# Теория и применение цифровой обработки сигналов

## Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

к.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

# Система базисных векторов

Конечные сигналы $x(n)$ можно рассматривать, как вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, где

$$\mathbf{x} = [x(0)\ x(1) \dots x(N-1)]^T.$$

Определим в $\mathbb{C}^N$ систему базисных векторов $\{\phi_k(n)\}$, $n, k = 0,1, \dots N-1$.

Для простоты будем использовать следующую запись

$$\phi_k = [\phi_k(0)\ \phi_k(1) \dots\ \phi_k(N-1)]^T.$$

## Разложение сигнала $x(n)$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\phi_k(n),$$

$c(k)$ – коэффициенты разложения сигнала по базису $\{\phi_k\}$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = c(0)\begin{bmatrix} | \\ \phi_0 \\ | \end{bmatrix} + c(1)\begin{bmatrix} | \\ \phi_0 \\ | \end{bmatrix} + \cdots c(N-1)\begin{bmatrix} | \\ \phi_{N-1} \\ | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_{N-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(0) \\ \vdots \\ c(N-1) \end{bmatrix}$$

Т.е.

$$\mathbf{x} = \Phi \cdot \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} = [c(0)\ c(1) \dots c(N-1)]^T$.

# Свойства системы базисных векторов

1) ***Линейная независимость*** базисных векторов

$$a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\forall\ a_i$, кроме случая, когда $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0.$

2) ***Ортогональность*** базисных векторов

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(n)\phi_l^*(n) = \begin{cases} E, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

где $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$ – скалярное произведения, $^*$ – комплексное сопряжение.

Если $E = 1$, то система векторов называется ***ортонормированной***.

# Базис ДПФ

ДПФ описывает строго *N*-периодичные сигналы, т.е. $x(n) = x(n+N)$, значит базисные вектора должны также удовлетворять этому свойству:

$$\phi_k(n) = \phi_k(n+N). \tag{1}$$

Рассмотрим следующее семейство конечных комплексных экспонент:

$$w_k(n) = e^{j\omega_k n}, \quad n = 0,1,\dots,N-1 \tag{2}$$

где $\omega_k$ – различные частоты, которые удовлетворяет требованиям (1).
Чтобы в последовательность $w_k(n)$ длины *N* укладывалось целое число периодов необходимо

