{3}$.

е) $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}} - y\cos\dfrac{y}{x}$. **Ответ:** да, первой степени.

14. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

а) $(2x + y)dy - (x + 2y)dx = 0$. **Ответ:** $(y - x)^3 = C(x + y)$.

б) $2y^2 dx - (x^2 + 4xy)dy = 0$. **Ответ:** $2y^2 + xy - Cx = 0$.

в) $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$. **Ответ:** $y = xe^{C/x}$.

г) $\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy - ydx = 0$.

Указание. Использовать замену $z(y) = \dfrac{x(y)}{y}$. **Ответ:** $y^2 - 2Cx = C^2$.

Библиотека БГУИР

15. Решить задачу Коши:

а) $y'=\dfrac{x-y}{x-2y}$, $y(1)=2$. **Ответ:** $x^2-2xy+2y^2=5$.

б) $ydx+(\sqrt{xy}-x)dy=0$, $y(1)=1$. **Ответ:** $2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\ln|y|=2$.

в) $y'=e^{-y/x}+\dfrac{y}{x}$, $y(1)=0$. **Ответ:** $e^{y/x}=\ln|x|+1$.

16. Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), если расстояние от любой касательной к этой кривой до начала координат равно абсциссе точки касания.

Ответ: $(x-1)^2+y^2=1$.

17. Найти кривую, в каждой точке которой длина отрезка касательной, заключенного между точкой касания и осью Ox, равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси Ox.

Ответ: $x^2+y^2-Cy=0$.

18. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

а) $(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0$. **Ответ:** $\dfrac{x^2}{2}+y^2-xy+y=C$.

б) $y'=\dfrac{x-2y+3}{2x+y+1}$.

Ответ: $(y-1)^2+4(x+1)(y-1)-(x+1)^2=C$.

в) $(x-y-3)dx=(x+y+1)dy$.

Ответ: $(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-(y+2)^2=C$.

19. Решить линейное дифференциальное уравнение: а) методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной); б) методом Бернулли:

а) $y'-y=e^x$. **Ответ:** $y=(x+C)e^x$.

б) $y'+y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$. **Ответ:** $y=\sin x+C\cos x$.

в) $x\ln x\cdot y'+y=2\ln x$. **Ответ:** $y=\ln x+\dfrac{C}{\ln x}$.

20. Решить линейное дифференциальное уравнение методом Эйлера (методом интегрирующего множителя):

а) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$. **Ответ:** $y=(x+C)e^{-\sin x}$.

б) $xy'-2y=x^3+x$. **Ответ:** $y=x^3-x+Cx^2$.

в) $y'\sin x-y\cos x=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$. **Ответ:** $y=C\sin x-\dfrac{\sin x}{x}$.

Библиотека БГУИР

21. Решить задачу Коши:

а) $y'-2y=e^{-x}$, $y(0)=-1$. **Ответ:** $y=-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{2x}$.

б) $y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$, $y(\pi)=4$. **Ответ:** $y=-2\cos^2 x-6\cos x$.

в) $y'\cos x-y\sin x=-\cos x-x\sin x$, $y(0)=2$.

Ответ: $y=x-2\operatorname{tg}x+\frac{2}{\cos x}$.

22. Решить уравнение:

а) $y^2dx-(2xy+3)dy=0$. **Ответ:** $x=Cy^2-\frac{1}{y}$.

б) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$. **Ответ:** $x=y\ln y+\frac{C}{y}$.

Указание. Рассмотреть уравнения относительно функции $x(y)$.

23. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;0)$, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен кубу абсциссы точки касания.

Ответ: $y=-\frac{1}{2}x^3+2x$.

24. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная S.

Ответ: $xy=Cy^2\pm S$, $\forall C\in\mathbb{R}$.

25. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

а) $y'-xy=x^3y^2$. **Ответ:** $y\cdot(Ce^{-\frac{x^2}{2}}-x^2+2)=1$, $y=0$.

б) $2yy'+y^2=x$. **Ответ:** $y^2=Ce^{-x}+x-1$.

в) $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2y^2}$. **Ответ:** $y^3=\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}$.

г) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$. **Ответ:** $y=x^4(\ln|x|+C)^2$, $y=0$.

26. Составить уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox находится на параболе $y^2=x$.

Ответ: $y^2=4x+4-4e^x$.

27. Найти кривую, проходящую через точку $A(4;2)$, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy, равен квадрату ординаты точки касания.

Ответ: $y=\frac{x}{x-2}$.

Библиотека БГУИР

28. Определить тип и решить дифференциальное уравнение или задачу Коши:

а) $(2xy+3y^2-4x)dx+(x^2+6xy+8y)dy=0$.

Ответ: $x^2y+3xy^2-2x^2+4y^2=C$.

б) $x+ye^x+(y+e^x)y'=0$. **Ответ:** $x^2+2ye^x+y^2=C$.

в) $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $y(1)=1$. **Ответ:** $x^2+y^2+2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=2+\dfrac{\pi}{2}$.

г) $(2x\sin y-y^2\sin x)dx+(x^2\cos y+2y\cos x+3)dy=0$, $y(0)=1$.

Ответ: $x^2\sin y+y^2\cos x+3y=4$.

д) $(2x-y+2e^{-x})dx+(2y-x-\operatorname{tg}y)dy=0$, $y(0)=0$.

Ответ: $x^2-xy-2e^{-x}+y^2+\ln|\cos y|+2=0$.

е) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-2\right)dx-\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}-2\right)dy=0$, $y(5)=3$.

Ответ: $\sqrt{x^2-y^2}-2x+2y=0$.

29. Решить дифференциальное уравнение, если известно, что оно имеет интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:

а) $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$. **Ответ:** $\mu(x)=\dfrac{1}{x^3}$; $\dfrac{y^2}{2x^2}+y=C$, $x=0$.

б) $y(1+xy)dx-xdy=0$. **Ответ:** $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$; $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$, $y=0$.

в) $(x^2+3y)dx-xdy=0$. **Ответ:** $\mu(x)=\dfrac{1}{x^4}$; $x^2+y=Cx^3$, $x=0$.

г) $y\sin 2xdx+(y^2-\sin^2 x)dy=0$.

Ответ: $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$; $\sin^2 x+y^2=Cy$, $y=0$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, интегрируемые в квадратурах и допускающие понижение порядка

30. Решить уравнение или задачу Коши:

а) $y'''=x^2-\sin x$. **Ответ:** $y=\dfrac{x^5}{60}-\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

Библиотека БГУИР

б) $y''' = x\ln x$. **Ответ:** $y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

в) $y'' = \frac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$. **Ответ:** $y = 2x + 1 - \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x$.

г) $y'''^2 - 6xy''' + 6xe^x = e^{2x}$.

Ответ: $y = \frac{1}{4}x^4 - e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$, $y = e^x + C_4x^2 + C_5x + C_6$.

д) $y''^3 - 1 = y''^2 - x$.

Ответ: $x = t^2 - t^3 + 1$, $y = \frac{4}{15}t^5 - \frac{7}{12}t^6 + \frac{9}{28}t^7 + C_1(t^2 - t^3) + C_2$.

е) $2y'' + e^{y''} = x$.

Ответ: $x = e^t + 2t$, $y = e^t(t^2 - 2 + C_1) + \frac{1}{4}e^{2t}(2t - 3) + \frac{2}{3}t^3 + 2C_1t + C_2$.

31. Решить уравнение или задачу Коши:

а) $2xy^{IV} = y'''$. **Ответ:** $y = C_1\sqrt{x^7} + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

б) $y''' = \sqrt{\frac{y''}{x}}$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{15}C_1\sqrt{x^5} + \frac{1}{2}C_1^2x^2 + C_2x + C_3$, $y = C_4x + C_5$.

в) $x^2y''' - xy'' + 1 = 0$. **Ответ:** $y = \frac{1}{2}x(\ln x - 1) + C_1x^3 + C_2x + C_3$.

г) $y''' + y''\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 2$.

Ответ: $y = -\sin x - 2\cos x + 4x + 3$.

32. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а) $yy'' = y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$. **Ответ:** $y = 2e^{3x}$.

б) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **Ответ:** $y = \ln\frac{1}{1 \pm x}$.

в) $3y'y'' = e^y$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$. **Ответ:** $y = 3\ln\left(-\frac{3}{x}\right)$.

г) $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. **Ответ:** $y^2 - x^2 = 1$.

Библиотека БГУИР

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений

33. Исследовать данные функции на линейную зависимость, пользуясь определением или с помощью определителя Вронского, если возможно:

а) $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{3x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно независимы.

б) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x$, $f_3(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно зависимы.

в) $f_1(x)=\cos^2 x$, $f_2(x)=\sin^2 x$, $f_3(x)=5$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно зависимы.

г) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно независимы.

д) $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно независимы.

е) $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x\cdot|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: линейно независимы.

34. Решить линейное однородное уравнение:

а) $y''+5y'+6y=0$. **Ответ:** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.

б) $y''-8y'=0$. **Ответ:** $y=C_1+C_2e^{8x}$.

в) $y'''-4y''+3y'=0$. **Ответ:** $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{3x}$.

г) $y'''+2y''-9y'-18y=0$. **Ответ:** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{3x}$.

д) $y''+8y'+16y=0$. **Ответ:** $y=(C_1+C_2x)e^{-4x}$.

е) $4y''-12y'+9y=0$. **Ответ:** $y=(C_1+C_2x)e^{3x/2}$.

ж) $y''-2y'+2y=0$. **Ответ:** $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

з) $y''-6y'+13=0$. **Ответ:** $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

и) $y^{IV}+26y''+25y=0$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 5x+C_4\sin 5x$.

к) $y^{IV}-16y=0$.

Ответ: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

л) $y^{IV}+4y=0$.

Ответ: $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

Библиотека БГУИР

м) $y^{IV}+2y''+y=0$.

Ответ: $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

35. Решить линейное неоднородное уравнение методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа):

а) $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.

Ответ: $y=\left(\dfrac{1}{9}\ln\left|\cos 3x\right|+C_1\right)\cos 3x+\left(\dfrac{1}{3}x+C_2\right)\sin 3x$.

б) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

Ответ: $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)\right)$.

в) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$.

г) $y''-y'=\dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^x+\dfrac{e^x}{x}$.

36. Указать вид частного решения уравнения, не находя числовых значений коэффициентов:

а) $y''+2y'+3y=5x$. **Ответ:** $y_ч=Ax+B$.

б) $y'''+4y''=1-x$. **Ответ:** $y_ч=x^2(Ax+B)$.

в) $y'''+y=x^2e^x$. **Ответ:** $y_ч=(Ax^2+Bx+C)e^x$.

г) $2y''-7y'+3y=(7-4x)e^{3x}$. **Ответ:** $y_ч=x(Ax+B)e^{3x}$.

д) $y''-2y'-5y=\sin 2x$. **Ответ:** $y_ч=A\cos 2x+B\sin 2x$.

е) $y''+9y=x\cos 3x$.

Ответ: $y_ч=x((Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x)$.

ж) $y'''+2y''+y'=3x^2\cos x+\sin x$.

Ответ: $y_ч=(Ax^2+Bx+C)\cos x+(Dx^2+Ex+F)\sin x$.

з) $y''-2y'+2y=xe^x\sin x$.

Ответ: $y_ч=xe^x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$.

и) $y'''+16y'=2x^2-1+3e^{4x}$.

Ответ: $y_ч=x(Ax^2+Bx+C)+De^{4x}$.

Библиотека БГУИР

к) $y''+y=5xe^{x}-4x\cos x$.

Ответ: $y_ч=(Ax+B)e^{x}+x((Cx+D)\cos x+(Ex+F)\sin x)$.

л) $y^{(7)}+8y^{(5)}+16y^{(3)}=\sin 2x-x$.

Ответ: $y_ч=x^{3}(Ax+B)+x^{2}(C\cos 2x+D\sin 2x)$.

м) $y''+4y=(2x+1)\cos^{2}x$.

Ответ: $y_ч=Ax+B+x((Cx+D)\cos 2x+(Ex+F)\sin 2x)$.

37. Решить линейное неоднородное уравнение, найдя предварительно его частное решение:

а) $y''+7y'+6y=24$. **Ответ:** $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{-x}+4$.

б) $y'''+3y''-y'-3y=3x-14$.

Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+C_3e^{x}-x+5$.

в) $y'''+5y''=8-60x$.

Ответ: $y=C_1e^{-5x}+C_2+C_3x+2x^{2}-2x^{3}$.

г) $y'''+3y''+3y'+y=6e^{-x}$.

Ответ: $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^{2}+x^{3})$.

д) $y''+4y'+13y=40\sin 3x$.

Ответ: $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)-3\cos 3x+\sin 3x$.

е) $y''-5y'+6y=8e^{x}+3e^{2x}$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+4e^{x}-3xe^{2x}$.

38. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а) $y''-2y'+5y=0,\ \ y(0)=-1,\ \ y'(0)=1$.

Ответ: $y=e^{x}(\sin 2x-\cos 2x)$.

б) $y''+y=\mathrm{tg}x,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=0$.

Ответ: $y=\sin x+\cos x\left(\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+2\right)$.

в) $y'''-4y''+3y'=18x+2e^{2x},\ \ y(0)=-4,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=2$.

Ответ: $y=5-9e^{x}+e^{3x}+3x^{2}+8x-e^{2x}$.

Библиотека БГУИР

г) $y''' - 5y'' + 6y' = 180\sin^2 3x,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 15,\ \ y''(0) = 21.$

Ответ: $y = 3e^{-x} + \frac{1}{4}e^{6x} + 15x + 2 - \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\sin 6x.$

39. Решить линейную однородную систему дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 3z. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}, z = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{5x}.$

б) $\begin{cases} y' = 6y + 3z, \\ z' = -8y - 5z. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, z = -\frac{8}{3}C_1 e^{-2x} - C_2 e^{3x}.$

в) $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = 2z. \end{cases}$ **Ответ:** $y = C_1 + C_2 e^{2x}, z = -2C_2 e^{2x}.$

г) $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y - z. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ z = \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\cos x + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\sin x.$

д) $\begin{cases} y' = z, \\ z' = -4y. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ z = 2C_2 \cos 2x - 2C_1 \sin 2x.$

е) $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 4y + 3z. \end{cases}$

Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ z = e^{3x}(-2C_2 \cos 2x + 2C_1 \sin 2x).$

40. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + e^x, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x},\ \ z = -C_1 + C_2 e^{2x} - e^x.$

б) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z + 8x, \\ \dfrac{dz}{dx} = 5y - z + 1. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x + \dfrac{7}{4}$,

$z = (C_1 - 2C_2)\cos 2x + (2C_1 + C_2)\sin 2x + 10x - \dfrac{1}{4}$.

в) $\begin{cases} y' = -y - 2z + 6e^{-x}, \\ z' = 3y + 4z + 2x. \end{cases}$

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - 5e^{-x} - 2x - 3,\ z = -C_1 e^{x} - \dfrac{3}{2} C_2 e^{2x} + 3e^{-x} + x + \dfrac{5}{2}$.

г) $\begin{cases} y' = z + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ z' = -y + \operatorname{tg} x. \end{cases}$

Ответ: $y = -C_2 \cos x + C_1 \sin x + \operatorname{tg} x,\ z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2$.

41. Решить задачу Коши:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z - 5\cos x, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + z, \quad y(0) = 5,\ z(0) = 3. \end{cases}$

Ответ: $y = 4e^{-x} + 2e^{2x} - \cos x - 2\sin x,\ z = -4e^{-x} + 4e^{2x} + 3\cos x + \sin x$.

б) $\begin{cases} y' = -6y + z + 9e^{-x}, \\ z' = 2y - 5z + 40e^{x}, \quad y(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$

Ответ: $y = e^{-7x} - 3e^{-4x} + 2e^{-x} + e^{x},\ z = -e^{-7x} - 6e^{-4x} + e^{-x} + 7e^{x}$.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойной интеграл

1. Вычислить повторный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{1}^{2} x^2 y\, dy$. **Ответ:** 1.

Библиотека БГУИР

б) $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{0}^{6} \frac{x}{y^3}\, dx$. **Ответ:** $\frac{27}{16}$.

в) $\int\limits_{4}^{5} dx \int\limits_{1}^{3} (x+2y)\, dy$. **Ответ:** 17.

г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(x-y)\, dx$. **Ответ:** 2.

д) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1/x}^{x} (x^2+y^2)\, dy$. **Ответ:** $3\frac{3}{8}$.

е) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2y} e^{x+y}\, dx$. **Ответ:** $\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}$.

2. Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, к которым сводится двойной интеграл $I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ (функция $f(x,y)$ непрерывна в области D):

а) D ограничена кривыми $y = 2x^2$, $y = 8$.

Ответ: $I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx$.

б) D ограничена прямыми $x=-1$, $x=2$, $y=2x-2$, $y=3x+1$.

Ответ:

$$I = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2x-2}^{3x+1} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-4}^{-2} dy \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}y+1} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}y+1} f(x,y)\,dx +$$

$$+\int\limits_{2}^{7} dy \int\limits_{\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}}^{2} f(x,y)\,dx.$$

в) D ограничена эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$.

Ответ: $I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}} f(x,y)\,dx$.

Библиотека БГУИР

г) D ограничена кривыми $x=2-y^2$, $y=x$.

