

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

СВЕРТКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

ЭФФЕКТ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ВЫБОРКИ

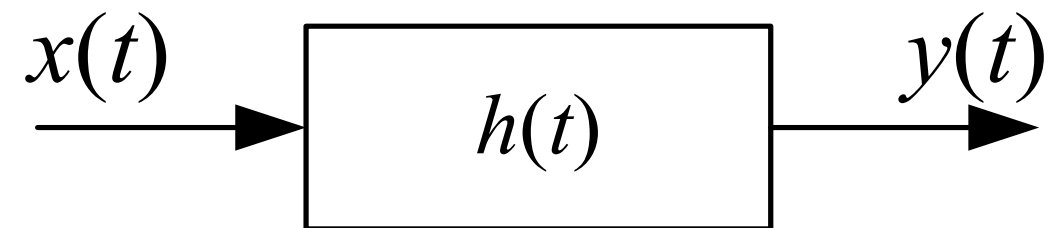
к.т.н., доцент *Шацкевич Максим Юсипович*



Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Свертка непрерывных сигналов

Линейная система



описывается линейным оператором H :

$$y(t) = H\{x(t)\}.$$

Импульсная характеристика

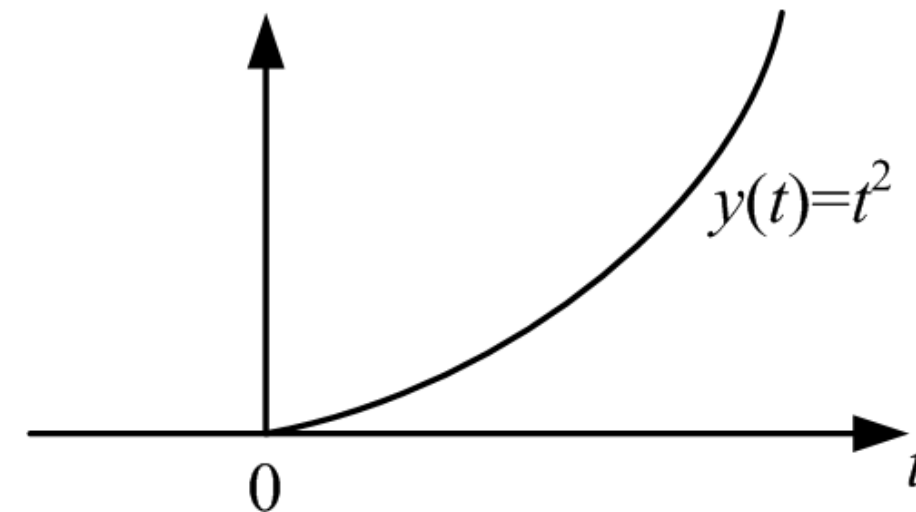
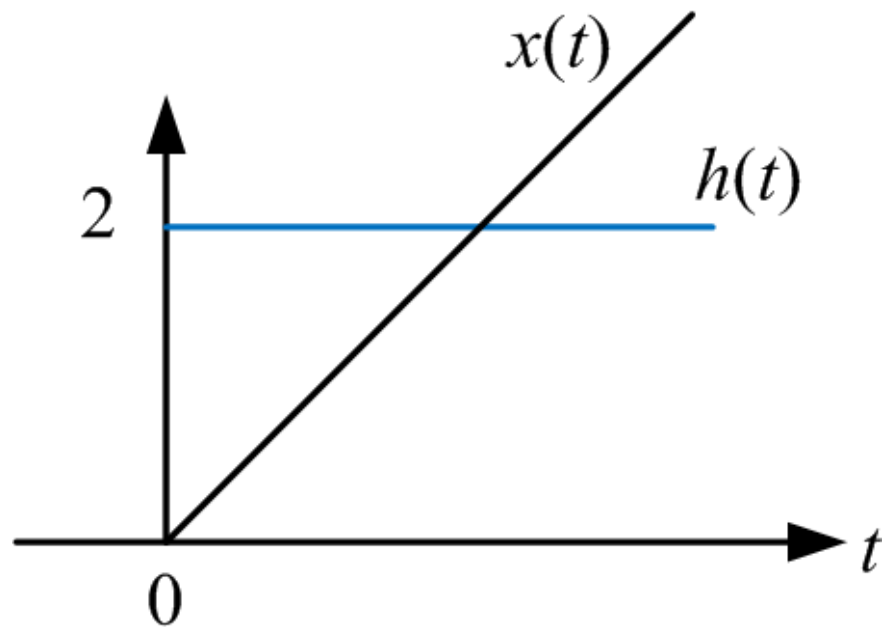
$$h(t) = H\{\delta(t)\}.$$

Уравнение свертки

$$y(t) = H\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Пример вычисления свертки

Пусть $x(t) = u(t) \cdot t$ $h(t) = 2u(t)$.