$$w_k(0) = w_k(N) = 1,$$

Следовательно

$$\left(e^{j\omega_k}\right)^N = 1.$$

# Базис ДПФ

Уравнение

$$\left(e^{j\omega_k}\right)^N = 1.$$

имеет $N$ различных решений: $e^{j2\pi k/N}, k = 0, \dots N - 1.$
Введем

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}},$$

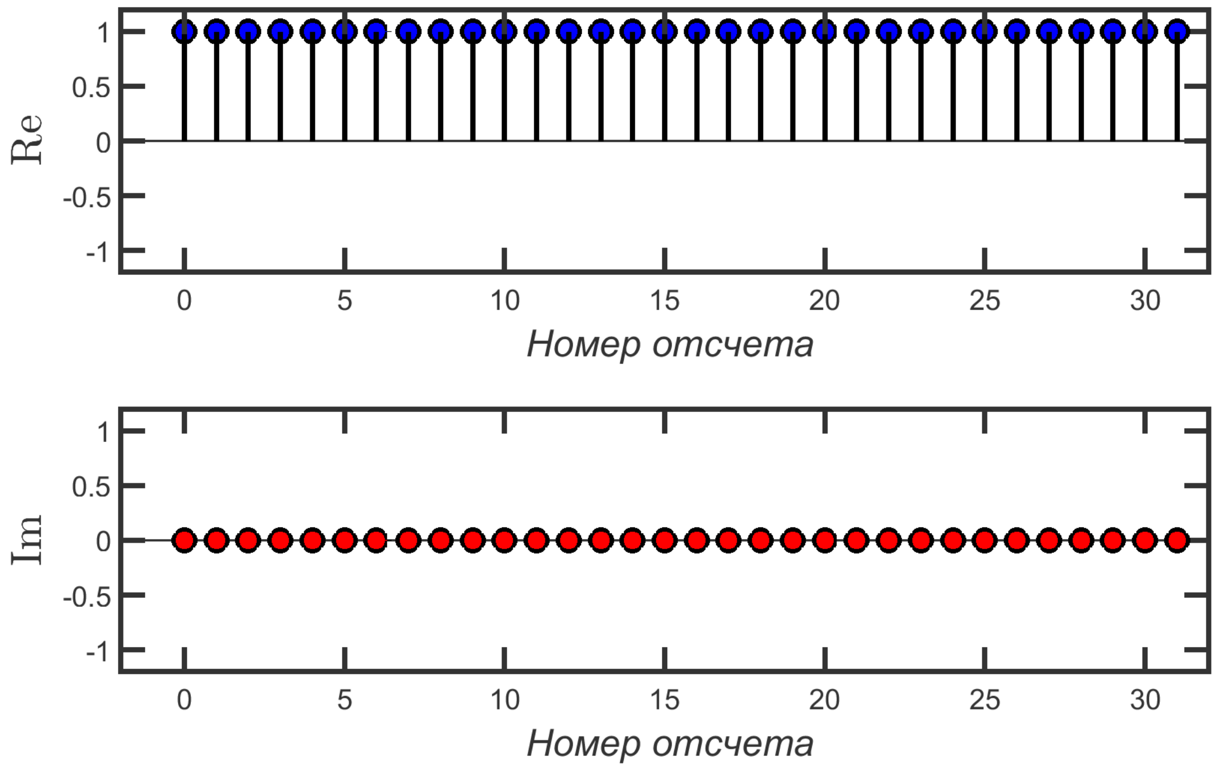
тогда (2) может быть записано как

$$w_k(n) = W_N^{-nk}, \quad n, k = 0,1, \dots, N - 1.$$

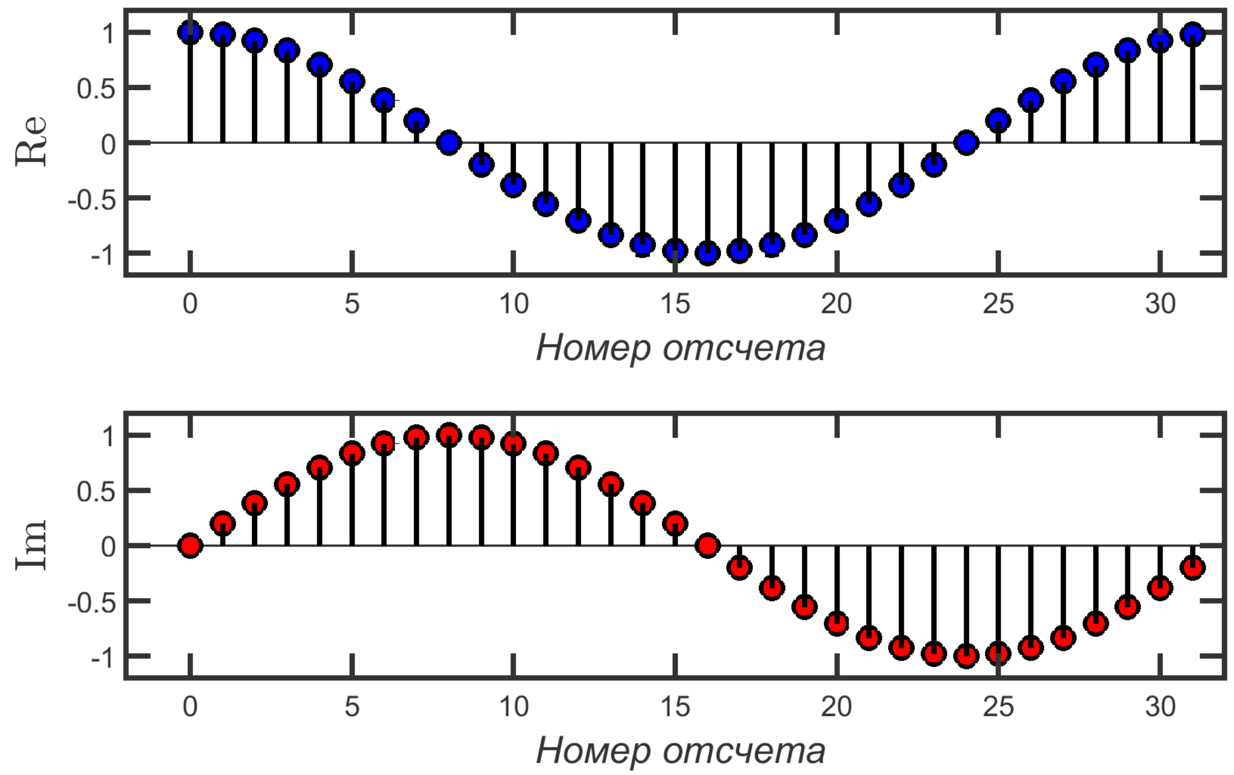
Таким образом, базис ДПФ состоит из векторов