Ответ: $I=\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y}^{2-y^2}f(x,y)dx=\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{x}f(x,y)dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}}f(x,y)dy$.

3. Изменить порядок интегрирования повторных интегралов:

а) $\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{3-\sqrt{3-x^2}}^{x}f(x,y)dy$. **Ответ:** $\int\limits_{0}^{3}dy\int\limits_{y}^{\sqrt{6y-y^2}}f(x,y)dx$.

б) $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{1/y}^{y}f(x,y)dx$. **Ответ:** $\int\limits_{1/2}^{1}dx\int\limits_{1/x}^{2}f(x,y)dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{x}^{2}f(x,y)dy$.

в) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{9}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{-y/2+3/2}f(x,y)dx$.

Ответ: $\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{-2x+3}f(x,y)dy$.

4. Вычислить двойной интеграл:

а) $\iint\limits_{D}ydxdy$, где D ограничена кривыми $xy=4$, $x+y=5$.

Ответ: $4,5$.

б) $\iint\limits_{D}xdxdy$, где D ограничена кривыми $y=\ln x$, $y=3\ln x$, $y=3$.

Ответ: $\frac{1}{4}(e^6-3e^2+2)$.

в) $\iint\limits_{D}(5x+2y)\,dxdy$, где D ограничена кривыми $y=x^2$, $x=y^2$.

Ответ: $\frac{21}{20}$.

г) $\iint\limits_{D}xe^y dxdy$, где D ограничена кривыми $y=x$, $y=x^2$.

Ответ: $\frac{3-e}{2}$.

д) $\iint\limits_{D}(2x+y)dxdy$, где D треугольник с вершинами $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(6,2)$.

Ответ: 56.

Библиотека БГУИР

е) $\iint\limits_D (2x - \sin y)\,dxdy$, где D ограничена кривыми

$x = y^2$, $x = y^2 + 2$, $y = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}\pi^3 + 2\pi - 2$.

5. Вычислить двойной интеграл, используя подходящую замену переменных:

а) $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$, где D ограничена прямыми

$x + y = -2$, $x + y = 1$, $3x - 2y = -6$, $3x - 2y = 3$.

Ответ: $2{,}7$.

б) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x - 2y)^4}$, где D ограничена прямыми

$y + 2x = 0$, $3y + x = 0$, $x = 2y + 2$, $x = 2y + 4$.

Ответ: $\dfrac{3}{160}$.

в) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D ограничена кривыми

$y = x$, $y = 2x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x > 0$, $y > 0$.

Ответ: $2\ln 2$.

6. Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

а) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, где D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Ответ: $\pi^2 - 2\pi$.

б) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{9 - x^2 - y^2}$, где D ограничена кривыми

$x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\ln\dfrac{8}{5}$.

в) $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D ограничена кривыми

$x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.

Ответ: $\dfrac{7}{8}$.

Библиотека БГУИР

г) $\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dxdy$, где D ограничена лемнискатой $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$.

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной указанными кривыми:

а) $y^2 = 4x,\ x = y^2,\ x = 9\ \ (x \geq 0,\, y \geq 0)$. **Ответ:** 18.

б) $xy = 6,\ x = 6y,\ 3x = 2y$. **Ответ:** $12\ln 3$.

в) $x^2+y^2 = 4,\ x^2+y^2 = 9,\ y = x,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}\ \ (x > 0,\, y > 0)$. **Ответ:** $\dfrac{5\pi}{24}$.

г) $(x^2+y^2)^3 = x^4 + y^4$. **Ответ:** $\dfrac{3\pi}{4}$.

8. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

а) $y = x^2,\ y = 4x^2,\ x = 1,\ z = 4x + 2y,\ z = 0$. **Ответ:** 6.

б) $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2),\ y = 2 - x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. **Ответ:** $\dfrac{4}{3}$.

в) $z = -\sqrt{x^2+y^2},\ z = x^2+y^2-2$. **Ответ:** $\dfrac{5\pi}{6}$.

г) $x^2+y^2 = x,\ x^2+y^2 = 2x,\ z = x^2+y^2,\ z = 0$. **Ответ:** $\dfrac{45\pi}{32}$.

9. Найти площадь поверхности:

а) части параболоида $z = \sqrt{2}(x^2+y^2)$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2 = 1$. **Ответ:** $\dfrac{13\pi}{6}$.

б) меньшей части шара $x^2+y^2+z^2 = 8$, вырезанной конусом $x^2+y^2 = z^2\ \ (z > 0)$.

Ответ: $8\pi(2-\sqrt{2})$.

10. Найти массу неоднородной пластинки D, ограниченной указанными кривыми, и имеющей поверхностную плотность $\rho(x, y)$:

а) $y = x^2,\ x = y^2;\ \rho(x,y) = 2x + y$. **Ответ:** $\dfrac{9}{20}$.

б) $x + y = 2,\ x + y = 4,\ y = x,\ y = 3x;\ \rho(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{16}$.

Библиотека БГУИР

Тройной интеграл

11. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ для указанной области V:

а) V ограничена плоскостями $3x+2y+6z=12,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$.

Ответ: $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{6-\frac{3}{2}x} dy \int\limits_0^{2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y} f(x,y,z)\,dz$.

б) V – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, отсеченная плоскостью $z=4$.

Ответ: $\int\limits_{-4}^4 dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} f(x,y,z)\,dz$.

12. Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^4 (xy+z)\,dz$. **Ответ:** 20.

б) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_1^{\sqrt{y}} \dfrac{dz}{z^7}$. **Ответ:** $\dfrac{15}{24}$.

13. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, где область V ограничена гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x=2,\ y=x,\ y=0,\ z=0$. **Ответ:** 4.

б) $\iiint\limits_V (x+2y+3z)\,dxdydz$, где V – призма, ограниченная плоскостями $x+y=2,\ 2x-y+2=0,\ y=0,\ z=0,\ z=2$. **Ответ:** 28.

14. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам:

а) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)^2\,dxdydz$, где область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $z=0,\ z=2$. **Ответ:** $\dfrac{16\pi}{3}$.

б) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, где область V ограничена эллиптическим параболоидом $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z=3$. **Ответ:** $40{,}5\pi$.

в) $\iiint\limits_V (x^2+z)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями

Библиотека БГУИР

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=2-x^2-y^2$. **Ответ:** $\frac{21\pi}{20}$.

15. Вычислить тройной интеграл, перейдя к сферическим координатам:

а) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где область V ограничена сферами $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=8$. **Ответ:** 63π.

б) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, где V – нижняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le 1$.

Ответ: $\frac{4\pi}{15}$.

16. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. **Ответ:** $\frac{1}{6}$.

б) $z=4-x^2$, $x^2+y^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. **Ответ:** 3π.

в) $x^2+y^2+z^2=18$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **Ответ:** $36(\sqrt{2}-1)\pi$.

17. Найти массу m и координаты центра тяжести C тела, ограниченного указанными поверхностями и имеющего плотность $\rho(x,y,z)$:

а) $x+y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\rho(x,y,z)=x+y+z$.

Ответ: $m=\frac{625}{8}$, $C\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

б) $x^2+y^2=2$, $z=0$, $z=4$; $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

Ответ: $m=8\pi$, $C(0,0,2)$.

в) $y=3(x^2+z^2)$, $y=3$; $\rho(x,y,z)=1$.

Ответ: $m=\frac{3\pi}{2}$, $C(0,2,0)$.

Криволинейные интегралы

18. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

а) $\int\limits_L (x^5+8xy)\,dl$, $L-$ дуга кривой $4y=x^4$, $0\le x\le 1$. **Ответ:** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

б) $\int\limits_L (2x+y)\,dl$, $L-$ ломаная $ABOA$, $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

Ответ: $3+2\sqrt{5}$.

Библиотека БГУИР

в) $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}\,dl$, $L-$ дуга кривой $x=\ln y$, $1\le y\le 4$. **Ответ:** 24.

г) $\int\limits_L y\,dl$, $L-$ первая арка циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$. **Ответ:** $\frac{32}{3}$.

д) $\oint\limits_L (x-y)dl$, $L-$ окружность $x^2+y^2=2x$. **Ответ:** 2π.

е) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, $L-$ дуга спирали Архимеда $r=2\varphi$, $0\le\varphi\le 2$.

Ответ: $\frac{4}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

ж) $\int\limits_L (x+y)dl$, $L-$ дуга лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, расположенная в первой четверти.

Ответ: a^2.

з) $\int\limits_L (2x+3y-yz)dl$, $L-$ отрезок прямой между точками $A(3,-1,1)$ и $B(4,1,3)$.

Ответ: 20.

и) $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, $L-$ дуга винтовой линии $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$, $0\le t\le 2\pi$.

Ответ: $40\pi(3\pi^2+4)$.

к) $\int\limits_L (x+y)dl$, $L-$ четверть окружности $x^2+y^2+z^2=4$, $y=x$, расположенная в первом октанте.

Ответ: $4\sqrt{2}$.

19. Найти длину дуги кривой L:

а) $L-$ кардиоида $r=1+\cos\varphi$. **Ответ:** 8.

б) $L-$ часть винтовой линии $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $z=12t$, $0\le t\le 2\pi$.

Ответ: 26π.

20. Найти массу дуги данной кривой, если ее линейная плотность равна ρ:

а) $y=\ln x$, $\sqrt{8}\le x\le\sqrt{15}$, $\rho(x,y)=x^2$. **Ответ:** $12\frac{1}{3}$.

б) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$, $x\ge 0$, $y\ge 0$; $\rho(x,y)=y$. **Ответ:** a^2.

в) $x=t^2$, $y=t$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$, $\rho(x,y,z)=\sqrt{1+4y^2+9yz}$. **Ответ:** $4\frac{2}{15}$.

Библиотека БГУИР

21. Вычислить криволинейные интегралы второго рода по заданной кривой в указанном направлении:

а) $\int\limits_L (x+2y)dx+(3x-y)\,dy$, $L-$ дуга кривой $y=x^3$ от $O(0,0)$ до $A(1,1)$.

Ответ: $\dfrac{11}{4}$.

б) $\int\limits_L xy\,dx-y^2dy$, $L-$ дуга параболы $y^2=2x$ от $O(0,0)$ до $B(2,2)$.

Ответ: $\dfrac{8}{15}$.

в) $\int\limits_L 2xy\,dx-x^2dy$, $L-$ ломаная OBA, $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,3)$.

Ответ: -12.

г) $\int\limits_L xdy-ydx$, $L-$ дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ от $A(1,0)$ до $B(0,1)$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{16}$.

д) $\int\limits_L y\,dx-2zdy+3xdz$, $L-$отрезок прямой от $A(2,1,1)$ до $B(-1,0,3)$.

Ответ: $5{,}5$.

ж) $\int\limits_L xy\,dx+zdy+(x^2+y^2)dz$, $L-$дуга винтовой линии $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ (в направлении возрастания параметра).

Ответ: $6\pi-12$.

22. Проверить, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования:

а) $\int\limits_L (2x+y)dx+(x-3y)\,dy$. **Ответ:** не зависит.

б) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+(y^3+x^2y)\,dy$. **Ответ:** зависит.

в) $\int\limits_L y^2zdx+xz^2dy+x^2ydz$. **Ответ:** зависит.

г) $\int\limits_L 2xydx+(x^2-z^3)\,dy-3yz^2dz$. **Ответ:** не зависит.

Библиотека БГУИР

23. Вычислить криволинейный интеграл:

а) $\int\limits_{(-1;1)}^{(1;2)} (4xy^3-3y)dx+(6x^2y^2-3x)dy$. **Ответ:** 5.

б) $\int\limits_{(0;1)}^{(4;2)} e^y dx+(x+y+1)e^y dy$. **Ответ:** $6e^2-e$.

в) $\int\limits_{(1;1;1)}^{(3;2;4)} yz\,dx+xzdy+xydz$. **Ответ:** 23.

г) $\int\limits_{(1;1;1)}^{(2;1;3)} (6xz-2y^3)dx+(2yz^2-6xy^2)dy+(3x^2+2y^2z)dz$.

Ответ: 39.

24. Вычислить криволинейный интеграл с помощью формулы Грина:

а) $\oint\limits_{L^+} xydx+x^2dy$, $L-$контур треугольника $ABC, A(-2;-1), B(2;-3), C(2;7)$.

Ответ: $13\frac{1}{3}$.

б) $\oint\limits_{L^+} (2x+y-x^2y)dx+(x-2y+xy^2)dy$, $L-$ окружность $x^2+y^2=4$.

Ответ: 8π.

в) $\oint\limits_{L^+} (x+y^2)dx+(x-y^2)dy$, $L-$ контур фигуры, ограниченной параболой $x=y^2-3$ и прямой $x=1$.

Ответ: $\frac{32}{3}$.

25. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области, ограниченной указанными кривыми:

а) эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **Ответ:** πab.

Библиотека БГУИР

б) астроидой $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$. **Ответ:** 6π.

в) кардиоидой $r=1+\cos\varphi$. **Ответ:** $\frac{3\pi}{2}$.

26. Вычислить работу, производимую силой $\bar{F}$ вдоль пути L:

а) $\bar{F}=(x-y)\bar{i}+\sqrt{x^2+3y}\,\bar{j}$, $L-$дуга параболы $y=x^2$ от $A(0,0)$ до $B(1,1)$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

б) $\bar{F}=y^2\bar{i}+xy\,\bar{j}$, $L-$дуга эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ от $A(0,3)$ до $B(2,0)$.

Ответ: 6.

в) $\bar{F}=(y+z)\bar{i}+(x+z)\,\bar{j}+(x+y)\bar{k}$, $L-$дуга кривой $x=t^2$, $y=t^4$, $z=t^6$, $0\le t\le 1$.

Ответ: 3.

Поверхностные интегралы

27. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, $S-$конечная часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$.

Ответ: 3π.

б) $\iint\limits_S x(y+z)\,dS$, $S-$ часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$ и $z=3$.

Ответ: 36.

в) $\iint\limits_S (z+1)\,dS$, $S-$ часть гиперболического параболоида $z=x^2-y^2$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=2$.

Ответ: $\frac{13\pi}{3}$.

г) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, $S-$полусфера $y=\sqrt{9-x^2-z^2}$.

Ответ: 162π.

28. Вычислить с помощью поверхностного интеграла площадь поверхности S:

Библиотека БГУИР

а) $S-$часть поверхности $z=xy$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=1$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

б) $S-$часть поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, вырезанная цилиндром $y^2+z^2=4z$.

Ответ: $4\pi\sqrt{2}$.

29. Вычислить массу поверхности S с заданной поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$:

а) $S-$часть плоскости $x+y+z=1$, расположенная в первом октанте; $\rho(x,y,z)=xyz$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

б) $S-$часть параболоида $z=6-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$; $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z$.

Ответ: 124π.

30. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dxdy$, $S-$верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$ и $y=3$.

Ответ: 22.

б) $\iint\limits_S (5x^2+5y^2+3z^2)\,dxdy$, $S-$внешняя сторона части поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Ответ: -4π.

в) $\iint\limits_S (4x+4y^2-5z^2)\,dydz$, $S-$внутренняя сторона части поверхности $y^2=4x$, отсеченная плоскостями $x=4$, $z=0$, $z=3$.

Ответ: 280.

г) $\iint\limits_S (9x^2+y^2+9z^2)\,dxdz$, $S-$внешняя сторона части поверхности $y=\sqrt{8-x^2-z^2}$, вырезанная конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ответ: 96π.

д) $\iint\limits_S x\,dydz+y\,dxdz-3z\,dxdy$, $S-$внешняя сторона части поверхности $z=x^2+y^2$, отсеченная плоскостью $z=4$.

Ответ: 40π.

Библиотека БГУИР

д) $\iint\limits_S (2z-x)\,dydz+(x+2z)\,dxdz+3zdxdy$, $S-$верхняя сторона части плоскости $x+4y+z=4$, расположенная в первом октанте.

Ответ: $42\frac{2}{3}$.

31. Вычислить с помощью формулы Остроградского – Гаусса поверхностный интеграл по замкнутой поверхности:

а) $\oiint\limits_S (2z-x)\,dydz+(x-y)\,dxdz+(3x+z)\,dxdy$, $S-$ внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+2z-2=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

б) $\oiint\limits_S (y-z)\,dydz+(z-x)\,dxdz+(x-y)\,dxdy$, $S-$ внешняя сторона поверхности, ограниченной конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостями $z=0$ и $z=4$.

Ответ: 0.

в) $\oiint\limits_S (4x-3z)\,dydz+(2y+5x^2)\,dxdz+(3\sqrt{y}-2z)\,dxdy$, $S-$внутренняя сторона поверхности, ограниченной параболоидом $2z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

Ответ: -16π.

г) $\oiint\limits_S (y^2-x)\,dydz+(z^2-y)\,dxdz+(x^2-z)\,dxdy$, $S-$ внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=4y$.

Ответ: 32π.

Элементы теории поля

Скалярное поле. Поверхности уровня и градиент скалярного поля. Векторное поле, векторные линии. Поток векторного поля

1. Найти линию уровня скалярного поля $u=\ln\sqrt{\frac{y}{2x}}$.

Ответ: $y=cx$, $x\neq 0, c>0-$пучок прямых.

2. Найти поверхность уровня поля $u=x^2+y^2+z^2$, проходящую через точку $P_0(1;-1;2)$.

