Теория и применение цифровой обработки сигналов

Свойства преобразования Фурье

к.т.н., доцент Дашкевич Максим Иосифович

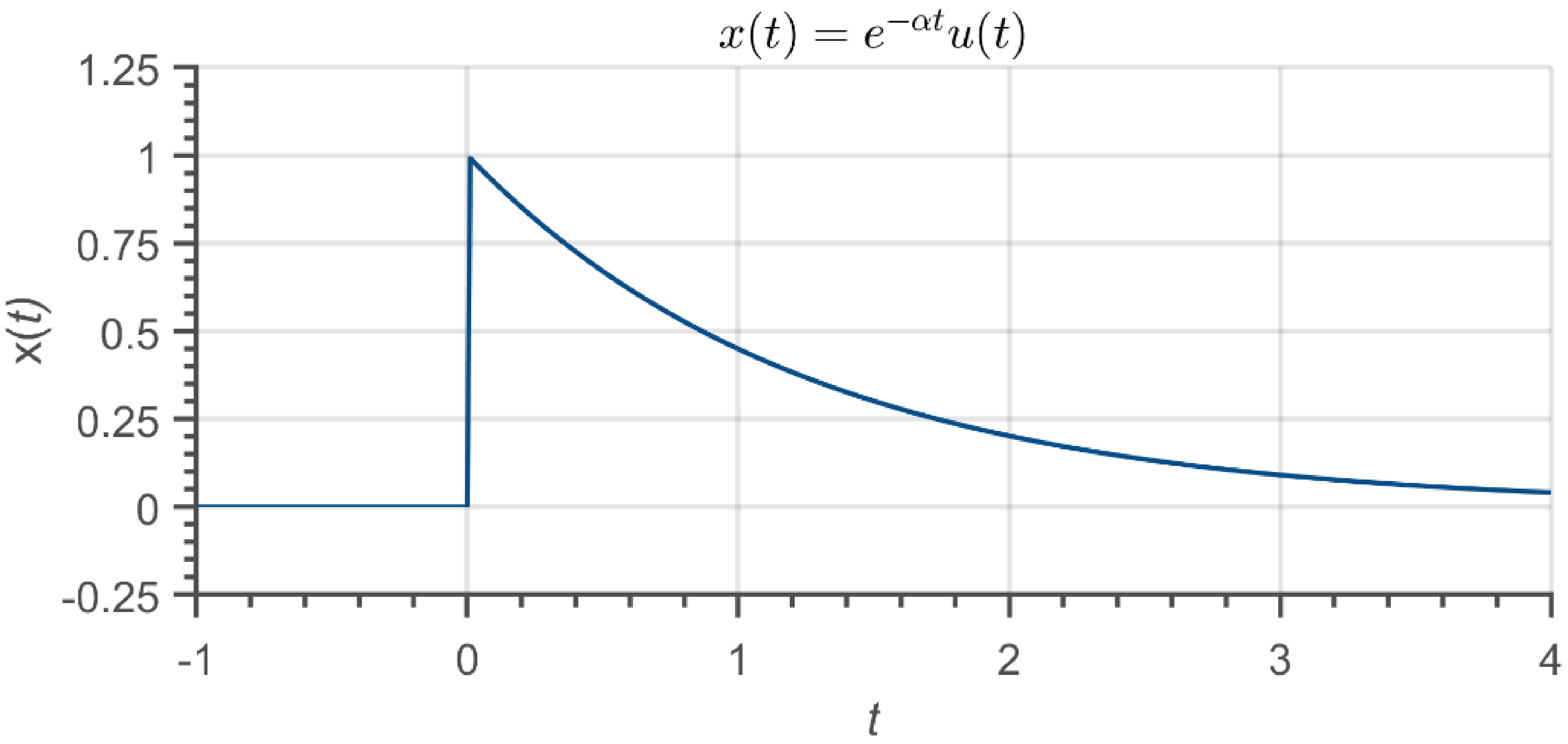
БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Пример преобразования Фурье

Пример 1. Пусть $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$, ПФ $x(t)$ равно:



$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{1}{-(\alpha + j2\pi f)} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha + j2\pi f}.$$

Используя обратное ПФ функцию $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + j2\pi f} e^{j2\pi f t} df. \qquad (1)$$

Выражение (1) можно рассматривать в как представления $x(t)$ в виде «взвешенной» суммы комплексных экспонент.