$$\boldsymbol{w}_k = \left[1 \;\; W_N^{-k} \; W_N^{-2k} \dots \; W_N^{-(N-1)k}\right]^T.$$

# Примеры базисных векторов ДПФ

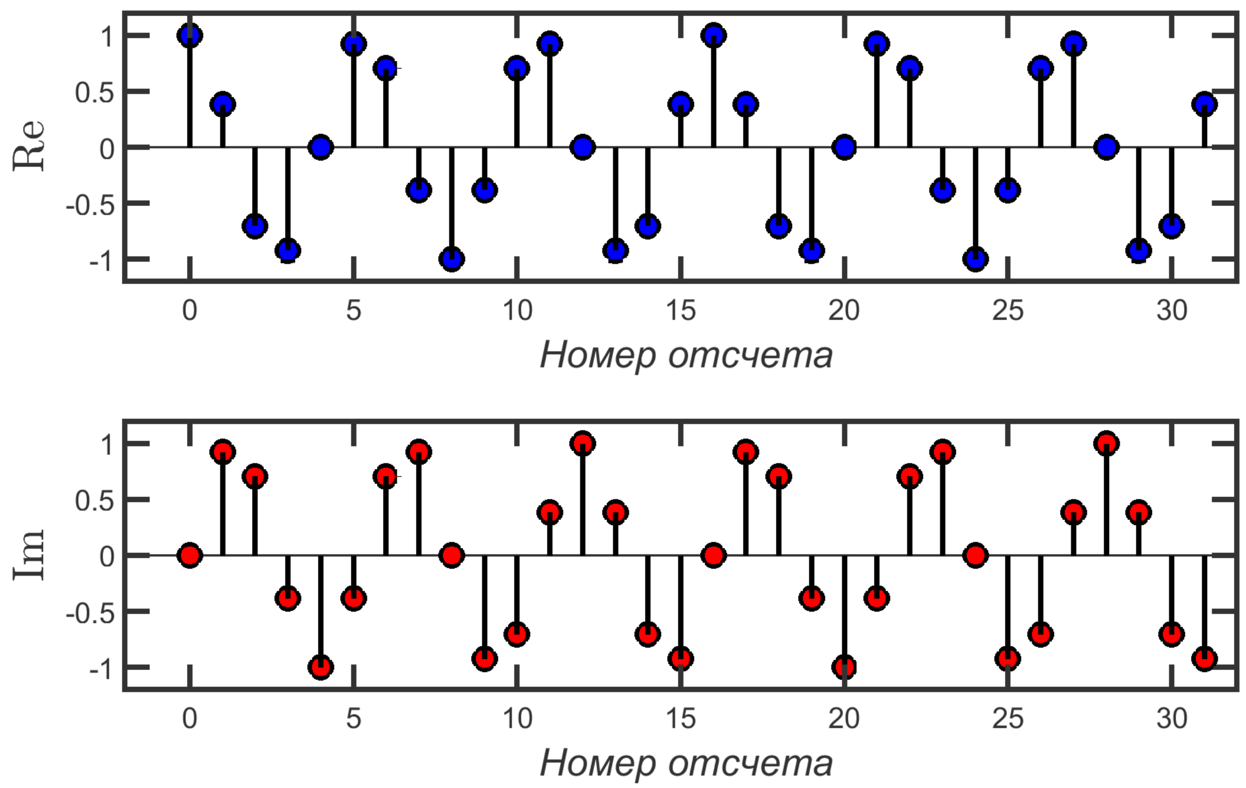



Базисный вектор $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^{32}$

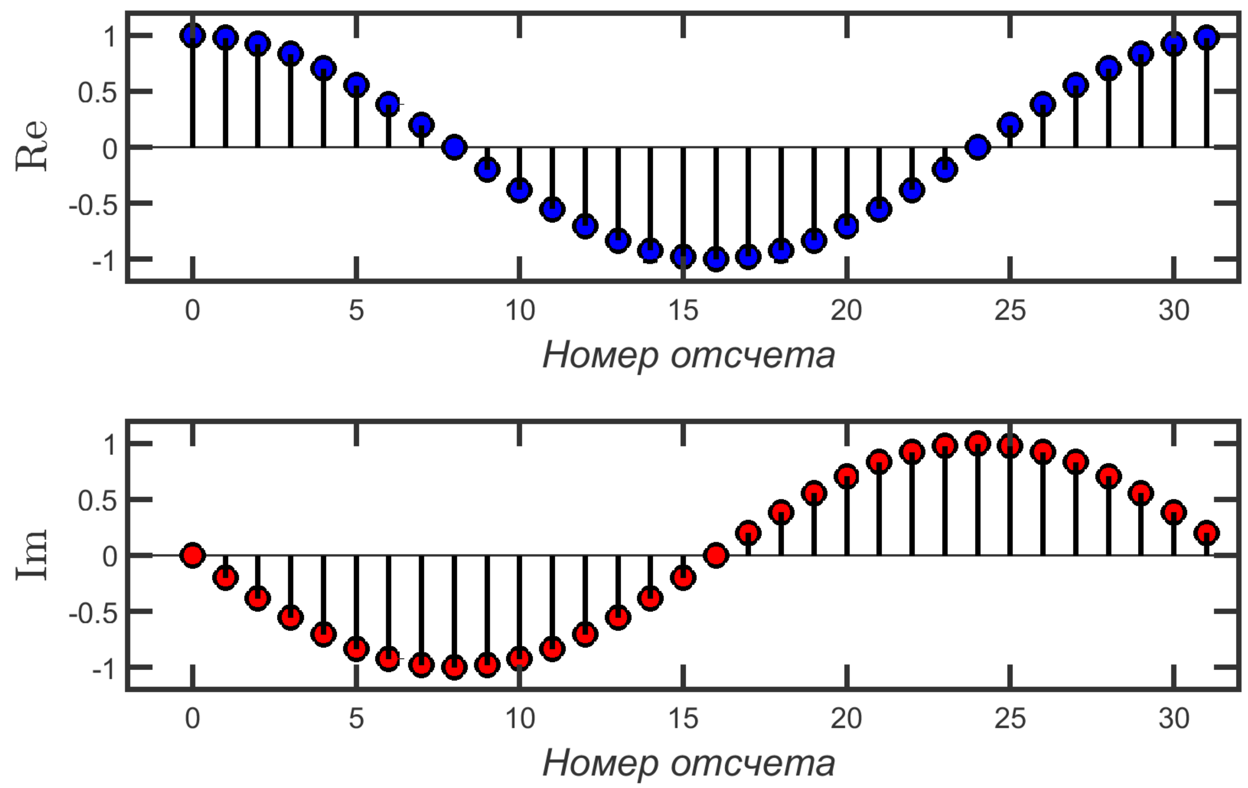



Базисный вектор $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{C}^{32}$

# Примеры базисных векторов ДПФ

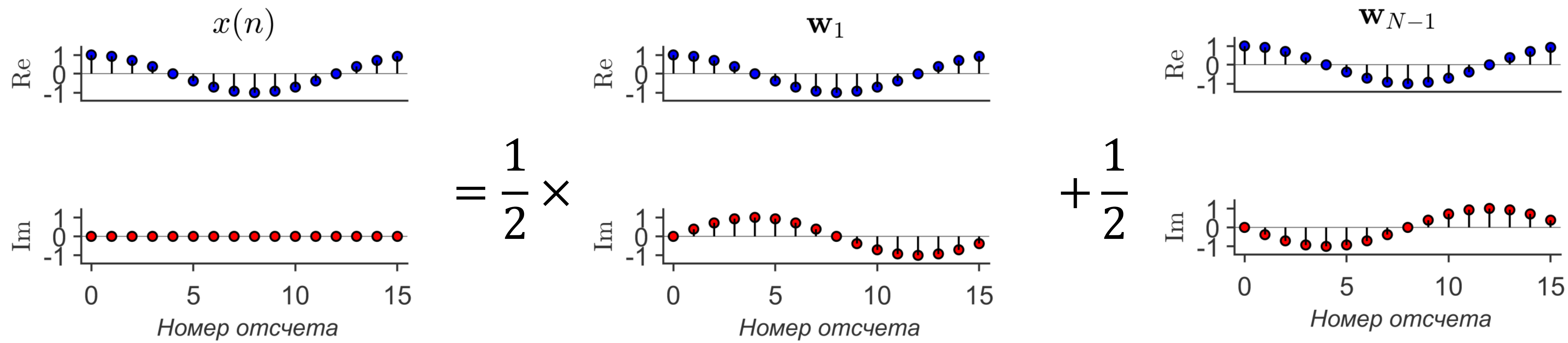



Базисный вектор $\mathbf{w}_6 \in \mathbb{C}^{32}$




Базисный вектор $\mathbf{w}_{31} \in \mathbb{C}^{32}$

# Пример разложения сигнала в базисе ДПФ




Размер сигнала $N = 16$.

Входной сигнал $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \; n = 0,1, \dots 15$.

Разложение в базисе ДПФ:

$$x(n) = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1(n) + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{15}(n)$$

# Ортогональность базиса ДПФ

Если $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, то базис ДПФ состоит из $N$ векторов

$$\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N-1}\}$$

где

$$\mathbf{w}_k = \left[1 \;\; W_N^{-k} \; W_N^{-2k} \; \dots \;\; W_N^{-(N-1)k}\right]^T.$$

Докажем, что базис ДПФ является ортогональным. Для этого найдем

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{mn} \cdot \left(W_N^{ln}\right)^* = \dots$$

# Ортогональность базиса ДПФ

Если $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, то базис ДПФ состоит из $N$ векторов

$$\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N-1}\},$$

где

$$\mathbf{w}_k = \left[1 \;\; W_N^{-k} \; W_N^{-2k} \dots \; W_N^{-(N-1)k}\right]^T.$$

Докажем, что базис ДПФ является ортогональным. Для этого найдем

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{mn} \cdot \left(W_N^{ln}\right)^* = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m-l)}$$

$$= \begin{cases} N, & m = l \\ \dfrac{1 - W_N^{(m-l)N}}{1 - W_N^{(m-l)}} = 0, & m \neq l \end{cases}$$

Т.е.

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_l \rangle = N\delta(m - l).$$