Библиотека БГУИР

Ответ: $x^2+y^2+z^2=6$ – сфера радиусом $R=\sqrt{6}$ с центром в начале координат.

3. Найти и начертить линии уровня скалярного поля $u=(x-y)^2$.

Ответ: $x-y=c$ (рис. 9).

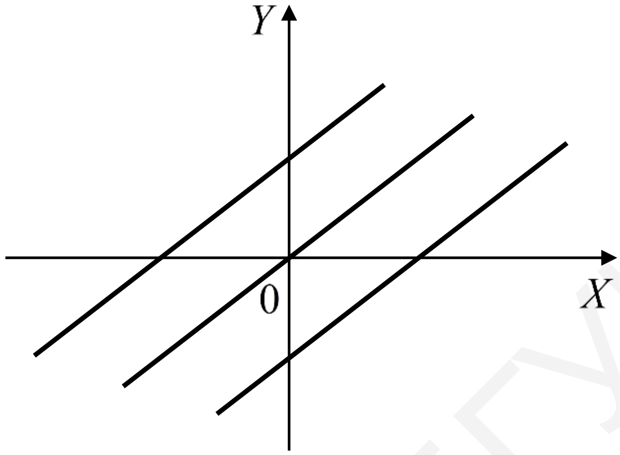

Рис. 9

4. Изобразить на чертеже линии уровня скалярного поля $u=xy$ и градиенты этой функции в точках $M_1\,(1;1)$ и $M_2\,(1;-1)$.

Ответ: $xy=c$, $\operatorname{grad} u\,(1;1)=i+j$, $\operatorname{grad} u\,(1;-1)=-i+j$ (рис. 10).

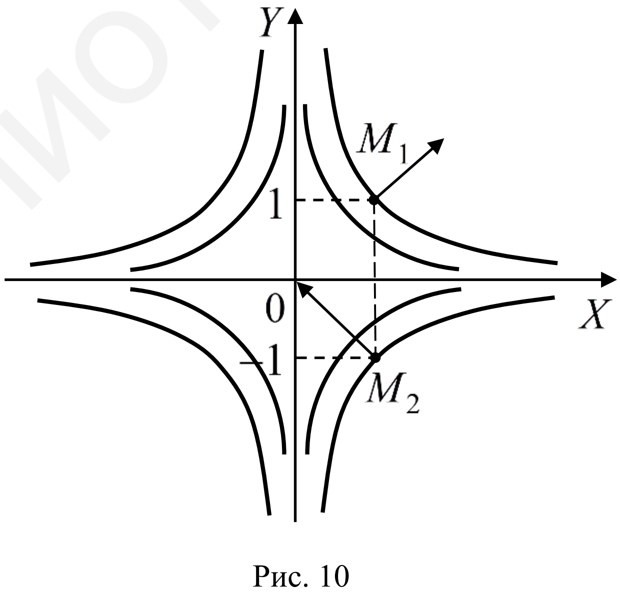

Рис. 10

5. Начертить линии уровня скалярного поля $U=\min(x;y)$.

Ответ: рис. 11.

Библиотека БГУИР

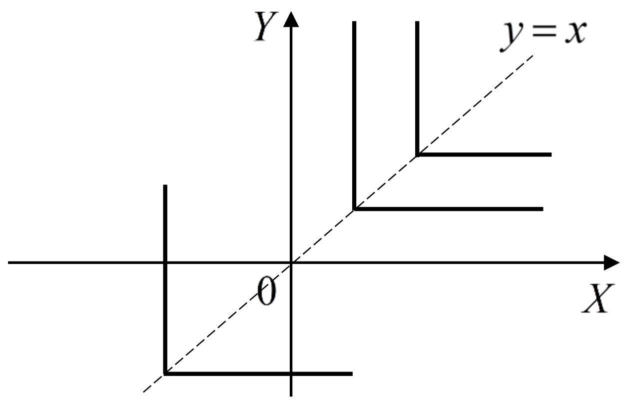

Рис. 11

6. Найти производную от функции $u = xyz$ по направлению $\overline{l}$ от точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(2;2;2)$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{3}$.

7. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $P(1;1;1)$.

Ответ: $V_{\max} = 2\sqrt{3}$.

8. Пусть $u = xy - z^2$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M(-9;12;10)$.

Ответ: $\operatorname{grad} u(M) = (12;-9;-20)$.

$\left|\operatorname{grad} u(M)\right| = 25.$

9. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ перпендикулярен оси Oz.

Ответ: $z^2 = xy$.

10. Найдите угол между градиентами скалярного поля $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M_1(1;2;2)$ и $M_2(-3;1;0)$.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$.

11. Докажите, что: а) $\operatorname{grad}\left|\overline{r}\right| = \dfrac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|}$; б) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{\left|\overline{r}\right|} = -\dfrac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|^3}$.

Библиотека БГУИР

12. Найдите $\operatorname{grad} u$, если функция $u(x;y)$ задана неявным уравнением $u^3 - 3yxu = a^2$.

Ответ: $\dfrac{u}{x^2 - xy}(y\bar{i} + x\bar{j})$.

13. Найти производную скалярного поля $u = \ln(xy + yz + xz)$ в точке $M_0(0;1;1)$ по направлению окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial e} = -2$.

14. Найти векторные линии плоских векторных полей:

а) $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j}$; б) $\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j}$.

Ответ: а) $x^2 = c_1 y$, $z = c^2$; б) $xy = c_1$, $z = c_2$.

15. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 2x\bar{k}$.

Ответ: $x = c_1 y = c_2\sqrt{|z|}$.

16. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$.

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + c_1, \\ \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{z^2}{2} + c_2. \end{cases}$

Эти уравнения определяют два семейства гиперболических цилиндров и две пары плоскостей $x = \pm y$, $y = \pm z$.

17. Найти поток вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$ через площадку, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, перпендикулярную оси OY, в положительном направлении оси OY.

Ответ: $\Pi = -24\pi$.

18. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислить поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} - x\bar{j} + y\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

Ответ: $-\dfrac{1}{15}$.

Библиотека БГУИР

19. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}=y\overline{i}+z\overline{j}+x\overline{k}$ через поверхность S, где S – нижняя сторона плоскости треугольника с вершинами $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$.

Ответ: -4.

20. Найти поток векторного поля $\overline{a}=xz\overline{i}+yz\overline{j}+z^2\overline{k}$ через внешнюю часть сферы $x^2+y^2+z^2=9$, отсеченной плоскостью $z=2$ $(z\geq 2)$.

Ответ: 45π.

21. Найти поток векторного поля $\overline{a}=3x\overline{i}-y\overline{j}-z\overline{k}$ через поверхность S, где S – часть внешней стороны параболоида $x^2+y^2=9-z$, расположенная в первом октанте.

Ответ: $\dfrac{81\pi}{8}$.

Дивергенция векторного поля. Формула Гаусса – Остроградского. Линейный интеграл и циркуляция вектора. Ротор векторного поля. Формула Стокса. Потенциальные поля

22. Найти дивергенцию векторного поля $\overline{a}=x\overline{i}+y^2\overline{j}+z^3\overline{k}$ в точке $M(-2;4;5)$.

Ответ: 84.

23. Найти дивергенцию векторного поля

$\overline{a}=(x-y)(y-z)\overline{i}+(y-z)(z-x)\overline{j}+(z-x)(x-y)\overline{k}$.

Ответ: 0.

24. Вычислить $div\dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|}$, где $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$.

Ответ: $\dfrac{2}{|\overline{r}|}$.

25. Найти минимальное значение дивергенции векторного поля

$\overline{a}=(x-a)(y-b)^2\,\overline{i}+(y-b)(x-a)^2\,\overline{j}$.

Ответ: $\min div\,\overline{a}=0$ при $x=a$, $y=b$.

26. Найти дивергенцию векторного поля

$\overline{a}=(y^2+z^2)(x+y)\overline{i}+(z^2+x^2)(y+z)\overline{j}+(x^2+y^2)(z+x)\overline{k}$.

Ответ: $2(x^2+y^2+z^2)$.

Библиотека БГУИР

27. Найти поток векторного поля через замкнутую поверхность:

а) $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$, $\quad S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + y^2; \end{cases}$

б) $\bar{a} = 2x\bar{i} - (z-1)\bar{k}$, $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \ \ z = 1; \end{cases}$

в) $\bar{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$, $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$; б) 4π; в) $\frac{19\pi}{3}$.

28. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2 z\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$ в сторону внешней нормали.

Указание. Дополнить заданную поверхность плоскостью $z = 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

29. Используя формулу Гаусса – Остроградского, найти поток вектора $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $S(0;0;2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

30. Вычислить работу силового поля $\bar{F} = (x^2 + 2xy)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(0;0)$ до точки $(1;1)$.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

31. Найти линейный интеграл вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} - y^2\bar{j}$ вдоль четверти окружности (рис. 12).

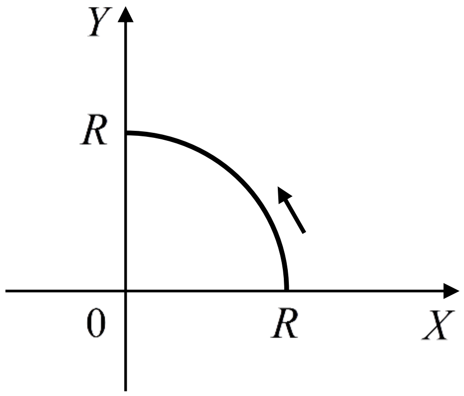

Рис. 12

Библиотека БГУИР

Ответ: $-\dfrac{1}{2}R^4$.

32. Найти работу силового поля $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j}+z\overline{k}$ вдоль отрезка L винтовой линии $\overline{r}=\cos t\,\overline{i}+\sin t\,\overline{j}+t\overline{k}$ от точки $A(1;0;0)$ до точки $B(1;0;2\pi)$.

Ответ: $\int\limits_L(\overline{F},d\overline{r})=2\pi+2\pi^2$.

33. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\overline{a}=(z^2-y^2)\overline{i}+(x^2-z^2)\overline{j}+(y^2-x^2)\overline{k}$$

по замкнутой линии L, где $L-$контур треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. **Ответ:** $Ц=2$.

34. Найти циркуляцию вектора $\overline{a}=y^2\overline{i}$ по замкнутой кривой, ограниченной эллипсом и осью OY (рис. 13).

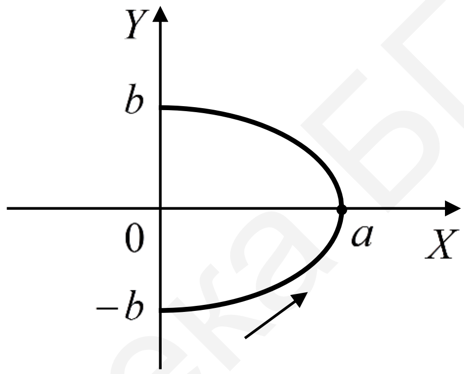

Рис. 13

Ответ: $Ц=0$.

35. Найти циркуляцию вектора $\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}$ вдоль замкнутой кривой, образованной осями координат и астроидой $\overline{r}=R\cos^3 t\,\overline{i}+R\sin^3 t\,\overline{j}$ (рис. 14).

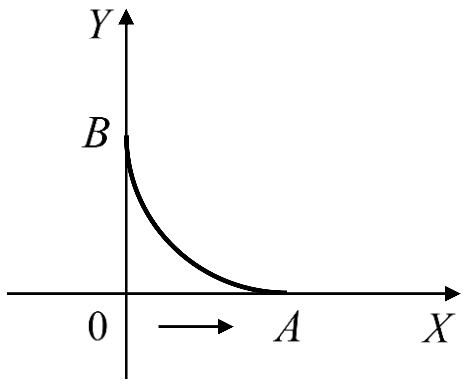

Рис. 14

Ответ: $Ц=-\dfrac{3}{16}\pi R^2$.

36. Найти ротор векторного поля $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}$ в точке $M(1;2;3)$.

Ответ: $\operatorname{rot}\overline{a}(M) = 4\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$.

37. Вычислить:

а) $\operatorname{rot}|\overline{r}|\cdot\overline{r}$; б) $\operatorname{rot}\dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|}$, где $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Ответ: а) $\overline{0}$; б) $\overline{0}$.

38. Какова должна быть функция $f(x;z)$, чтобы ротор векторного поля $\overline{a} = yz\overline{i} + f(x;z)\overline{j} + xy\overline{k}$ был равен вектору $\overline{k} - \overline{i}$?

Ответ: $f(x;z) = xz + x + z + c$.

39. Найти циркуляцию векторов по указанным контурам непосредственно и по теореме Стокса:

а) $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3x + 4z = 5. \end{cases}$

б) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = z. \end{cases}$

Ответ: а) 0; б) $-\sqrt{2}\pi$.

40. Вычислить циркуляцию векторов по указанным контурам, применяя теорему Стокса:

а) $\overline{a} = (y^3 - yx^2)\overline{i} + (y^2 - x^2 + x)\overline{j}$; $\quad L: (x-1)^2 + 4y^2 = 4$

б) $\overline{a} = (3z^2 - y^3)\overline{i} + (x^3 - 2y^2x^2)\overline{j} + (2xyz - x^2y^2)\overline{k}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x + z = 4. \end{cases}$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) 120π.

41. Дано поле $\overline{a} = (2xy + z)\overline{i} + (x - 2y)\overline{j} + x\overline{k}$. Доказать, что оно потенциально, и найти его потенциал.

Ответ: $\Pi = x^2y - y^2 + xz + c$.

42. Убедиться, что поле силы тяжести потенциально, найти его потенциал, равный нулю в начале координат.

Ответ: $\operatorname{rot}\overline{p} = \operatorname{rot}(-\mathrm{mg}\overline{k}) = 0$. $\Pi = pz$.

Библиотека БГУИР

43. Убедившись, что заданное векторное поле является потенциальным, найти потенциал поля, приняв в качестве пути интегрирования координатную ломаную, звенья которой параллельны соответствующим координатным осям (рис. 15). Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{AB}(\bar{a}, d\bar{z})$:

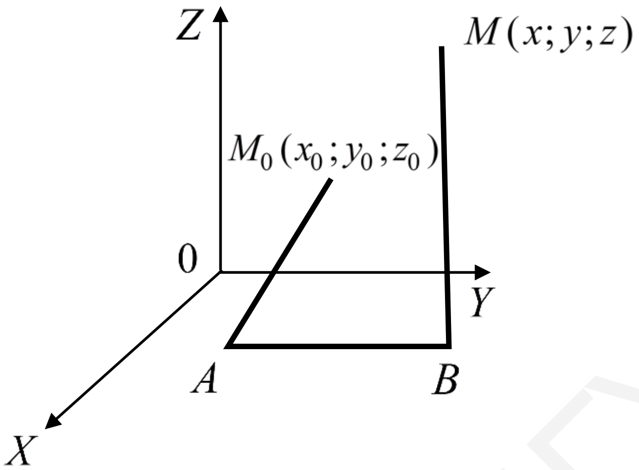

Рис. 15

а) $\bar{a}=(x^2-2yz)\bar{i}+(y^2-2xz)\bar{j}+(z^2-2xy)\bar{k}$, $A(1;1;1)$, $B(-1;2;-2)$.

б) $\bar{a}=2x(x^2-2x^2)\bar{i}+2y(x^2-2y^2)\bar{j}$, $A(-1;1)$, $B(2;3)$.

Ответ: а) $\dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{3}-2xyz$, $-\dfrac{22}{3}$; б) $x^2y^2-x^4-y^4+c$, -60.

Числовые и функциональные ряды

Ряд и его сумма. Ряды с положительными членами

1. Записать ряд в развернутом виде, если формула общего члена ряда имеет вид:

а) $a_n=\dfrac{2n-1}{3n-2}$. **Ответ:** $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{9}{13}+\dots$.

б) $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$. **Ответ:** $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{25}+\dots$.

в) $a_n=\cos n\pi$. **Ответ:** $-1+1-1+1-1+\dots$.

г) $a_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}$. **Ответ:** $1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\dfrac{1}{9!}-\dots$.

2. Записать возможную формулу общего члена ряда:

а) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{6}{11}+\dfrac{8}{15}+\dfrac{10}{19}+\dots$. **Ответ:** $a_n=\dfrac{2n}{4n-1}$.

Библиотека БГУИР

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\dots$. **Ответ:** $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3n-1}$.

в) $8+14+20+26+32+\dots$. **Ответ:** $a_n=2+6n$.

г) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\dots$. **Ответ:** $a_n=\frac{1}{n!}$.

д) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\dots$. **Ответ:** $a_n=n^{(-1)^{n+1}}$.

3. По первым трем членам ряда $4+8+14+\dots$ восстановить формулу общего члена в виде $a_n=an^2+bn+c$. **Ответ:** $a_n=n^2+n+2$.

4. Доказать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}\right)^{n^2+3}$ не выполняется необходимое условие сходимости $\left(\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\right)$.

5. Доказать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{(n+2)\sqrt[3]{n}}$ выполняется необходимое условие сходимости, но этот ряд расходится $\left(S_n>2\sqrt[3]{n^2}\right)$.

6. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$. Использовать неравенство $\frac{1}{2n(2n+1)}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

7. Доказать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$ не выполняется необходимый признак сходимости, т. к. $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

8. Найти сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. **Ответ:** $S=\frac{1}{6}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+8n-3}$. **Ответ:** $S=\frac{1}{12}$.