Графическое представление преобразования Фурье

Преобразование Фурье $X(f)$ – комплекснозначная функция.

Два способа отображения $X(f)$

1) Используя *алгебраическую форму* комплексного числа:

$$X(f) = \underbrace{\mathrm{Re}\{X(f)\}}_{\text{действительная часть}} + j\,\underbrace{\mathrm{Im}\{X(f)\}}_{\text{мнимая часть}}$$

2) Используя *показательную форму* комплексного числа:

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{модуль}}\, e^{j\overbrace{\arg X(f)}^{\text{аргумент}}}$$

Модуль – ***амплитудный спектр***, аргумент – ***фазовый спектр***.

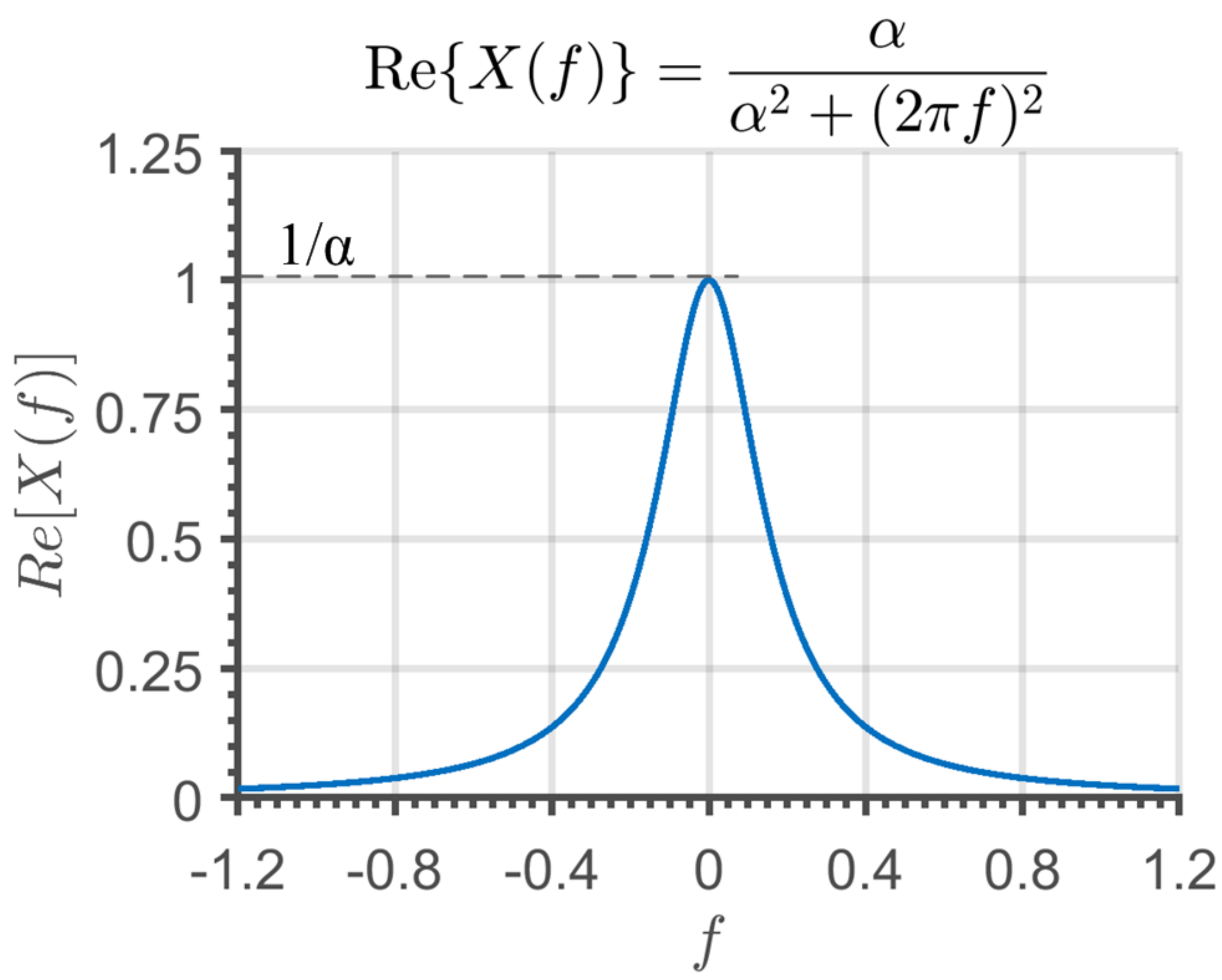
Если исходный сигнал $x(t)$ измеряется в вольтах, то $|X(f)|$ в вольт/Гц (т.е. это *спектральная плотность амплитуды*).