# Явная форма записи ДПФ

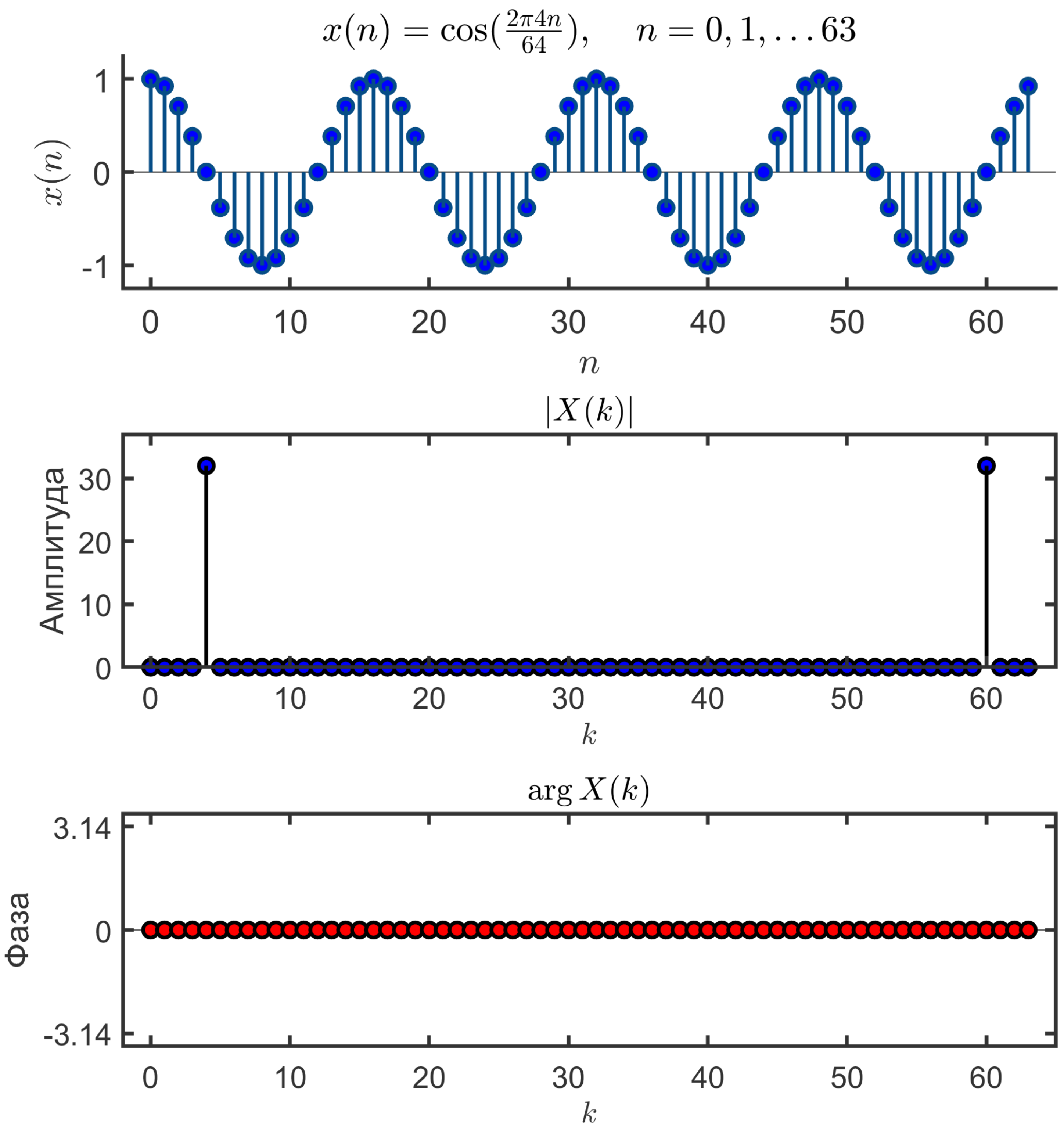
## Формула анализа

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