Библиотека БГУИР

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **Ответ:** $S = \dfrac{1}{4}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + \cos \pi n}{3^n}$. **Ответ:** $S = \dfrac{7}{4}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. **Ответ:** $S = \dfrac{23}{90}$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$. **Ответ:** $S = 1$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$. **Ответ:** $S = 1$.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$. **Ответ:** $S = -\ln 2$.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$. **Ответ:** $S = 1 - \sqrt{2}$.

9. Исследовать ряды на сходимость, используя необходимый признак сходимости и признаки сравнения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 4^n}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2 + 2n + 4}{5 - 2n + 4n^2}$. **Ответ:** расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-3)^2}$. **Ответ:** сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[4]{n^3+3}}$. **Ответ:** сходится.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{2n+5}{n^2 - 3n + 8}$. **Ответ:** расходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{5n+1}$. **Ответ:** расходится.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}\right) \cdot \sin \dfrac{2}{n}$. **Ответ:** сходится.

Библиотека БГУИР

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. **Ответ:** сходится.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{n+3}{\sqrt[3]{n^4+2}}$. **Ответ:** расходится.

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n+5}$. **Ответ:** расходится.

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\arcsin\frac{\sqrt[5]{n}+2}{n+4}$. **Ответ:** сходится.

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. **Ответ:** расходится.

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. **Ответ:** расходится.

10. Исследовать на сходимость ряд, используя признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{4n-1}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n^2+2n+3}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot 3n}{(n+1)^{n^2}}$. **Ответ:** расходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2\cdot 3^n}$. **Ответ:** расходится.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{3n}\right)^{3n+1}}{n\cdot g^n}$. **Ответ:** сходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{3n^2+2}{5n+4}$. **Ответ:** сходится.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+(-1)^n}{8+(-1)^{n+1}}\right)^n$. **Ответ:** сходится.

Библиотека БГУИР

11. Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n+5)!}$. **Ответ:** расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. **Ответ:** сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}$. **Ответ:** расходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!\cdot 5^n}{(3n)!}$. **Ответ:** сходится.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(2n-1)!!}{2\cdot6\cdot10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$. **Ответ:** сходится.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{2^n (n+2)}$. **Ответ:** сходится.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!!\cdot 10^n}$. **Ответ:** расходится.

12. Используя интегральный признак (а при необходимости признак сравнения), исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\sqrt{\ln(n+1)}}$. **Ответ:** расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^4}$. **Ответ:** сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\ln^3(2n+1)}$. **Ответ:** сходится.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{3n^3+5n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\ln^3 n}}$. **Ответ:** сходится.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2}$. **Ответ:** сходится.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n(\ln^2 n+2)}$. **Ответ:** расходится.

13. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3+2}+\sqrt[5]{n^4+3}}{\sqrt[6]{n^{11}+4}+\sqrt[3]{n^5+5}}$. **Ответ:** сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$. **Ответ:** расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(2n^2+3)}{\sqrt[4]{n^5}}$. **Ответ:** сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,001}$. **Ответ:** расходится.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{5n+4}\cdot\left(\dfrac{5n+2}{5n+3}\right)^{2n}$. **Ответ:** расходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(4+5\ln n)}{\ln^3 n+\sqrt[5]{n^5+3n+1}}$. **Ответ:** сходится.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!+5n^3+3}{3^n+6\ln n+2n!}$. **Ответ:** расходится.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}$. **Ответ:** расходится.

14. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{4n}{(n^2+1)^3}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 10^{-4}. **Ответ:** $n=10$.

15. Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:

а) $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{x^2+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^6}\,dx$. **Ответ:** расходится.

б) $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}^2 x}{\sqrt[6]{1+x^{11}}}\,dx$. **Ответ:** расходится.

Библиотека БГУИР

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \operatorname{tg}^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. **Ответ:** сходится.

г) $\int\limits_{1}^{\infty} \sqrt[3]{x^5 \cdot 3^{-x}}\, dx$. **Ответ:** сходится.

Знакопеременные ряды

16. Доказать, что для следующих рядов выполняются все три условия признака Лейбница:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+2}{n^2+n+3}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos \pi n}{n^2+\ln n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \dfrac{2n+3}{2n^2+4}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{n\ln n} \cdot \sin \dfrac{\pi n}{2}$.

17. Доказать условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (использовать сочетательное свойство ряда).

18. Доказать расходимость следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3+(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} \cdot \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n^2$.

19. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$. **Ответ:** сходится условно.

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$. **Ответ:** расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cdot \cos(2n+3)}{n\sqrt{n+2}}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

Библиотека БГУИР

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{(2n+3)^{\frac{n}{2}}}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n^2+n+5)}{3n^2+2n+3}$. **Ответ:** расходится.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \operatorname{tg} \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \arcsin \dfrac{n}{\sqrt{n^3+3}}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2-3n+3}}{n}$. **Ответ:** сходится условно.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n^2+2)\ln^2(n^2+2)}$. **Ответ:** расходится.

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3+(-1)^n}{n^2+2n+3}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln^2(n+2)}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+2} \cdot \ln(n+3)$. **Ответ:** сходится условно.

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[5]{(n+2)^3}}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

20. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды с параметрами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+3}\right)}$.

Ответ: при $\alpha > 2$ ряд сходится абсолютно, при $1 < \alpha \le 2$ – сходится условно, при $\alpha \le 1$ – расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n^2+2n}\ln^{\alpha}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)$.

Ответ: при $\alpha>-1$ ряд сходится абсолютно, при $-2<\alpha\le -1$ – сходится условно, при $\alpha<-2$ – расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{n^{\alpha}}{1+n^2}}{n}$.

Ответ: при $\alpha\ge 2$ ряд сходится условно, при $\alpha<2$ – сходится абсолютно.

21. Вычислить сумму ряда с точностью ε. Остаток ряда оценить с помощью формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $1{,}718$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8^n\cdot n}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $0{,}134$.

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $1{,}543$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $0{,}346$.

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $1{,}175$.

22. Вычислить сумму ряда с точностью ε. Остаток ряда оценить с помощью интегрального признака сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $1{,}017$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^6+1}$, $\varepsilon=10^{-2}$. **Ответ:** $0{,}56$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^3}}$, $\varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $0{,}631$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, $\varepsilon=10^{-1}$. **Ответ:** $1{,}2$.

Библиотека БГУИР

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}, \quad \varepsilon=10^{-2}$. **Ответ:** $0,30$.

23. Вычислить сумму знакочередующего ряда с точностью ε:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}, \quad \varepsilon=10^{-2}$. **Ответ:** $0,28$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \varepsilon=10^{-2}$. **Ответ:** $0,62$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}, \quad \varepsilon=10^{-2}$. **Ответ:** $0,20$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}, \quad \varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $\approx 0,031$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n\cdot n}, \quad \varepsilon=10^{-3}$. **Ответ:** $\ln\frac{5}{4}\approx 0,223$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad \varepsilon=10^{-1}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{4}\approx 0,8$.

Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора

24. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$.

Ответ: $x>\frac{1}{2}$, при $x>1$ сходится абсолютно, при $0,5<x\le 1$ – условно.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

Ответ: ряд сходится в единственной точке $x=0$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+x^2)$.

Ответ: сходится абсолютно для $-\sqrt{e-1}<x<\sqrt{e-1}$.

Библиотека БГУИР

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$.

Ответ: сходится абсолютно для $-2<x<-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}<x<2$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(x-2)^n}$.

Ответ: для $x>3$ и $x<1$ сходится абсолютно, при $x=+1$ сходится условно;

е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^n\cdot n\ln n}$.

Ответ: при $-\infty<x<-1$ и $1<x<\infty$ сходится абсолютно, при $x=1$ сходится условно.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+2}\dfrac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

Ответ: при $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ сходится абсолютно.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{3^n}$.

Ответ: сходится абсолютно для $x\in\mathbb{R}$.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n+|x|^{-4}}{2}$.

Ответ: ряд расходится по всей числовой оси $(x\neq 0)$.

25. Доказать, пользуясь признаком Вейерштрасса, равномерную сходимость ряда на указанном промежутке (найти мажоранту):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{\cos nx}}{n\ln^3 n}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e}{n\ln^3 n}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^2)+4^n}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{4^n-\dfrac{\pi}{2}}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(3n+1)\cdot 4^n}$, $[-1;3]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n\cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^2}}$, $\left[-3;-1\right]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+x)+2\cos^2(n-x)}{\sqrt[4]{n^5+x^4}}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^{\frac{5}{4}}}$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+3)^2\cdot(2x)^{2n}}{x^2+3n+5}$, $\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+3)^2}{4^n(3n+5)}$.

26. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{(n+2)\cdot 4^n}$. **Ответ:** $x\in[-7;1)$.

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{(2n+3)\cdot(3n+2)}$. **Ответ:** $x\in[2;4]$.

в) $\sum\limits_{n=+\infty}^{\infty}\dfrac{(2-3n)}{3^n(n^2+2)}x^n$. **Ответ:** $x\in[-3;3)$.

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{\sqrt{(1+4n)\cdot 3^n}}$. **Ответ:** $x\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+4)^{n^2}}{(n+3)^n}$. **Ответ:** $x\in\left[-5;-3\right]$.

е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^n(2x-1)^n}{(n+1)!}$. **Ответ:** $x\in\left(\dfrac{e-1}{2e};\dfrac{e+1}{2e}\right)$.

ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n)!}x^n$. **Ответ:** $x\in\mathbb{R}$.

з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+3}{n+5}$. **Ответ:** $x\in\left[2;4\right]$.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{arctg}^n\dfrac{n^2+3}{n^2+1}$. **Ответ:** $x\in\left(-\dfrac{4}{\pi};\dfrac{4}{\pi}\right)$.

к) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^{2n+1}}{(3n+2)e^n}$. **Ответ:** $x\in\left[3-\sqrt{e};3+\sqrt{e}\right]$.

Библиотека БГУИР

л) $\sum\limits_{n=+\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x+5)^{2n}}{9^n+n^2}$. **Ответ:** $x \in (-8;\, -2)$.

м) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{2n}}{4^n+5^n}$. **Ответ:** $x \in \left(2-\sqrt{5};\, 2+\sqrt{5}\right)$.

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,x^{2n+1}}{(2n-1)!!}$. **Ответ:** $x \in \left(-\sqrt{2};\, \sqrt{2}\right)$.

27. Найти сумму ряда и указать его область сходимости:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n$. **Ответ:** $\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $|x|<1$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$. **Ответ:** $-\ln|1-2x|$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. **Ответ:** $(1-x)\ln(1-x)+x$, $x \in [-1;\, 1)$.

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n^2-2n+1)\,x^n$. **Ответ:** $\dfrac{5x^2-2x+1}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^2$. **Ответ:** $\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{2n-1}$. **Ответ:** $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$, $|x|<1$.

28. Найти сумму числового ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. **Ответ:** $\ln 2$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{4}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n \cdot 5^n}$. **Ответ:** $\ln\dfrac{5}{3}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 4^n}$. **Ответ:** $\ln\dfrac{5}{4}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{2^n}$. **Ответ:** 8.

Библиотека БГУИР

29. Найти n первых ненулевых членов разложения функции в ряд Маклорена:

а) $f(x)=\arcsin x,\ n=3.$ **Ответ:** $x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{40}x^5.$

б) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ n=3.$ **Ответ:** $x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5.$

в) $f(x)=e^{x\cos x},\ n=4.$ **Ответ:** $1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3.$

г) $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x},\ n=4.$ **Ответ:** $1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{x^3}{6}.$

д) $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}},\ n=3.$ **Ответ:** $e+\dfrac{e}{6}x^2+\dfrac{e}{30}x^4.$

е) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x},\ n=3.$ **Ответ:** $1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4.$

ж) $f(x)=\ln(1+e^x),\ n=4.$ **Ответ:** $\ln 2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{x^4}{192}.$

з) $f(x)=e^{\sin x},\ n=3.$ **Ответ:** $1+x+\dfrac{1}{2}x^2.$

и) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-x^2},\ n=3.$ **Ответ:** $x+\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{101}{120}x^5.$

к) $f(x)=e^{-x}\cos\sqrt{x},\ n=3.$ **Ответ:** $1-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{25}{24}x^2.$

30. Разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x, найти область сходимости полученного ряда:

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-3x^2}.$ **Ответ:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^{2n},\ \ |x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

б) $f(x)=e^{-x^2}.$ **Ответ:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!},\ \ x\in\mathbb{R}.$

в) $f(x)=x^5\ln(1+x^2).$ **Ответ:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n+5}}{n},\ \ |x|\le 1.$

г) $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2-5x+6}.$ **Ответ:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\ \ |x|<2.$

Библиотека БГУИР

д) $f(x)=\cos^2 4x$. **Ответ:** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$.

е) $f(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$. **Ответ:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$, $|x|<1$.

ж) $f(x)=\ln(1-5x+4x^2)$. **Ответ:** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+4^n}{n}x^n$, $|x|<\frac{1}{4}$.

з) $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x^2-4)}$. **Ответ:** $-\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}+(-1)^n\right)x^{2n+1}$, $|x|<1$.

и) $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$. **Ответ:** $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, $|x|<2$.

31. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $x\in\left[0;2\right]$.

б) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=-2$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 3^n}-\frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n$, $x\in(-5;\,1)$.

в) $f(x)=x^5$, $x_0=-2$.

Ответ: $-32+80(x+2)-80(x+2)^2+40(x+2)^3-10(x+2)^4+(x+2)^5$, $x\in\mathbb{R}$.

г) $f(x)=\frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0=1$. **Ответ:** $\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n$, $x\in(-1;\,3)$.

д) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$, $x\in(-4;\,0)$.

е) $f(x)=e^{3x-2}$, $x_0=2$.

Ответ: $e^4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x-2)^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

Библиотека БГУИР

32. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до $0,001$ значение выражения:

а) $\sin 1$. **Ответ:** $0,841$.

б) $\cos 10°$. **Ответ:** $0,985$.

в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **Ответ:** $0,609$.

г) $\ln 0,8$. **Ответ:** $-0,222$.

д) $\sqrt[4]{90}$. **Ответ:** $3,079$.

е) $\operatorname{arctg} 1,2$. **Ответ:** $0,464$.

ж) $\operatorname{ch} 2$. **Ответ:** $3,762$.

33. Используя разложения в степенные ряды, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$. **Ответ:** $\frac{1}{60}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. **Ответ:** $\frac{1}{6}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-\cos 4x}$. **Ответ:** $\frac{2}{3}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3}$. **Ответ:** -1.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$. **Ответ:** -2.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$. **Ответ:** -6.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$. **Ответ:** -1.

34. Найти производную n-го порядка от функции $f(x)$ в точке $x=0$:

а) $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{sh}x,\ n=7$. **Ответ:** 8.

б) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},\ n=10$. **Ответ:** -945.

в) $f(x)=x^4\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right),\ n=9.$ **Ответ:** $\dfrac{91}{160}.$

г) $f(x)=x^6\operatorname{arctg}x,\ n=13.$ **Ответ:** $-\dfrac{131}{7}.$

д) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x},\ n=7.$ **Ответ:** $-71.$

е) $f(x)=x\cos\sqrt{x},\ n=8.$ **Ответ:** $-\dfrac{8!}{14!}.$

35. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до $0{,}001$:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}245.$

б) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$ **Ответ:** $3{,}057.$

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}487.$

г) $\displaystyle\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}508.$

д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}332.$

е) $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}764.$

ж) $\displaystyle\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx.$ **Ответ:** $0{,}077.$

з) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\cos x\,dx.$ **Ответ:** $0{,}608.$

36. Методом последовательного дифференцирования приближенно решить задачу Коши и получить k членов ряда:

а) $y'=x+\dfrac{1}{y};\ \ y(0)=1,\ \ k=4.$ **Ответ:** $y=1+x+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{3}+\ldots\ .$

б) $y'=2x+\cos y;\ \ y(0)=0,\ \ k=4$. **Ответ:** $y=x+x^2-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$.

в) $y''=x^2+y^2;\ \ y(-1)=2,\ y'(-1)=0,5,\ k=4$.

Ответ: $y=2+\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{5}{2}(x+1)^2+\dfrac{15}{16}(x+1)^4+\ldots$.

г) $y'=\dfrac{1-x^2}{y}+1;\ \ y(0)=1,\ k=5$.

Ответ: $y=1+2x-x^2+\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{17}{9}x^4+\ldots$.

д) $y''-ye^x=0;\ \ y(0)=2,\ y'(0)=1,\ k=5$.

Ответ: $y=2+x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots$.

37. Применяя метод неопределенных коэффициентов, приближенно решить задачу Коши и получить k членов ряда:

а) $y''-x^2y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ k=4$. **Ответ:** $y=1+x+\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^5}{20}+\ldots$.

б) $y''=xy;\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ k=3$. **Ответ:** $y=1+x+\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^5}{20}+\ldots$.

в) $y'=xy+e^x;\ y(0)=0,\ k=3$. **Ответ:** $y=x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x^3+\ldots$.

Ряды Фурье

38. Доказать ортогональность функций $1, \cos x, \cos 2x, \ldots \cos nx, \ldots$ на отрезке $[0;\pi]$. Выяснить, при каких значениях m и n $(m,n\in\mathbb{N})$ функции $f(x)=x^n$ и $u(x)=x^m$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: $m+n$ – нечетное число.