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 2u(\tau)u(t - \tau) \cdot (t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} 2u(t - \tau) \cdot (t - \tau)d\tau = \int_0^t 2 \cdot (t - \tau)d\tau = 2t\tau - \tau^2 \Big|_0^t \\ &= 2t^2 - t^2 = t^2. \end{aligned}$$

Связь свертки и преобразования Фурье

Свертка сигналов во временной области

Свертка сигналов во временной области соответствует произведению Фурье-образов сигналов в частотной области

$$\mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = H(f)X(f), \quad (1)$$

где $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ и $h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f)$.

Произведение сигналов во временной области

Произведение сигналов во временной области соответствует свертке Фурье-образов сигналов в частотной области

$$\mathcal{F}\{h(t)x(t)\} = H(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f - \nu)X(\nu)d\nu. \quad (2)$$

Эффект конечной длины выборки

Что происходит с частотным представлением сигнала, когда ограничивают его длительность?

$$x_P(t) = x(t) \times \Pi(t/P).$$

Найдем преобразование Фурье

$$\begin{aligned} X_P(f) &= \mathcal{F}\{x(t) \times \Pi(t/P)\} = P \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \operatorname{sinc}(P(f - \nu)) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{\sin(\pi(f - \nu)P)}{\pi(f - \nu)} d\nu. \end{aligned}$$

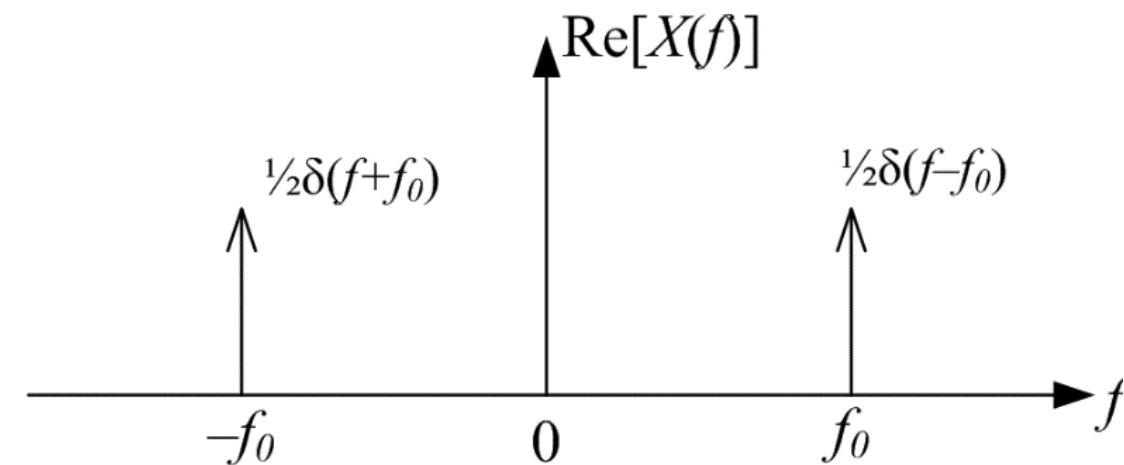
Т.о. переход к конечной длине выборки сигнала приводит к свертке преобразования исходного сигнала с бесконечной длиной с функцией вида $\sin x / x$. В результате возникает эффект «размывания» спектра сигнала.

Эффект конечной длины выборки: пример

Исходный сигнал:

$$x(t) = \cos 2\pi f_0 t$$

$$X(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$



Преобразование Фурье сигнала после ограничения во времени

$$\begin{aligned} X_P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\delta(v - f_0) \\ &+ \delta(v + f_0)) \frac{\sin(\pi(f - v)P)}{\pi(f - v)} dv = \\ &= \frac{\sin(\pi(f - f_0)P)}{2\pi(f - f_0)} + \frac{\sin(\pi(f + f_0)P)}{2\pi(f + f_0)}. \end{aligned}$$