## Формула синтеза

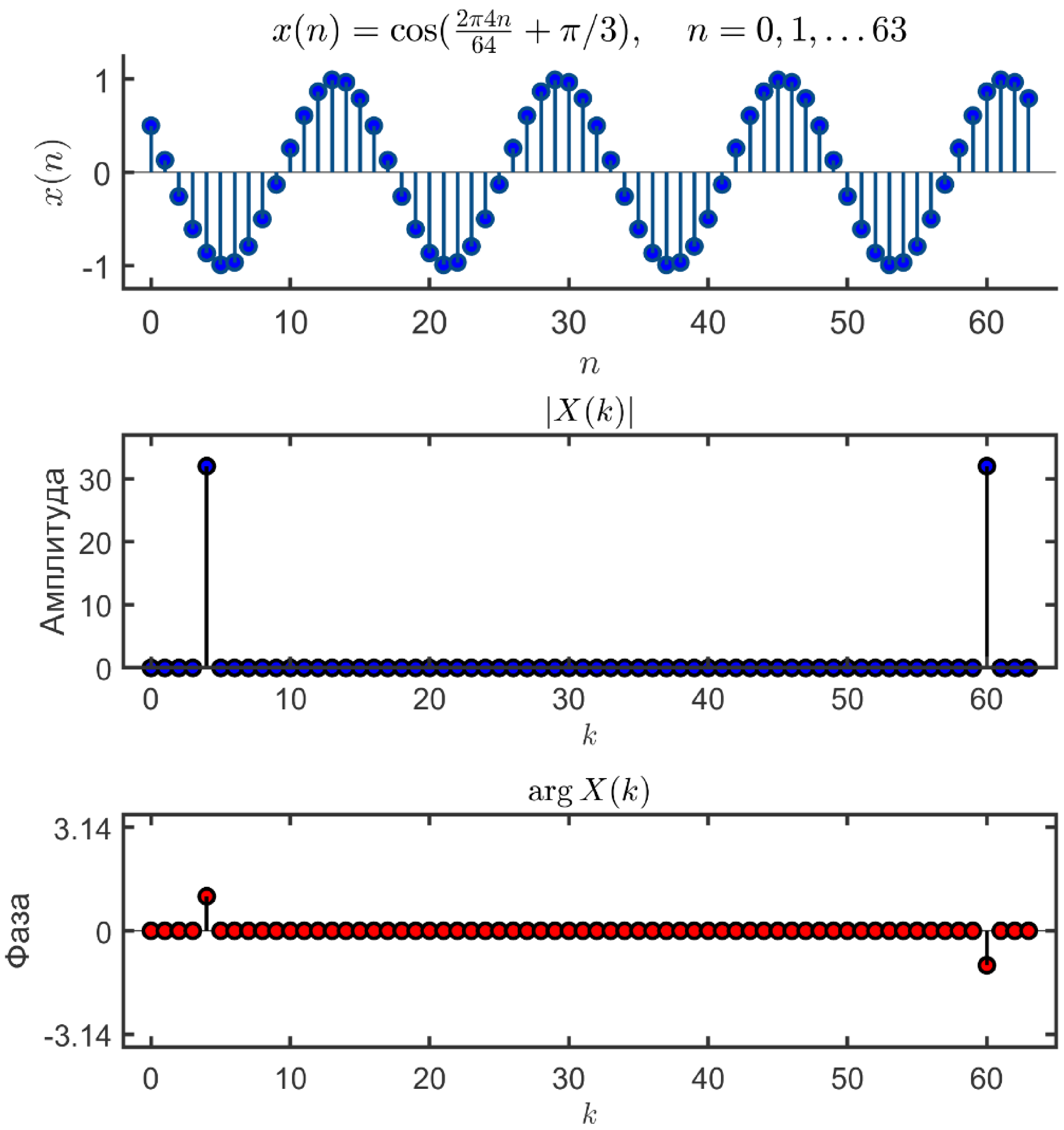
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}.$$