39. Функцию $f(x)=4\cos^3 x$ разложить в ряд Фурье.

Ответ: $f(x)=3\cos x+\cos 3x$.

40. Функцию $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ разложить в ряд Фурье. Записать ряд Фурье и построить график суммы ряда Фурье.

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x,\ \ x\in(-\infty;+\infty)$ (рис. 1).

Библиотека БГУИР

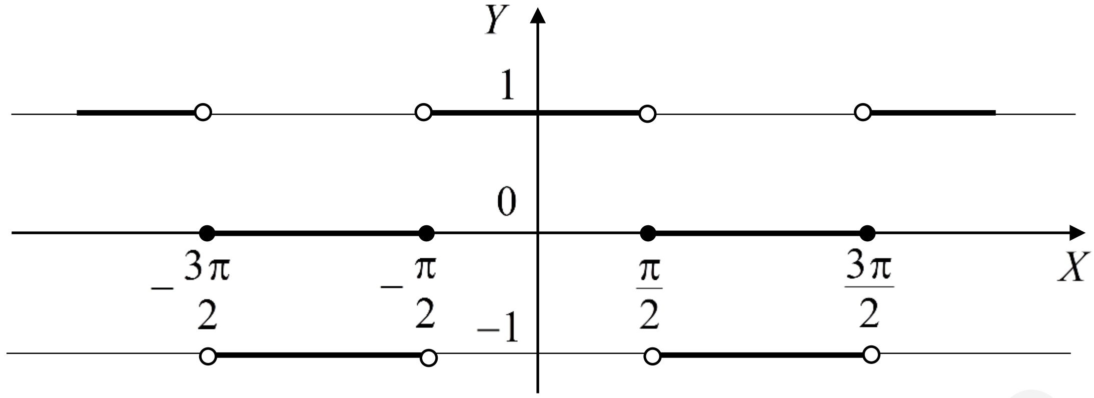

Рис. 1

41. Выяснить, в каких точках график суммы ряда совпадает с графиком функции.

Ответ: График суммы ряда Фурье совпадает с графиком функции $f(x)$ на множестве $x\in(-\infty;+\infty)$.

42. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$ в ряд Фурье. Указать множество, на котором сумма ряда совпадает с $f(x)$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{3-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\dfrac{2(\pi-3)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}-$

$-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n}$. Сумма ряда совпадает с $f(x)$ на множестве $x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$.

43. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ при $0<x\le 2\pi$, $f(x)=f(x+2\pi)$. Выяснить, в каких точках значения функции не совпадают со значениями суммы ряда Фурье. Построить график суммы ряда $S(x)$.

Ответ: $\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{(2n-1)(2n+1)}$ (рис. 2).

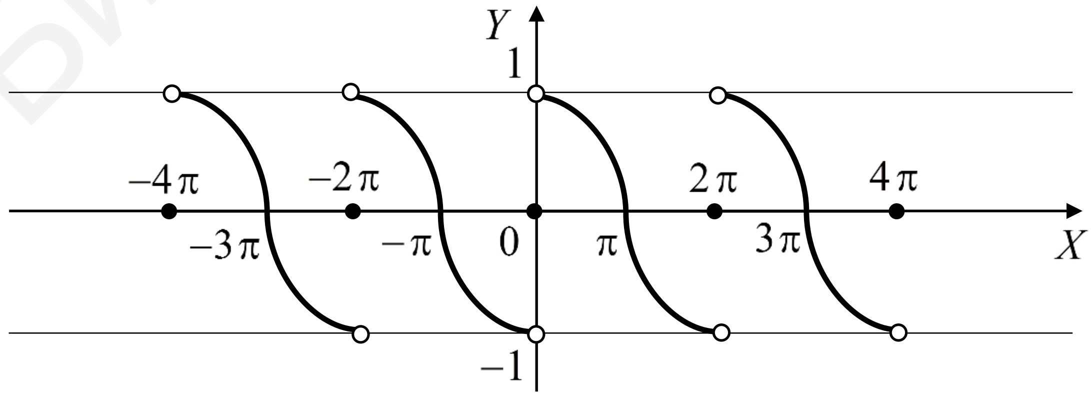

Рис. 2

Библиотека БГУИР

Значения функции и суммы ряда Фурье не совпадают в точках $x_k = 2\pi k$, $f(x_k) = -1$, $S(x_k) = 0$.

44. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \arcsin(\cos x)$. Построить график функции.

Ответ: $f(x) = -\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^n - 1)}{n^2}\cos nx = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

$\left(a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\, dx\right)$ (рис. 3).

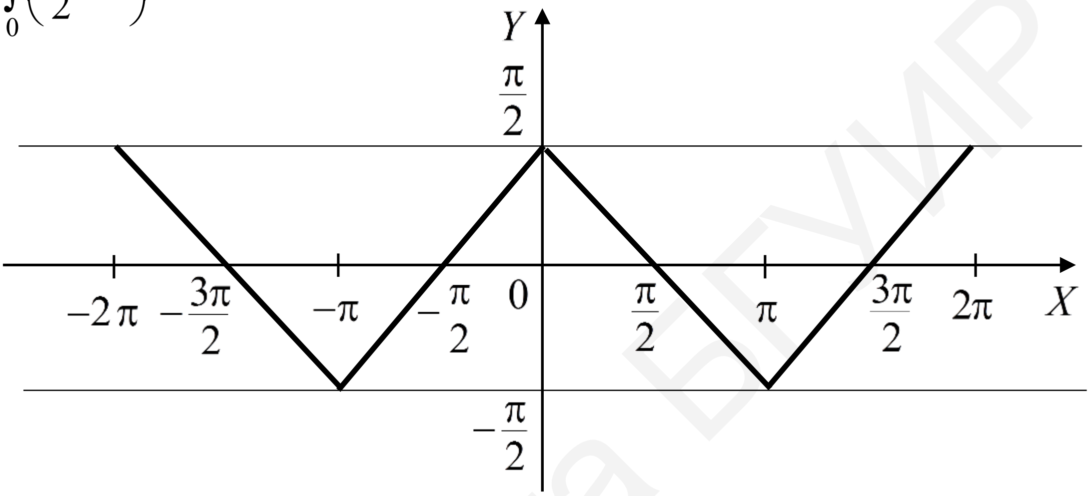

Рис. 3

График суммы ряда совпадает с графиком функции $f(x)$.

45. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \dfrac{\pi}{2}, & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$ в ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам.

Ответ:

а) $f(x) = \dfrac{3}{8}\pi + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1\right)\cos nx$.

б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin nx$.

46. Функцию $f(x) = e^x$, $x \in [0; 2\pi)$ представить рядом Фурье в комплексной форме. Записать ряд Фурье для функции в действительной форме.

Ответ: $f(x) = \dfrac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1+in}{1+n^2}\, e^{inx}$, $x \neq 2k\pi$,

Библиотека БГУИР

$$f(x)=\frac{e^{2n}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right),\quad x\neq 2k\pi.$$

47. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & \text{если } x\in[-3;-1], \\ 3, & \text{если } x\in(-1;\,2), \\ -2x+6, & \text{если } x\in(2;\,3), \end{cases}$$

найти значение суммы ряда Фурье в точках $-45; -32; 23; 50; 55; 63$.

Ответ: график ряда Фурье имеет вид (рис. 4)

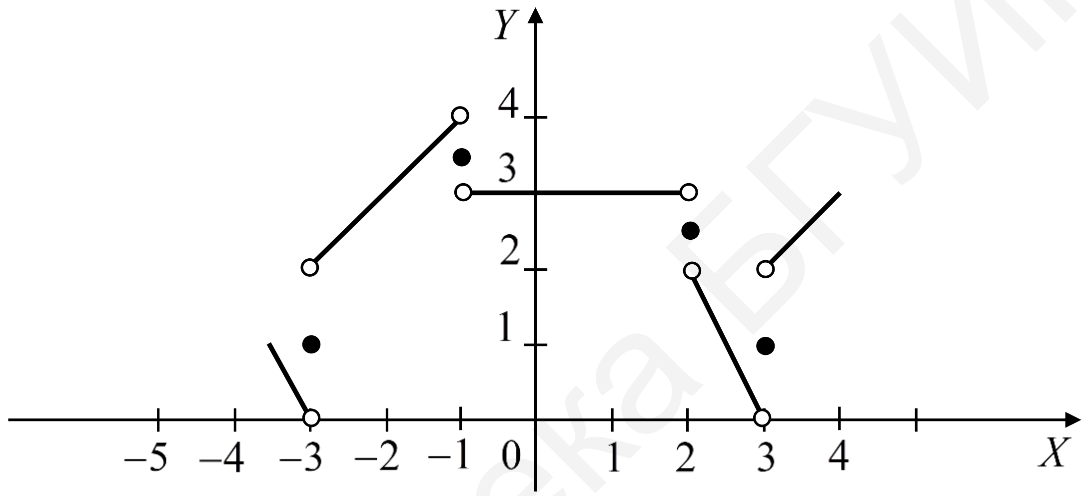

Рис. 4

$S(-45)=1,\ \ S(-32)=3;\ S(23)=3,5;\ S(50)=2,5;\ S(55)=3;\ S(63)=1.$

48. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически (рис. 5):

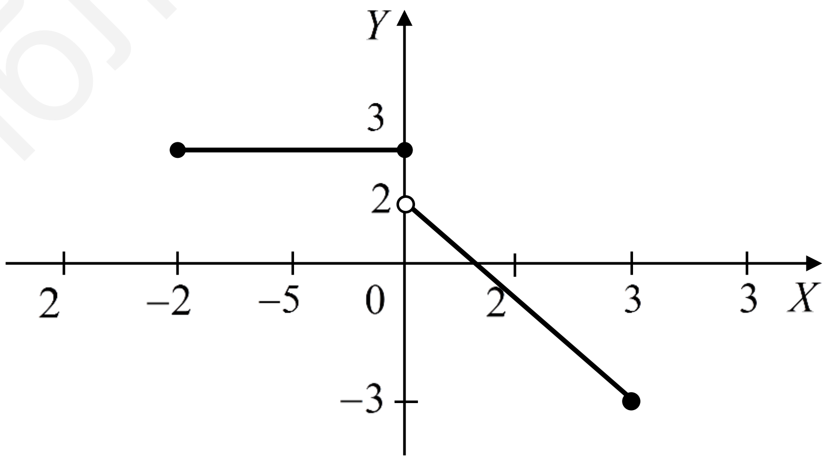

Рис. 5

Библиотека БГУИР

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x.$

49. Функцию $f(x)=x^2$, $x\in[0;2]$ разложить в ряд Фурье.

Ответ: $f(x)=\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$

50. Функцию $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\le x<1, \\ 2-x & \text{при } 1\le x\le 2 \end{cases}$ разложить в неполные ряды Фурье: а) по косинусам; б) по синусам.

Ответ:

а) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$;

б) $f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}.$

51. Записать ряд Фурье в комплексной форме для T – периодической функции $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x, & -3<x<3, \\ 4, & x=-3;\,3. \end{cases}\quad (T=6)$$

Ответ: $f(x)=4+\frac{3i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{i\frac{\pi nx}{3}},\ n\ne 0.$

Интеграл Фурье

52. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 2\le x\le 6, \\ 0 & \text{при } x<2 \text{ и } x>6. \end{cases}$

Ответ: $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega(x-4)\,d\omega.$

53. Функцию $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \pi x & \text{при } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{при } x>1 \end{cases}$ представить интегралом Фурье в действительной и комплексной форме.

Ответ:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{(\omega\sin\omega+\cos\omega-1)\cos\omega x+(\sin\omega-\omega\cos\omega)\sin\omega x}{\omega^{2}}\,d\omega.$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}(1-i\omega)-1}{\omega^{2}}e^{-i\omega x}d\omega.$$

54. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2} \ \text{при } x\in[-\pi;\pi],\\ 0 \ \text{при } x<-\pi \text{ и } x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^{2}}\cos\omega x\,d\omega.$

55. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega,$ $|x|<1,$ в точках разрыва $x=\pm 1$ интеграл сходится к $\pm\frac{1}{2}$ соответственно.

56. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=e^{-a|x|}\ (a>0)$.

Ответ: $f(x)=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^{2}+\omega^{2}}d\omega.$

57. Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x)=\begin{cases}e^{-2x} \ \text{при } x>0,\\ 0 \ \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\frac{2+i\omega}{4+\omega^{2}}d\omega.$

58. Найти синус и косинус преобразования функции

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ \text{при } -1\le x\le -\frac{1}{2},\\ 0 \ \text{при } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 1 \ \text{при } \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

Ответ: $F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega-\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$, $F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}-\cos\omega}{\omega}$.

59. Найти преобразование Фурье для функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ответ: $F(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Элементы теории функций комплексной переменной

Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости

1. Вычислить значение функции $f(x)=z^4+2z^3-2z^2+4z$ при $z=1-i$.
Ответ: $2-3i$.

2. Записать в тригонометрической форме число $z=(1+i)^5(\sqrt{3}-i)^7$.

Ответ: $2^9\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+2\pi k\right)\right)$.

3. Вычислить:

а) $\sqrt{-2}$. **Ответ:** $w_0=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$, $w_1=-\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$.

б) $\sqrt[3]{-4\sqrt{3}+4i}$.

Ответ: $w_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{5}{18}\pi+i\sin\frac{5}{18}\pi\right)$, $w_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{17}{18}\pi+i\sin\frac{17}{18}\pi\right)$,
$w_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{18}\pi\right)\right)$.

4. Найти:

а) $\operatorname{Im}\bar{z}$, если $z=\frac{1}{1-2i}$. **Ответ:** $-\frac{1}{5}$.

б) $\operatorname{Re}\bar{z}$, если $z=\left(\frac{2-i}{1+i}\right)^3$. **Ответ:** $-\frac{13}{4}$.

5. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-ie^{-\frac{\pi}{5}}$.

Ответ: $|z|=e^{-\frac{\pi}{5}}$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}$.

6. Используя формулу Муавра, найти модуль и аргумент числа $z=(1+i)^8$.

Ответ: $|z|=16, \arg z=0$.

7. Используя формулу Муавра, доказать формулы:

а) $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$;

б) $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

8. Найти модуль и аргумент числа $f(i)$, если $f(z)=(i-1)\operatorname{cth} z^2$.

Ответ: $|f(i)|=\sqrt{2}\operatorname{cth}1, \arg f(i)=\dfrac{3\pi}{4}$.

9. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $-\pi \le \arg(z-2+i) \le -\dfrac{3\pi}{4}$, $|\operatorname{Im}(iz+1)| \le 1$;

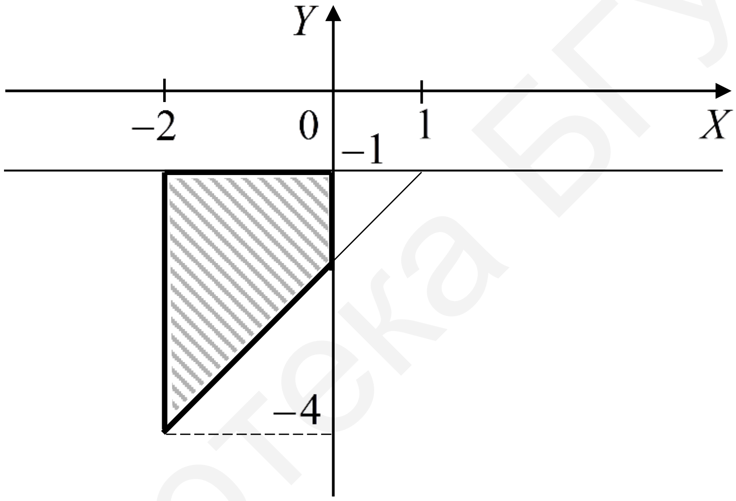

Рис. 6

б) $\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z+2+2i) \le -\dfrac{\pi}{2}$, $|\operatorname{Re} iz| \le 1$.

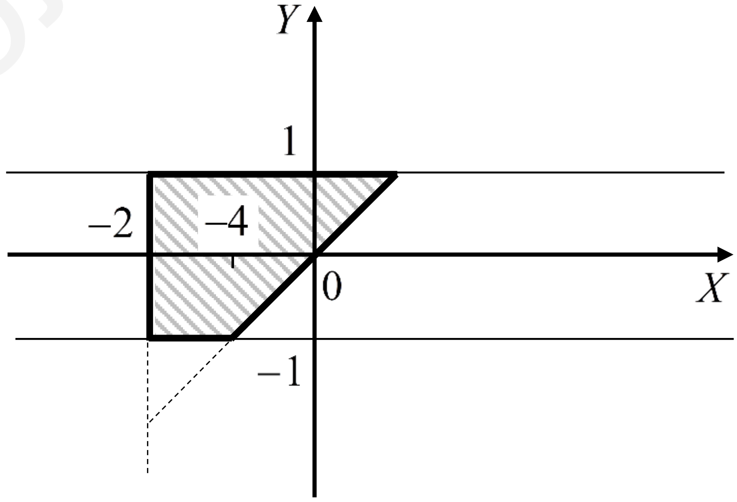

Рис. 7

Библиотека БГУИР

10. Какое геометрическое место точек плоскости определяются каждым из следующих соотношений:

а) $|z-2+i|=|z+4-5i|$. **Ответ:** прямая $y=x+3$.

б) $|z-3-i|>3$. **Ответ:** внешность круга $z_0\,(3;1)$, $R=3$.

в) $\operatorname{Re} z^2=2$. **Ответ:** гипербола $x^2-y^2=3$.

г) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$. **Ответ:** окружность $x^2+y^2+4y=0$.

д) $\left|\dfrac{z-2}{z-3}\right|=1$. **Ответ:** прямая $x=\dfrac{5}{2}$.

е) $|1+z|<|1-z|$. **Ответ:** полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$.

ж) $\operatorname{Im}((1-i)(z+i))=0$. **Ответ:** прямая $y=x-1$.

з) $\left|\dfrac{z+2}{z+4}\right|<1$. **Ответ:** полуплоскость $\operatorname{Re} z>-3$.

11. Какие из следующих уравнений являются уравнениями оси OX:

а) $\operatorname{Im} z=0$; б) $\left|\arg z-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$; в) $z-\bar{z}=0$; г) $|z-i|=|z+i|$.

Ответ: все уравнения определяют ось OX.

12. Какие из следующих уравнений являются уравнениями оси OY:

а) $\operatorname{Re} z=0$; б) $|\arg z|=\dfrac{\pi}{2}$; в) $z+\bar{z}=0$; г) $|z-1|=|z+1|$.

Ответ: все уравнения определяют ось OY.

13. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+(n+1)i}{2n+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i.$$

14. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{3i}{n}$. **Ответ:** $3i$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **Ответ:** не существует.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sh} in}{n}$. **Ответ:** 0.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$. **Ответ:** не существует.

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-in}{1+in}$. **Ответ:** -1.

Библиотека БГУИР

е) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}\,\dfrac{2}{n} + i\,\dfrac{n^4}{3^n}$. **Ответ:** 2.

15. Написать в комплексной форме уравнение линии $y = x$.

Ответ: $z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$.

16. Написать в комплексной форме уравнение окружности единичного радиуса с центром на биссектрисе угла третьей четверти и касающейся осей координат.

Ответ: $|z+1+i|=1$.

17. Дано уравнение кривой в комплексной форме $z=e^{it}+2e^{-it}$. Определить вид этой кривой.

Ответ: $\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$.

18. Найти уравнение кривой $r = a\varphi$ в комплексной форме.

Ответ: $z = a\varphi e^{i\varphi}$.

Элементарные функции комплексного переменного

19. Найти действительные и мнимые части функций:

а) $w=i-z^3$; б) $w=\dfrac{1}{z-2i}$.

Ответ: а) $u=3xy^2-x^3$, $v=1-3x^2y+y^3$;

б) $u=\dfrac{x}{x^2+(y-2)^2}$, $v=\dfrac{2-y}{x^2+(y-2)^2}$.

20. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z^4}$ найти $|f(z)|$ и $\mathrm{Arg}\,f(z)$.

Ответ: $|f(z)|=\dfrac{1}{r^4}$, $\mathrm{Arg}\,f(z)=-4\varphi+2\pi k$.

21. Найти образы координатных осей при отображении $w=-3iz$.

Ответ: образом действительной оси является мнимая ось, образом мнимой – действительная.

22. Доказать, что отображение $w=az+b$ сводится к повороту, растяжению (сжатию) и параллельному переносу.

23. Записать преобразование $w=(1+i)z-1$ в виде последовательности простейших преобразований и найти образ отрезка, соединяющего точки $A(1;-1)$ и $B(0;-1)$.

Библиотека БГУИР

Ответ: $w_1 = z\cdot\sqrt{2}$, $w_2 = e^{\frac{\pi}{4}i} w_1$, $w_3 = w_2 - 1$.

Образом отрезка AB будет отрезок $A'B'$, $A'(1;\,0)$, $B'(0;-1)$.

24. На какую область в плоскости w функция $w = z^2$ отображает бесконечный сектор $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: первый квадрант $(\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0)$.

25. Найти образ прямой $x + y = 1$ при отображениях:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; б) $f(z) = z^2$.

Ответ: а) окружность $\left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$; б) парабола $v = \dfrac{1 - u^2}{2}$.

26. Найти образ окружности $|z - 1| = 2$ при отображении $w = 3iz + 1$.

Ответ: окружность $|w - (1 + 3i)| = 6$.

27. Найти линейную функцию $w = az + b$, отображающую треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ на подобный ему треугольник с вершинами $w_1 = 1 + i$, $w_2 = 0$, $w_3 = 2$.

Ответ: $w = (1 + i)(1 - z)$.

28. Определить действительную и мнимую части, модуль и аргумент следующих величин: а) e^{3+4i}; б) $\sin 2i$; в) $\cos i$.

Ответ: а) $\operatorname{Re} e^{3+4i} = e^3 \cos 4$, $\operatorname{Im} e^{3+4i} = e^3 \sin 4$, $\left|e^{3+4i}\right| = e^3$, $\arg e^{3+4i} = 4$;

б) $\operatorname{Re} \sin 2i = 0$, $\operatorname{Im} \sin 2i = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}$, $|\sin 2i| = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}$, $\arg \sin 2i = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{Re} \cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2}$, $\operatorname{Im} \cos i = 0$, $|\cos i| = \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2}$, $\arg \cos i = 0$.

29. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z = \cos(1 - i)$; б) $z = \operatorname{sh} 2i$; в) $z = e^i(\cos 1 + \operatorname{ch} i)$.

Ответ: а) $\operatorname{Re} z = \cos 1 \operatorname{ch} 1$, $\operatorname{Im} z = \sin 1 \cdot \operatorname{sh} 1$; б) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = \sin 2$;

в) $\operatorname{Re} z = 2\cos^2 1$, $\operatorname{Im} z = \sin 2$.

30. Доказать: а) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

б) $\operatorname{th}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \cdot \operatorname{th} z_2}$.

31. Проверить справедливость формул:

Библиотека БГУИР

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z,$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

Используя эти соотношения, доказать:

а) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; б) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$; в) $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$.

32. Вывести формулы:

а) $\operatorname{Arcctg} z = -\dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{zi+1}{zi-1}$; б) $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$.

33. Найти:

а) $\ln(-2)$; б) $\operatorname{Ln}(1+iy)$; в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$.

Ответ: а) $\ln 2 + \pi i$; б) $\ln\sqrt{1+y^2} + (\operatorname{arctg} y + 2k\pi)i$; в) $e^{(i-1)\cdot\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi}$.

34. Решить уравнения:

а) $e^{z+1} = \pi i$; б) $\operatorname{tg} z = \dfrac{i}{3}$; в) $\operatorname{sh} z = i$.

Ответ: а) $\ln\dfrac{\pi}{e} + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

б) $z_k = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $z_k^* = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$;

в) $\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$.

Аналитические функции

35. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -1+2i} \dfrac{z^2+2z+3}{z+1-2i}$; б) $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{z^3+8i}{z-2i}$; в) $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{\operatorname{Re}(z^2)}$;

г) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$.

Ответ: а) $2+3i$; б) -12; в) ∞; г) $\sqrt{2}$.

36. Пользуясь определением, докажите, что при любом значении z непрерывны следующие функции: а) $f(z) = |z|$; б) $f(z) = az + b$; в) $f(z) = z^3$.

37. Исследовать функции на непрерывность:

Библиотека БГУИР

а) $f(z)=z^2\,\mathrm{Im}\,\bar{z}+i\,\mathrm{Re}\,z^2$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+2z-5}{|z+2i|-4}$; в) $f(z)=\dfrac{z-4i}{z^2+16}$;

г) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+\bar{z}}$.

Ответ: а) функция непрерывна на всей комплексной плоскости z; б) функция непрерывна на всей комплексной плоскости z за исключением точек окружности $|z-2i|=4$; в) функция непрерывна на всей комплексной плоскости z за исключением точек $z=\pm 4i$; г) функция непрерывна на всей комплексной плоскости z за исключением всех точек оси Oy.

38. Используя формулу бинома Ньютона, найти по определению производную функции $f(z)=z^n$.

Ответ: nz^{n-1}.

39. Доказать, что функции $w=|z|$ и $w=\mathrm{Re}\,z$ не являются аналитическими ни в одной точке плоскости z.

40. Доказать, что если $f'(z)=0$, $z\in\mathbb{Z}$, то функция $f(z)$ является постоянной на всей комплексной области z.

41. Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(z)$, найдите ее производную. Найдите область аналитичности функции:

а) $f(z)=(z-i)\,\mathrm{Re}(z-1)$; б) $f(z)=\sin\bar{z}$; в) $f(z)=z\bar{z}$.

Ответ: а) функция дифференцируема только в точке $z=i$, $f'(i)=-1$, функция не является аналитической; б) функция дифференцируема только в точках $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $f'(z_k)=0$, функция не является аналитической; в) функция дифференцируема только в точке $z=0$, $f'(0)=0$, функция не является аналитической.

42. Найти область аналитичности функции $f(z)=\ln z+i\varphi(-\pi<\varphi\le\pi)$.

Ответ: функция аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки $z=0$.

43. Используя условия Коши – Римана, докажите аналитичность следующих функций и найдите их производные:

а) $f(z)=(iz)^3$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z-2}\ (z\ne 2)$; в) $f(z)=\cos iz$.

Ответ: а) $3i\,(iz)^2\,i$; б) $-\dfrac{1}{(z-2)^2}$; в) $-i\sin iz$.

44. Показать, что следующие функции будут гармоническими в области их определения:

Библиотека БГУИР

а) $\varphi(x;y)=2e^x\cos y$; б) $\varphi(x;y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; в) $\varphi(x;y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

г) $\varphi(x;y)=\ln(x^2+y^2)$.

45. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$:

а) $v(x;y)=2y^2-2x^2+y$, $f(1)=-7-2i$;

б) $u(x;y)=4xy+x$, $f(1)=1-3i$;

в) $v(x;y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$.

Ответ: а) $-2iz^2+z-8$; б) $-2iz+z-i$; в) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$.

46. Пользуясь общими правилами дифференцирования и формулами

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz},\quad \operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1},$$

найти производные: а) $\operatorname{Arctg} z$; б) $\operatorname{Arth} z$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{1+z^2}$; б) $\dfrac{1}{1-z^2}$.

47. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданных отображениях $w=f(x)$ в точках z_0:

а) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=2i$; б) $w=3iz+2$, $z_0=1+i$; в) $w=\dfrac{1}{z}$, $z_0=3i$.

Ответ: а) $k=2, \alpha=\dfrac{\pi}{2}$; б) $k=3, \alpha=\dfrac{\pi}{2}$; в) $k=\dfrac{1}{9}, \alpha=0$.

Интегрирование функций комплексного переменного

48. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой:

а) $\int\limits_{AB}(3z-\bar{z})\,dz$, AB – отрезок прямой $z_A=-2+3i$, $z_B=-1+i$;

б) $\int\limits_{\ell}\operatorname{Re}(z^2-z)\,dz$, ℓ – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i$;

в) $\int\limits_{e}\operatorname{Re} z\,dz$, ℓ – ломаная OBA, где $0(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;1)$;

Библиотека БГУИР

г) $\int\limits_{\ell}(z+\bar{z})dz$, $\ell-$дуга параболы от точки $z_1=0$ до точки $z_2=-1+i$.

Ответ: а) $13+16i$; б) $-\frac{29}{30}-3i$; в) $\frac{1}{2}+i$; г) $1-\frac{4}{3}i$.

49. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{C} z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, C: $|z|=1$, $(-\pi\le \mathrm{Arg}\,z\le 0)$;

б) $\int\limits_{C}(2z+3\bar{z})dz$, $C-$верхняя полуокружность $|z-2|=3$ от точки $z_1=5$ до точки $z_2=-1$;

в) $\int\limits_{C}(z-a)^n\,dz\ (n\in\mathbb{N})$, $C-$окружность $|z-a|=R$;

г) $\int\limits_{AB}\mathrm{Re}\,zdz$, AB – верхняя полуокружность $z=1$, $A(1;0)$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-60+27\pi i$; в) 0; г) $\frac{\pi i}{2}$.

50. Вычислить $\int\limits_{l}(2i-z)dz$:

а) $l-$ отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$;

б) $l-$ отрезок параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

Объяснить совпадение полученных значений.

Ответ: а) $-2+i$; б) $-2+i$. Полученные значения совпадают, так как подынтегральная функция является аналитической.

51. Вычислить интегралы от аналитических функций:

а) $\int\limits_{1}^{i}(iz^3+3)dz$; б) $\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^3+2z)dz$; в) $\int\limits_{0}^{i}(z-i)e^{-z}dz$;

г) $\int\limits_{1}^{i}z\sin z\,dz$; д) $\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{iz}+\cos^3 z}{z^2+16}dz$.

Ответ: а) $3i-3$; б) $7+19i$; в) $1-\cos 1+i(\sin 1-1)$; г) $\cos 1-\sin 1-ie^{-1}$; д) 0.

52. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z^2-4}dz$; б) $\int\limits_{|z+3|=1}\frac{\mathrm{ch}\,iz}{z^2+3z}dz$; в) $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$;

г) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2+1}$; д) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi i}{2}\sin 2$; б) $-\dfrac{2}{3}\pi i\cos 3$; в) $\pi\,\mathrm{sh}\,1$; г) $-\pi$; д) $-\dfrac{2}{3}\pi i$.

53. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=8} \frac{\mathrm{sh}\,(z+2)}{(z-1)(z+5)}\,dz$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=7} \frac{\cos(z-3)}{(z-3)(z+2)}\,dz$;

г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+6)}$; д) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z\cdot(z-1)}\,dz$.

Ответ: а) $\pi i\,\mathrm{sh}\,2$; б) $\dfrac{2}{3}\pi i\,\mathrm{sh}\,3$; в) $\dfrac{2\pi i}{5}(1-\cos 5)$; г) $-\dfrac{\pi}{45}i$; д) 0.

54. Вычислить интегралы, используя формулу n-й производной для аналитической функции:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{3z^3+z^5+2}{(z-2)^{10}}\,dz$;

г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\,dz$; д) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{dz}{z(z^2+4)^2}$; е) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$;

Ответ: а) $-\pi i\,\mathrm{ch}\,1$; б) $\dfrac{\pi i}{3e^2}$; в) 0; г) $-\dfrac{5}{8}\pi i$; д) $-\dfrac{\pi i}{16}$; е) πi.

Ряды в комплексной области

55. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3ni+5}{2n-4in^4+3i}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{n!}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2^n}+i\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right)$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{4-i}\right)^n$; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4ni+3i}{n^3+2n^2i+4}$;

Библиотека БГУИР

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2i-1}{3n+2i}\right)^{n^2}$.

Ответ: а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится; ж) сходится.

56. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$. В случае сходимости найти его сумму.

Ответ: ряд сходится, $S=1-i$.

57. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+i\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{n+i}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}+(-1)^n\cdot in}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\pi n\cdot\sin\frac{1}{n}+i\frac{4^n}{n!}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^{n^2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n\sqrt{4^n+3}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-2i}{3+i}\right)^{n}$.

Ответ: а) расходится; б) сходится абсолютно; в) сходится условно; г) сходится абсолютно; д) сходится условно; е) сходится абсолютно; ж) сходится абсолютно; з) сходится условно; и) расходится.

58. Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2e^{iz^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z-i}{z+i}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+3}{z-3i}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{2i+nz}$.

Ответ: а) ряд сходится на всей комплексной плоскости z; б) область сходимости ряда $|z-i|<1$; в) ряд сходится на полуплоскости $x+y<0$; г) ряд сходится на полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$.

59. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^{2n}}{(n+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(z+2i)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(1-i)^n(z-i+1)^n}{\sqrt{(3n-2)\cdot 8^n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(5-i)^n}{\sqrt{(3n+8)\cdot 13^n}}(z+5i+2)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{(3n^2+2i)\,3^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{\sin^n(1+in)}$.

Ответ: а) $z\in\mathbb{Z}$; б) $z=-2i$; в) $|z-i+1|<\frac{1}{3}$; г) $|z+5i+2|<\frac{\sqrt{2}}{14}$; д) $|z|\le\sqrt[3]{3}$; е) $z\in\mathbb{Z}$.

60. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^n}{(2n+1)^2\cdot 5^n}$ сходится равномерно в области $[0;3]$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ является мажорантой.

61. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{(z+i)^n}{3^n}$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3z+3i}{(3-z-i)^2}$, $|z+i|<3$.

62. Показать, что область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}-1\right)+\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+1\right)\right)(z-i)^n$$

больше, чем область сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{3^n}\right)(z-i)^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n+1}{2^n}\right)(z-i)^n.$$

63. Найти сумму ряда и область сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}(1-z^2)^n$.

Ответ: $S=\frac{1}{z^2}$, D: $|z-1||z+1|<1$ (внутренность лемнискаты).

Ряды Тейлора и Лорана

64. Найти три первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для следующих функций. Найти радиус сходимости полученных рядов:

а) $f(z)=\frac{1}{1+e^z}$; б) $f(z)=\frac{1}{2+\sin z}$; в) $f(z)=\ln\cos z$.