# Примеры ДПФ



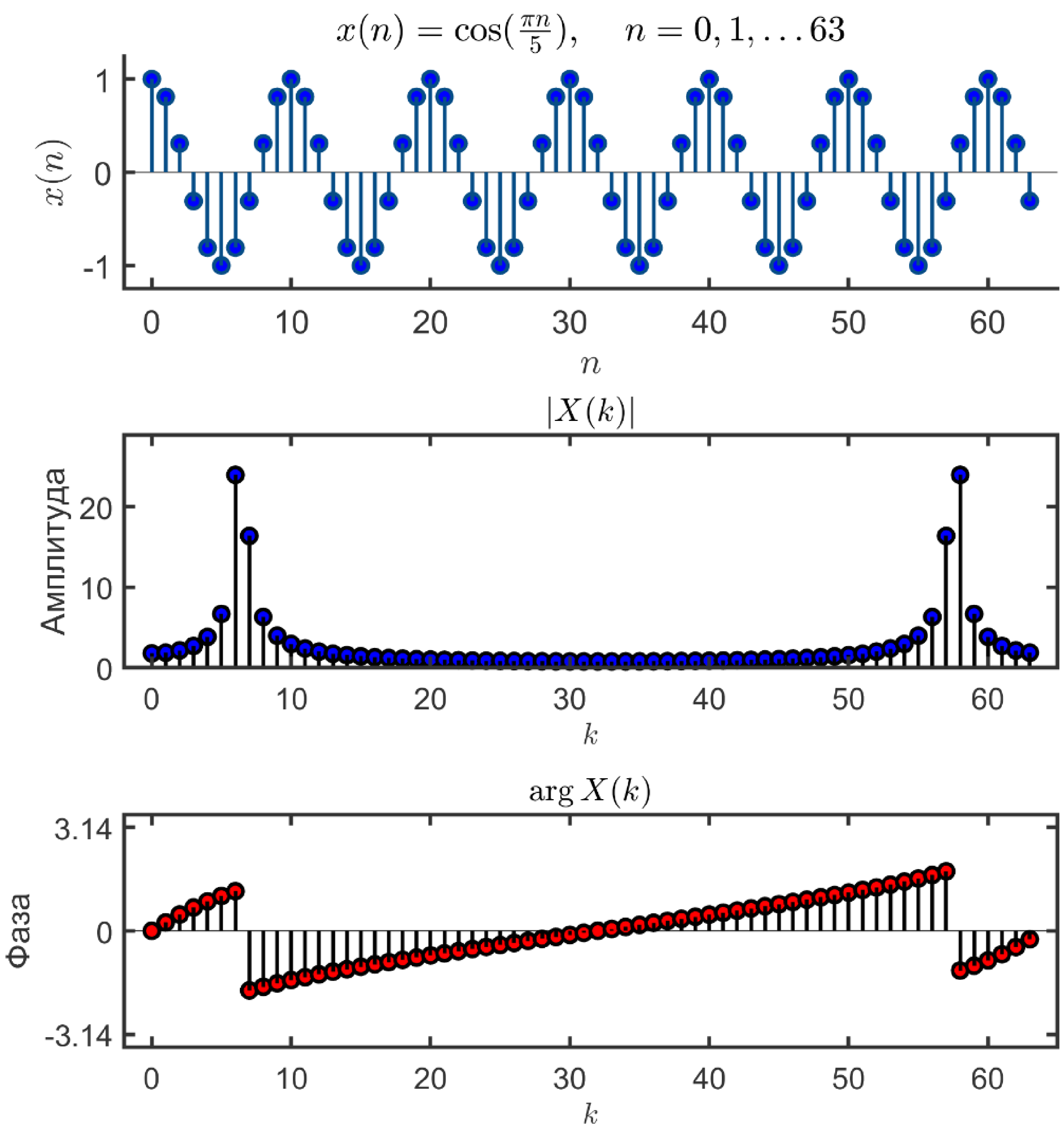
$x(n) = \cos(\frac{2\pi 4n}{64}), \quad n = 0, 1, \ldots 63$
$x(n)$
$n$
$|X(k)|$
Амплитуда
$k$
$\arg X(k)$
Фаза
$k$

# Примеры ДПФ



$x(n) = \cos(\frac{2\pi 4n}{64} + \pi/3), \quad n = 0, 1, \dots 63$
$x(n)$
1
0
-1
0
10
20
30
40
50
60
$n$
$|X(k)|$
Амплитуда
30
20
10
0
$k$
$\arg X(k)$
Фаза
3.14
-3.14
$k$

# Примеры ДПФ



$x(n) = \cos(\frac{\pi n}{5}), \quad n = 0, 1, \ldots 63$
$x(n)$
$n$
$|X(k)|$
Амплитуда
$k$
$\arg X(k)$
Фаза
3.14
-3.14
$k$