Ответ: а) $f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{48}z^3+\ldots$, $(e^z=-1,\ z=\pi i)$ $R=\pi$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{8}z^2+\ldots,\ \ R=\sqrt{\ln^2(2-\sqrt{3})+\pi^2}$;

в) $f(z)=-\dfrac{1}{2!}z^2-\dfrac{2}{4!}z^4-\dfrac{16}{6!}z^6-\ldots,\ \ R=\dfrac{\pi}{2}$.

65. Разложить функцию $f(z)$ по степеням z до члена, содержащего z^4. Указать область сходимости полученного ряда:

а) $f(z)=e^z\ln(1+z)$; б) $f(z)=\dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$; г) $f(z)=e^z\sin z$.

Ответ: а) $f(z)=z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{3}z^3+0z^4+\ldots,\ \ |z|<1$;

б) $f(z)=-1+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{6}z^2+\dfrac{1}{12}z^3+\dfrac{1}{20}z^4+\ldots,\ \ 0<|z|<1$;

в) $f(z)=1-2z^2+3z^4-\ldots,\ \ |z|<1$;

г) $f(z)=1+z^2+\dfrac{1}{3}z^3+0z^4+\ldots,\ \ |z|<\infty$.

66. Данные функции разложить в ряд Тейлора по степеням z, используя табличные разложения, и найти области сходимости рядов:

а) $\cos^2\dfrac{iz}{2}$; б) $\sin(3z+2)$; в) $\cos^3 z$; г) $\sin^4 z+\cos^4 z$; д) $\ln(2+z-z^2)$.

Ответ: а) $1+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ |z|<\infty$;

б) $\cos 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!}z^{2n},\ \ |z|<\infty$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n}+3}{4\cdot(2n)!}z^{2n},\ \ |z|<\infty$;

г) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n},\ \ |z|<\infty$;

д) $\ln 2+\dfrac{z}{2}-\dfrac{5z^2}{2\cdot 4}+\dfrac{7z^3}{3\cdot 8}-\ldots,\ \ |z|<1$.

67. Разложив рациональные дроби на простейшие, представить их рядами Тейлора в окрестности точки $z=0$:

Библиотека БГУИР

а) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$; б) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$; в) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$, $|z|<1$;

б) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$, $|z|<2$;

в) $\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)z^{2n+1}$, $|z|<1$.

68. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$:

а) $\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=-1$; б) $\dfrac{3z+1}{z^2+5z+6}$, $z_0=1$;

в) $\dfrac{1}{z^2}$, $z_0=i$; г) $\dfrac{z+2i}{(1-2i-z)^2}$, $z_0=-2i$.

Ответ: а) $-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$, $|z-1|<3$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}i^{n+1}\cdot n(z-i)^{n-1}$, $|z-i|<1$, $\left(\dfrac{1}{z^2}=\left(-\dfrac{1}{z}\right)'\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+2i)^n$, $|z+2i|<1$.

69. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{e^{iz}-1}$; б) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin 2iz-2iz\operatorname{ch}iz}{z^3}$.

Ответ: а) $-i$; б) $\dfrac{7}{3}i$.

70. Разложить указанные функции в ряд Лорана в заданном кольце:

а) $\dfrac{3}{z^2+z-2}$, $1<|z|<2$; б) $\dfrac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$, $0<|z-1|<4$;

в) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$; г) $\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$, $0<|z-2i|<1$;

д) $\dfrac{5+3i}{(z-4i)^5}$, $0<|z-4i|<\infty$.

Ответ: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n}{2^{n+3}}(z-1)^n+\dfrac{1}{4(z-1)}-\dfrac{1}{(z-1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$;

г) $\dfrac{-i}{z-2i}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-2i)^n}{i^n}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5+3i}{(z-4i)^5}$.

71. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

а) $z\cdot\cos\dfrac{1}{z+3}$, $z_0=-3$; б) $(z+1)e^{\frac{z}{z-2}}$, $z_0=2$;

в) $(z+2)\sin\dfrac{2}{z-1}$, $z_0=1$; г) $\sin\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

Ответ: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+3)^{2n-1}(2n)!}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+3)^{2n}(2n)!}$, $|z+3|>0$;

б) $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-2)^{n-1}n!}+3e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-2)^n n!}$, $|z-2|>0$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n}(2n+1)!}+3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}$, $|z-2|1>0$;

г)

$$\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{2n}(2n)!}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{2n+1}(2n+1)!},\quad |z-2|>0.$$

72. Разложить в ряд Лорана функции:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$ в кольце $1<|z+2|<4$;

б) $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2+5z+6}$ в кольце $3<|z-1|<4$.

Библиотека БГУИР

Ответ: а) не разлагается; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{4^n}(z-1)^n-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(z-1)^{n+1}}$.

73. Разложить указанные функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

а) $\frac{1}{z+2}$; б) $\frac{1}{(z-1)(z+2)}$.

Ответ: а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}(2n)!}$, $|z|>2$; б) $\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-2}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$, $|z|>2$.

Нули и изолированные особые точки аналитических функций

74. Найти все нули функций и определить их порядок:

а) $z^5-3z^4+3z^3-z^2$; б) $z^5-z^4+4z^3-4z^2$; в) $(z^2+9)(z^2+4)^3$;

г) z^4+8z^2+15; д) $(z^4+2z^2+1)(z^2-2z+2)$; е) $z^2\sin z$.

Ответ: а) $z=0$ – нуль второго порядка, $z=1$ – нуль третьего порядка; б) $z=0$ – нуль второго порядка, $z=1, z=\pm 2i$ – нули первого порядка; в) $z=\pm 3i$ – нули первого порядка, $z=\pm 2i$ – нули третьего порядка; г) $z=\pm\sqrt{3}i$ и $z=\pm\sqrt{5}i$ – нули первого порядка; д) $z=\pm i$ – нули второго порядка, $z=1\pm i$ – простые нули; е) $z=0$ – нуль третьего порядка, $z=k\pi, k\neq 0$ – нуль первого порядка.

75. Для заданных функций определить порядок нуля в точке z_0:

а) $2\sin^4 z+3\cos z+3$, $z_0=\pi$;

б) $z^3+8z^2+20z+16+(1-\cos\pi z)^3$, $z_0=-2$.

Ответ: а) нуль второго порядка; б) нуль второго порядка.

76. Определить порядок нуля функции $f(z)$ в точке $z_0=0$:

а) $(e^z-1)^3-\sin^4 z$; б) $\sin^4 z(e^{z^2}-1)^3$; в) $(e^z-1)^2-\sin^2 z$;

г) $(e^{z^2}-1-z^2)\sin^3 z$; д) $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$; е) $\frac{e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}}{z}$.

Ответ: а) нуль третьего порядка; б) нуль десятого порядка; в) нуль третьего порядка; г) нуль седьмого порядка; д) нуль пятнадцатого порядка; е) нуль второго порядка.

Библиотека БГУИР

77. Определить порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0:

а) $\dfrac{\cos^4 \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$, $z_0=-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{\sin^2 z}{z(z+\pi)}$, $z_0=-\pi$;

в) $\dfrac{\ln(1+z^3)\sin^4 z}{z^2}$, $z_0=0$; г) $\dfrac{3z^2+5z+7}{4z^6+2z+3}$, $z_0=\infty$;

д) $\dfrac{1}{z^6}-\dfrac{z^2+z+1}{z^8}$, $z_0=\infty$; е) $\dfrac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}$, $z_0=0$.

Ответ: а) нуль третьего порядка; б) нуль первого порядка; в) нуль пятого порядка; г) нуль четвертого порядка; д) нуль седьмого порядка; е) нуль седьмого порядка.

78. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z+3}}$ определить тип особой точки $z=-3$.

Ответ: в сколь угодно малой окрестности точки $z=-3$ имеется бесконечно много особых точек $z_n=-3+\dfrac{1}{\pi n}$. Точка $z=-3$ является неизолированной особой точкой.

79. Определить тип особой точки $z_0=0$ для заданных функций:

а) $\dfrac{\cos 5z-1}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}$; б) $\dfrac{\operatorname{sh} 6z-6z}{\operatorname{ch} z-1-\dfrac{z^2}{2}}$; в) $\dfrac{\operatorname{ch} 3z-1}{e^z-1-z}$;

г) $\dfrac{\operatorname{ch} 3z-1}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}$; д) $\dfrac{\operatorname{ch} 6z-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$.

Ответ: а) полюс третьего порядка; б) полюс первого порядка; в) устранимая особая точка; г) полюс третьего порядка; д) полюс третьего порядка.

80. Для данных функций найти конечные особые точки и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi z}{2}}{(z^2-1)^2(z^2+5)^3}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{z^4-1}$;

в) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$; г) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z^2(1-\cos z)}$;

д) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^2}$; е) $f(z)=\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

Ответ: а) $z=\pm 1$ – устранимые особые точки, $z=\pm\sqrt{5}\,i$ – полюсы третьего порядка; б) $z=\pm 1$ – устранимые особые точки, $z=\pm i$ – простые полюсы; в) $z=-2$ – полюс второго порядка, $z=2+\dfrac{2}{n+2k\pi}$ – полюсы первого порядка, $z=2$ неизолированная особая точка; г) $z=0$ – полюс первого порядка, $z=2k\pi, k\neq 0$ – устранимая особая точка; д) $z=0$ – существенно особая точка, $z=1$ – полюс второго порядка, $z=2\pi ik$, $k\neq 0$ – полюс первого порядка; е) $z=0$ – устранимая особая точка, $z=\pm i$ – полюсы первого порядка.

81. Исследуйте характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

а) $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+3z^{10}+2z^3}{z^4+1}+\sin\dfrac{2iz+3}{3z-2}$;

б) $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+5z^7-2z}{z^4+5}+e^{\frac{z+3}{3z+5}}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin 2nz}{z^4-1}e^{\frac{1}{2}}$;

г) $f(z)=(3z+4)(2z^6+5z+7)$.

Ответ: а) полюс шестого порядка; б) устранимая особая точка; в) существенно особая точка; г) полюс седьмого порядка.

Вычеты и их приложения

82. Найти вычет функции $f(z)$ в особой точке z_0, используя ее разложение в ряд Лорана в окрестности указанной точки:

а) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $z_0=-1$;

б) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=-2$;

Библиотека БГУИР

г) $f(z)=\dfrac{2+5i}{(z+i)^4}$, $z_0=-i$;

д) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z}$, $z_0=0$.

Ответ: а) $f(z)=\dfrac{1}{3(z+1)}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$, $\operatorname*{Res}\limits_{-1} f(z)=\dfrac{1}{3}$;

б) $f(z)=-\dfrac{1}{3(z-1)}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$, $\operatorname*{Res}\limits_{1} f(z)=-\dfrac{1}{3}$;

в) $f(z)=\dfrac{4}{3(z+2)}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z+2)^n$, $\operatorname*{Res}\limits_{-2} f(z)=\dfrac{4}{3}$;

г) $f(z)=\dfrac{2+5i}{(z+i)^n}+\dfrac{0}{z+i}$, $\operatorname*{Res}\limits_{-i} f(z)=0$;

д) $f(z)=\dfrac{0}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $\operatorname*{Res}\limits_{0} f(z)=0$.

83. Найти вычеты функции $f(z)$ в конечных особых точках:

а) $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z^3-4z}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}$;

в) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z-2i)}$; г) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$;

д) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Ответ: а) $\operatorname*{Res}\limits_{0} f(z)=-\dfrac{3}{4}$; $\operatorname*{Res}\limits_{2} f(z)=\dfrac{7}{8}$; $\operatorname*{Res}\limits_{-2} f(z)=\dfrac{7}{8}$;

б) $\operatorname*{Res}\limits_{i} f(z)=\dfrac{1+3i}{20}$; $\operatorname*{Res}\limits_{-i} f(z)=\dfrac{1-3i}{20}$; $\operatorname*{Res}\limits_{-3} f(z)=\dfrac{9}{10}$;

в) $\operatorname*{Res}\limits_{-1} f(z)=\dfrac{2-4i}{5}$; $\operatorname*{Res}\limits_{2i} f(z)=\dfrac{3+4i}{5}$;

г) $\operatorname*{Res}\limits_{2i} f(z)=-\dfrac{i}{4e^2}$; $\operatorname*{Res}\limits_{-2i} f(z)=\dfrac{e^2 i}{4}$;

Библиотека БГУИР

д) $\operatorname*{Res}_{-i} f(z)=\dfrac{1+3i}{20}\cos 1$; $\operatorname*{Res}_{i} f(z)=\dfrac{1-3i}{20}$; $\operatorname*{Res}_{3} f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}3}{10}$.

84. Найдите вычеты в конечных особых точках:

а) $f(z)=\dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2 z^3}$;

в) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; г) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;

д) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

Ответ: а) $\operatorname*{Res}_{3} f(z)=\dfrac{28}{25}$; $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{53}{25}$;

б) $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{3}{16}$; $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{3}{16}$;

в) $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{1}{9}$; $\operatorname*{Res}_{3i} f(z)=-\dfrac{1}{54}(\sin 3-i\cos 3)$;

г) $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\dfrac{1}{27}$; $\operatorname*{Res}_{2} f(z)=-\dfrac{1}{27}$;

д) $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{5}{2}$; $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=e$.

85. Вычислите вычеты в существенно особых точках:

а) $f(z)=(z^2+z-2)e^{\frac{3}{z-1}}$; б) $f(z)=(z^2+6z+8)\sin\dfrac{2}{z+1}$;

в) $f(z)=(z^2+2z-1)\cos\dfrac{3}{z-1}$; г) $f(z)=(z^2+6z+10)\operatorname{ch}\dfrac{2}{z+1}$;

д) $f(z)=(z^2-7z+10)\operatorname{sh}\dfrac{3}{z-1}$.

Ответ: а) 18; б) $\dfrac{14}{3}$; в) -18; г) 8; д) $\dfrac{33}{2}$.

86. Найти вычет в бесконечно удаленной точке:

а) $f(z)=\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; б) $f(z)=\cos\dfrac{(z+2)\pi}{2z}$;

Библиотека БГУИР

в) $f(z)=z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$; г) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z-\dfrac{\pi}{2}i}$;

д) $f(z)=\dfrac{\cos 3z}{(2z+\pi)^2}$; е) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$.

Ответ: а) 0; б) π; в) π^2; г) $-i\,\mathrm{sh}\pi$; д) $\dfrac{3}{4}$; е) $-\dfrac{1}{2}$.

87. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}}\frac{e^z\,dz}{\sin z}$;

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz$; г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z(z^2+4)}$;

д) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z-1)}$; е) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$;

ж) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$; з) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}\frac{z+5}{(z+3)^3(z+7)}\,dz$;

и) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{z+4}{(z+1)^3(z+3)}\,dz$; к) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}\,dz$;

л) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi i}{4}$; б) $-2\pi i e^{\pi}$; в) $2\pi i$; г) 0; д) $-2\pi i$; е) $-\dfrac{3\pi i}{8}$; ж) $\dfrac{\pi i}{4}$; з) $-\dfrac{\pi i}{16}$; и) $\dfrac{\pi i}{4}$; к) $3\pi i$; л) $-\dfrac{1}{3}\pi i$.

88. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=10}\frac{z^{23}}{z^8-3}\,dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=10}\frac{z^{32}}{z^{11}+6}\,dz$;

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}\right)dz$; г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{\frac{z}{z-1}}(z-1)}{2z^2+1}\,dz$.

Библиотека БГУИР

Ответ: а) $18\pi i$; б) $72\pi i$; в) $6\pi i$; г) если $z=\infty$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$, то $\operatorname{Res}_{\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}(f(\infty)-f(z))\cdot z$, πi.

89. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{2}-4\sin t}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t+3}$; г) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$;

д) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{1-\cos t+\frac{1}{4}}$; е) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4-3\sin^2 t)^2}$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{2\pi}{\sqrt{8}}$; г) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{8\pi}{3}$; е) $\frac{10\pi}{27}$; ж) $\frac{5\pi}{8}$.

90. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+3}{x^4+10x^2+9}\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+25)}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$; г) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $\frac{\pi}{60}$; г) $\frac{\pi}{12}$; д) $\frac{3}{8}\pi$; е) $-\frac{\pi}{27}$.

91. Вычислить несобственные интегралы с помощью леммы Жордана:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x\,dx}{x^2+16}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}\,dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx$.

Библиотека БГУИР

Ответ: а) $\frac{\pi e^{-12}}{8}$; б) $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$; в) πe^{-6}; г) $\frac{\pi}{16}\left(e^{-1}-\frac{1}{3}e^{-3}\right)$; д) $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2+\sin 2)$.

Операционное исчисление

1. Используя интеграл Лапласа, найти изображения следующих функций:

а) $f(t)=e^{-5t}$; б) $f(t)=t^2$;

в) $f(t)=\operatorname{ch}3t$; г) $f(t)=e^t\sin 3t$;

д) $f(t)=\begin{cases}1, & t\in[0;1],\\ 0, & t\notin[0;1];\end{cases}$ е) $f(t)=\begin{cases}t, & t\in[0;1],\\ 1, & t\in[1;2],\\ 0, & t\notin[0;2].\end{cases}$

Ответ: а) $\frac{1}{p+5}$; б) $\frac{2}{p^3}$; в) $\frac{p}{p^2-9}$; г) $\frac{3}{(p-1)^2+9}$; д) $\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}$; е) $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}$.

2. Используя таблицу изображений и свойство линейности, найти изображение следующих оригиналов:

а) $f(t)=te^{2t}-\sin 3t$; б) $f(t)=\frac{1}{2^t}+1$;

в) $f(t)=te^{t-1}+t^2e^{t-2}$; г) $f(t)=\sin^2 t$;

д) $f(t)=\cos^2 t$; е) $f(t)=\sin^3 t$.

Ответ: а) $\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{3}{p^2+9}$; б) $\frac{1}{p+\ln 2}+\frac{1}{p}$; в) $\frac{1}{e(p-1)^2}+\frac{2}{e^2(p-1)^3}$; г) $\frac{2}{p(p^2+4)}$; д) $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; е) $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$, $\left(\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\right)$.

3. Найти изображение оригиналов, используя теорему смещения:

а) $f(t)=e^{mt}\cdot\cos nt$; б) $f(t)=e^{-t}\cdot t^3$;

в) $f(t)=\operatorname{ch}3t\cdot t$; г) $f(t)=te^{-t}\sin 2t$;

д) $f(t)=e^{-5t}\cdot\sin 2t\cdot\cos t$.

Библиотека БГУИР

Ответ: а) $\dfrac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$; б) $\dfrac{6}{(p+1)^4}$; в) $\dfrac{p^2+9}{(p^2-9)^2}$; г) $\dfrac{4(p+1)}{((p+1)^2+4)^2}$;

д) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{(p+5)^2+9}+\dfrac{1}{(p+5)^2+1}\right)$.

4. Найти изображение оригиналов, используя теорему запаздывания:

а) $f(t)=e^{t-2}\cdot 1(t-2)$; б) $f(t)=\operatorname{ch}(2t-1)\cdot 1\cdot\left(t-\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $f(t)=\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin(3t-\pi)\,1\cdot\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: а) $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$; б) $\dfrac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^2-4}$; в) $\dfrac{6pe^{-3p}}{(p^2+9)^2}$.

5. Найти изображение функций, заданных графически (рис. 8):

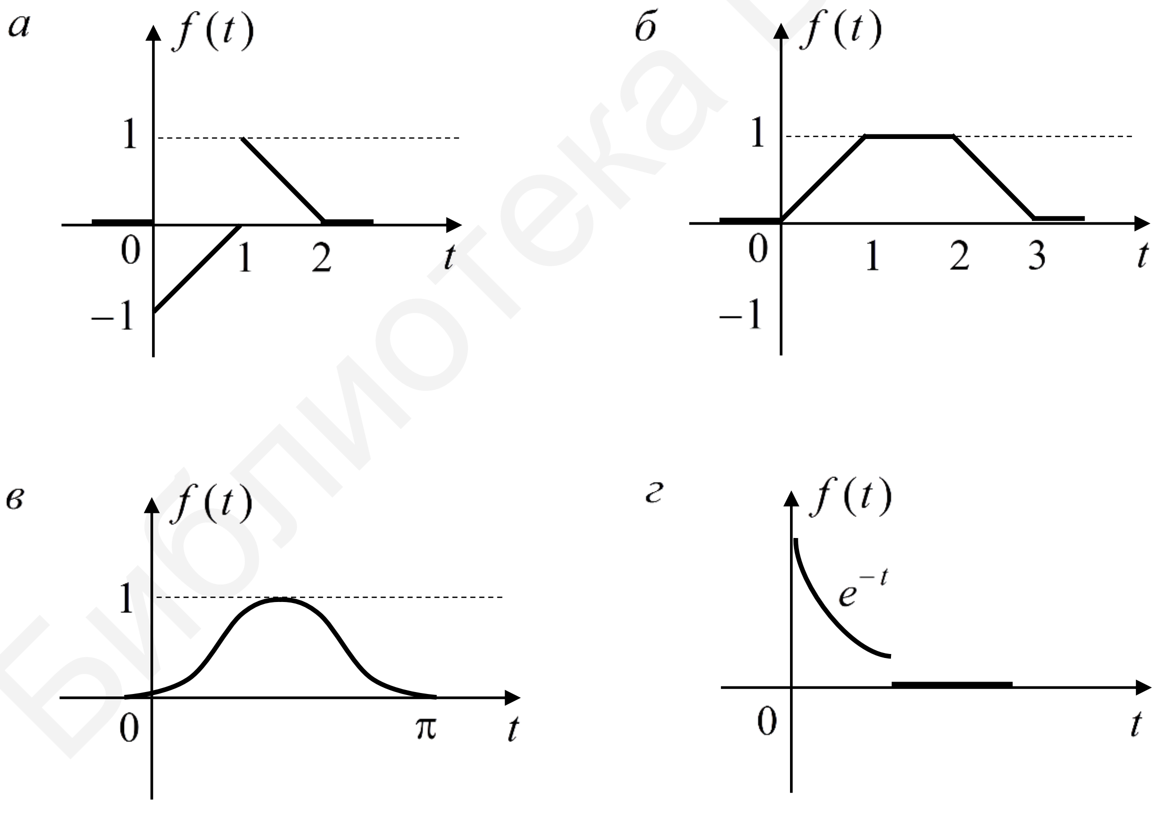

Рис. 8

Ответ: а) $-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1+(p-2)e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$; б) $-\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}e^{-p}-\dfrac{1}{p^2}e^{-2p}+\dfrac{1}{p^2}e^{-3p}$;

Библиотека БГУИР

в) $\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{e^{-\pi p}}{p^2+1}$; г) $\dfrac{1}{p+1}(1-e^{-p-1})$.

6. Пользуясь формулой $\sin wt \risingdotseq \dfrac{w}{p^2+w^2}$ и применив теорему о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $\cos wt$.

Ответ: $\dfrac{p}{p^2+w^2}$.

7. Пользуясь теоремами о дифференцировании оригинала и дифференцировании изображения, найти изображения функций:

а) $f(t)=\sin^2 t$; б) $f(t)=\cos^2 t$;

в) $f(t)=t\sin wt$; г) $f(t)=t(e^{4t}+\cos 3t)$;

д) $f(t)=t^2\cos 3t$; е) $f(t)=t^2\sin 4t$.

Ответ: а) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; б) $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; в) $\dfrac{2wp}{(p^2+w^2)^2}$; г) $\dfrac{1}{(p-4)^2}+\dfrac{p^2-9}{(p+9)^2}$; д) $\dfrac{2p(p^2-27)}{(p^2+9)^3}$; е) $\dfrac{8(3p^2-16)}{(p^2+16)^3}$.

8. Пользуясь теоремами об интегрировании оригинала и изображения, найти изображения следующих функций:

а) $f(t)=\int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 2\tau\, d\tau$;

в) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$; г) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$;

д) $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$; е) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\cdot\sin 3t}{t}$.

Ответ: а) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$; б) $\dfrac{p^2+8}{p^2(p^2+16)}$; в) $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$; г) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$; д) $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$; е) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{p+2}$.

9. Найти свертку функций и их изображение:

а) $f(t)=e^{3t}$, $g(t)=e^{5t}$; б) $f(t)=e^t$, $g(t)=\sin t$;

в) $f(t)=t$, $g(t)=te^t$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}(e^{5t}-e^{3t})$, $\frac{1}{(p-3)(p-5)}$; б) $\frac{1}{2}(e^{t}-\cos t-\sin t)$, $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; в) $2+t-2e^t+te^t$, $\frac{1}{p^2(p-1)^2}$.

10. Найти изображение следующих функций:

а) $f(t)=\sin^4 t$; б) $f(t)=\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$;

в) $f(t)=e^{3(t-5)}\cdot\sin(t-5)\cdot 1(t-5)$; г) $f(t)=\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$;

д) $f(t)=\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau^2}d\tau$.

Ответ: а) $\frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16}+\frac{4p}{p^2+4}+\frac{3}{p}\right)$; б) $\ln\frac{\sqrt{p^2+2p+2}}{p+1}$; в) $\frac{e^{-5p}}{(p-3)^2+1}$; г) $\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$; д) $\frac{1}{2p}\left(\ln\frac{p+1}{p-1}+\ln\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\right)$.

11. Разложив изображения в степенной ряд, найти оригиналы, соответствующие следующим изображениям:

а) $F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$; б) $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; в) $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$.

Ответ: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!\cdot n!}$.

12. Найти оригиналы для функций:

а) $f(t)=\frac{3p}{(p+5)^2}$; б) $f(t)=\frac{p+8}{p^2+4p+5}$; в) $f(t)=\frac{p+1}{p^2+2p}$;

г) $f(t)=\frac{1}{(p-1)(p-2)^2}$; д) $f(t)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$; е) $f(t)=\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$;

ж) $f(t)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$; з) $f(t)=\frac{1}{p^3-8}$; и) $f(t)=\frac{p^2+21p-40}{(p+1)(p^2-5p+6)}$.

Ответ: а) $3e^{-5t}-15te^{-5t}$; б) $e^{-2t}(\cos t+6\sin t)$; в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$; г) $e^{t}+e^{2t}(t-1)$; д) $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$; е) $2e^{t}-4t-3$; ж) $(t-3)\cdot e^{-(t-3)}\cdot 1(t-3)$; з) $\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{t}(\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$; и) $8e^{3t}-5e^{-t}-2e^{2t}$.

13. Применив вторую теорему разложения (использовав вычеты), найти оригинал для функций:

а) $f(t)=\dfrac{2p^{2}-1}{p^{2}(p+1)(p+2)}$; б) $f(t)=\dfrac{1}{(p+1)^{2}(p+2)}$.

Ответ: а) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t+e^{-t}-\frac{7}{4}e^{-2t}$; б) $te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}$.

14. Решить задачу Коши операционным методом:

а) $x'-4x=1-4t,\ x(0)=1$;

б) $x'+x=2\cos t,\ x(0)=0$;

в) $x''+4x'-5x=0,\ x(0)=3,\ x'(0)=-3$;

г) $x''-4x'+4x=4t,\ x(0)=4,\ x'(0)=7$;

д) $x''+3x'=e^{t},\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$;

е) $x''+4x=\sin 3t,\ x(0)=x'(0)=0$;

ж) $x''-3x'+2x=e^{t},\ x(0)=x'(0)=0$;

з) $x'''-2x''+x'=4,\ x(0)=1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=-2$.

Ответ: а) $e^{4t}+t$; б) $\sin t+\cos t-e^{-t}$; в) $2e^{t}+e^{-5t}$; г) $3e^{2t}+t+1$; д) $\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$; е) $\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t$; ж) $e^{2t}-(t+1)e^{t}$; з) $4t+3-2e^{t}$.

15. Решить системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} x'+x=y+e^{t}, \\ y'+y=x+e^{t}, \end{cases} \quad x(0)=1$;

б) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=-4x+4y, \end{cases} \quad x(0)=3,\ \ y(0)=-2$;

в) $\begin{cases} x'=3x+4y, \\ y'=4x-3y, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1$;

Библиотека БГУИР

г) $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1. \\ z' = -x - y, \end{cases}$

Ответ: а) $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2 + e^{5t}, \\ y = 2 - 4e^{5t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \dfrac{6}{5}e^{5t} - \dfrac{1}{5}e^{-5t}, \\ y = \dfrac{3}{5}e^{5t} + \dfrac{2}{5}e^{-5t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = 0, \\ z = e^t. \end{cases}$

16. С помощью интеграла Дюамеля решить дифференциальные уравнения:

а) $x'' + x' = t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

б) $x'' + 4x = \sin^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

в) $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

г) $x'' + x = \dfrac{1}{1 + \sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

Ответ: а) $\dfrac{t^2}{2} - t - e^{-t} + 1$; б) $\dfrac{1}{8}(1 - 2\cos t - t\sin 2t)$;

в) $(e^t + 1)\ln(e^t + 1) + e^t - 1 - (\ln 2 + t)(e^t + 1)$;

г) $\sin t \cdot \operatorname{arctg} \sin t + \cos t \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln \dfrac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right) - \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

Дополнения

Конечные суммы

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k = -1 + 2 - ... + (-1)^n \cdot n = (-1)^n \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{n+1}{2}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

7. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

8. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

9. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k! = 1 + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

10. $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Суммы рядов

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots = \dfrac{3}{4}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)} = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \ldots = \dfrac{11}{18}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(2n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 7} + \ldots = 2 - 2\ln 2$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(2n+3)} = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{2\cdot 7} + \dfrac{1}{3\cdot 9} + \ldots = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{3}\ln 2$.

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \dfrac{1}{2}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots = \dfrac{1}{4}$.

Библиотека БГУИР

18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots=e$.

19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\ \frac{1}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots=\frac{1}{e}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots=\ln 2$.

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\ \frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{\pi}{4}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\ldots=\frac{\pi^{2}}{6}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^{2}}=1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\ldots=\frac{\pi^{2}}{12}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2}}=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots=\frac{\pi^{2}}{8}$.

Разложения элементарных функций в ряд Тейлора

26. $e^{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots,\quad |x|<\infty$.

27. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots,\quad |x|<\infty$.

28. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\ \frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\ldots,\quad |x|<\infty$.

29. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ x^{n}}{n}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ldots,\quad x\in\left(-1;\,1\right]$.

30. $(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}\,x^{n}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^{2}+\ldots,\quad |x|<1$

.

31. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots,\quad |x|<\infty$.

Библиотека БГУИР

32. $\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots,\quad |x|<\infty.$

33. $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\quad |x|<1.$

34. $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}\,x^n=1+\frac{\ln a}{1!}\,x+\frac{\ln^2 a}{2!}\,x^2+\ldots,\quad |x|<\infty.$

35. $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n(2n+1)}\,x^{2n+1}=x+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\,x^5+\ldots,\quad |x|<1.$

36. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\operatorname{Arth} x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\quad |x|<\infty.$

37. $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n=1+2x+3x^2+\ldots,\quad |x|<1.$

Суммы тригонометрических рядов

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad (0<x<2\pi).$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad (0<x<2\pi).$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12},\quad (0\le x\le 2\pi).$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12},\quad (0\le x\le 2\pi).$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\quad (-\pi<x<\pi).$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\quad (-\pi<x<\pi).$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12},\quad (-\pi\le x\le\pi).$

Библиотека БГУИР

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n^3}=\dfrac{\pi^2 x-x^3}{12}$, $(-\pi\le x\le\pi)$.

46. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $(0<x<\pi)$.

47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$, $(0<x<\pi)$.

48. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2-2\pi x}{8}$, $(0\le x\le\pi)$.

49. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2 x-\pi x^2}{8}$, $(0\le x\le\pi)$.

50. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(2n+1)x}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

51. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

52. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi x}{4}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

53. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^3-4\pi x^2}{32}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

54. $\operatorname{Arc}\sin z=-i\operatorname{Ln}(i(z+\sqrt{z^2-1}))$.

55. $\operatorname{Arc}\cos z=-i\operatorname{Ln}(i(z+\sqrt{z^2-1}))$.

56. $\operatorname{Arctg} z=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i-z}{i+z}$.

57. $\operatorname{Arcctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$.

Библиотека БГУИР

58. $\operatorname{Ar}\operatorname{sh}z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$.

59. $\operatorname{Ar}\operatorname{ch}z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

60. $\operatorname{Ar}\operatorname{th}z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

61. $\operatorname{Ar}\operatorname{cth}z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$.

Таблица оригиналов и их изображений

62. $f(t) = 1(t), \quad F(p) = \dfrac{1}{p}$.

63. $f(t) = t, \quad F(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

64. $f(t) = t^n, \quad F(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

65. $f(t) = \delta(t), \quad F(p) = 1$.

66. $f(t) = e^{at}, \quad F(p) = \dfrac{1}{p-a}$.

67. $f(t) = t^n e^{at}, \quad F(p) = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$.

68. $f(t) = \sin at, \quad F(p) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$.

69. $f(t) = \cos at, \quad F(p) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$.

70. $f(t) = t \sin at, \quad F(p) = \dfrac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$.

71. $f(t) = t \cos at, \quad F(p) = \dfrac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$.

72. $f(t) = e^{at} \sin bt, \quad F(p) = \dfrac{b}{(p-a)^2 + b^2}$.

73. $f(t) = e^{at} \cos bt, \quad F(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$.

Библиотека БГУИР

74. $f(t)=\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}, \quad F(p)=\frac{1}{p(p-a)}.$

75. $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}, \quad F(p)=\frac{1}{(p-a)(p-b)}.$

76. $f(t)=\operatorname{sh}at, \quad F(p)=\frac{a}{p^2-a^2}.$

77. $f(t)=\operatorname{ch}at, \quad F(p)=\frac{p}{p^2-a^2}.$

78. $f(t)=(1+at)e^{at}, \quad F(p)=\frac{p}{(p-a)^2}.$

79. $f(t)=\frac{t\sin at}{2a}, \quad F(p)=\frac{p}{(p^2+a^2)^2}.$

Библиотека БГУИР

Литература

1. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1. / К. Н. Лунгу. – М. : Айрис-Пресс, 2015.

2. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 3, 4 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2014.

3. Шмелёв, П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П. А. Шмелёв. – М. : Высш. шк. 1983.

4. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного / А. В. Пантелеев. – М. : Высш. шк., 2001.

Библиотека БГУИР

Содержание

Библиотека БГУИР

Св. план 2021, поз. 18

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович
Степанова Татьяна Сергеевна и др.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ИЗБРАННЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОСОБИЕ

Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 07.06.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ 89.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск

Библиотека БГУИР