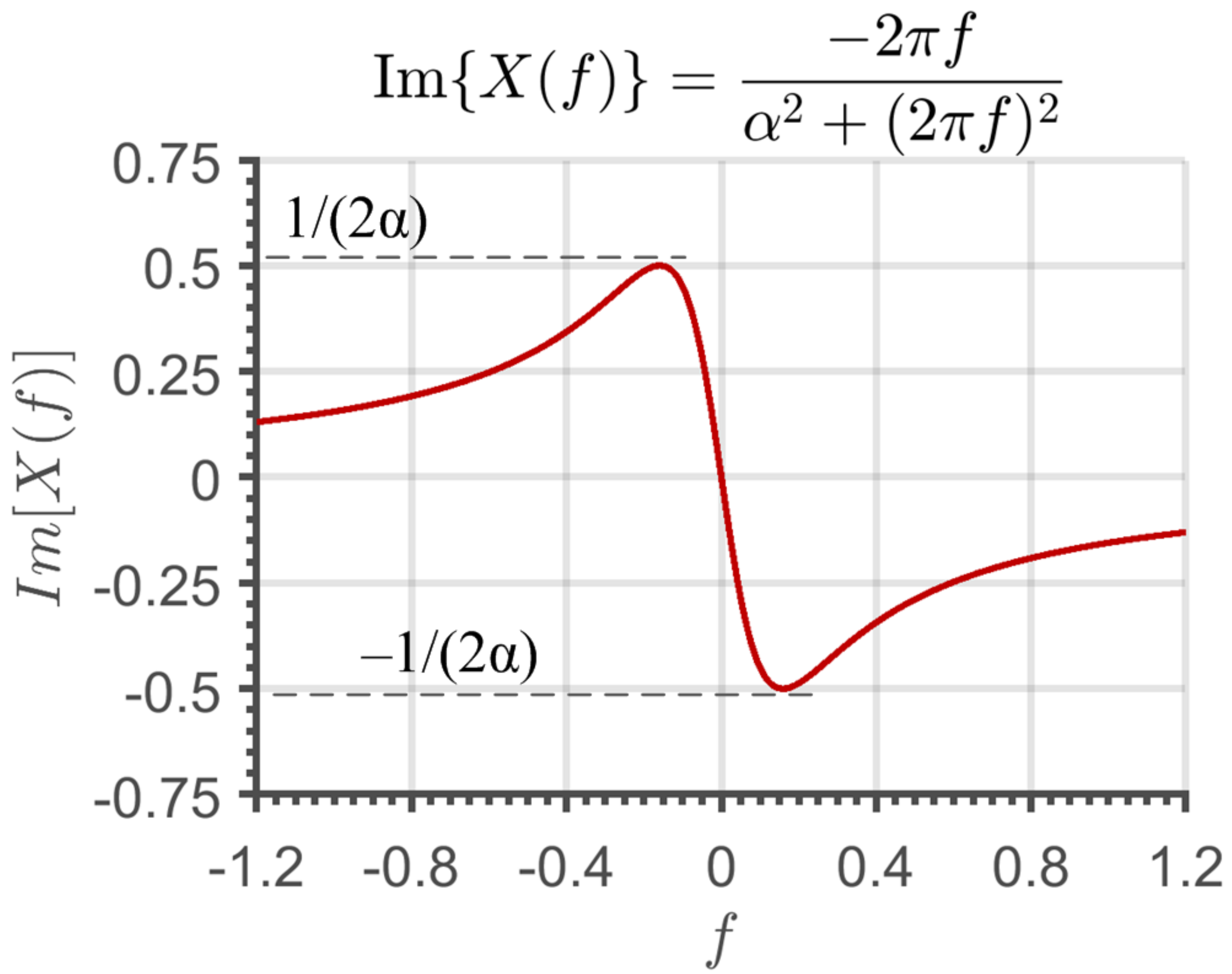
Пример отображения преобразования Фурье

Исходная функция:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Действительная и мнимая часть



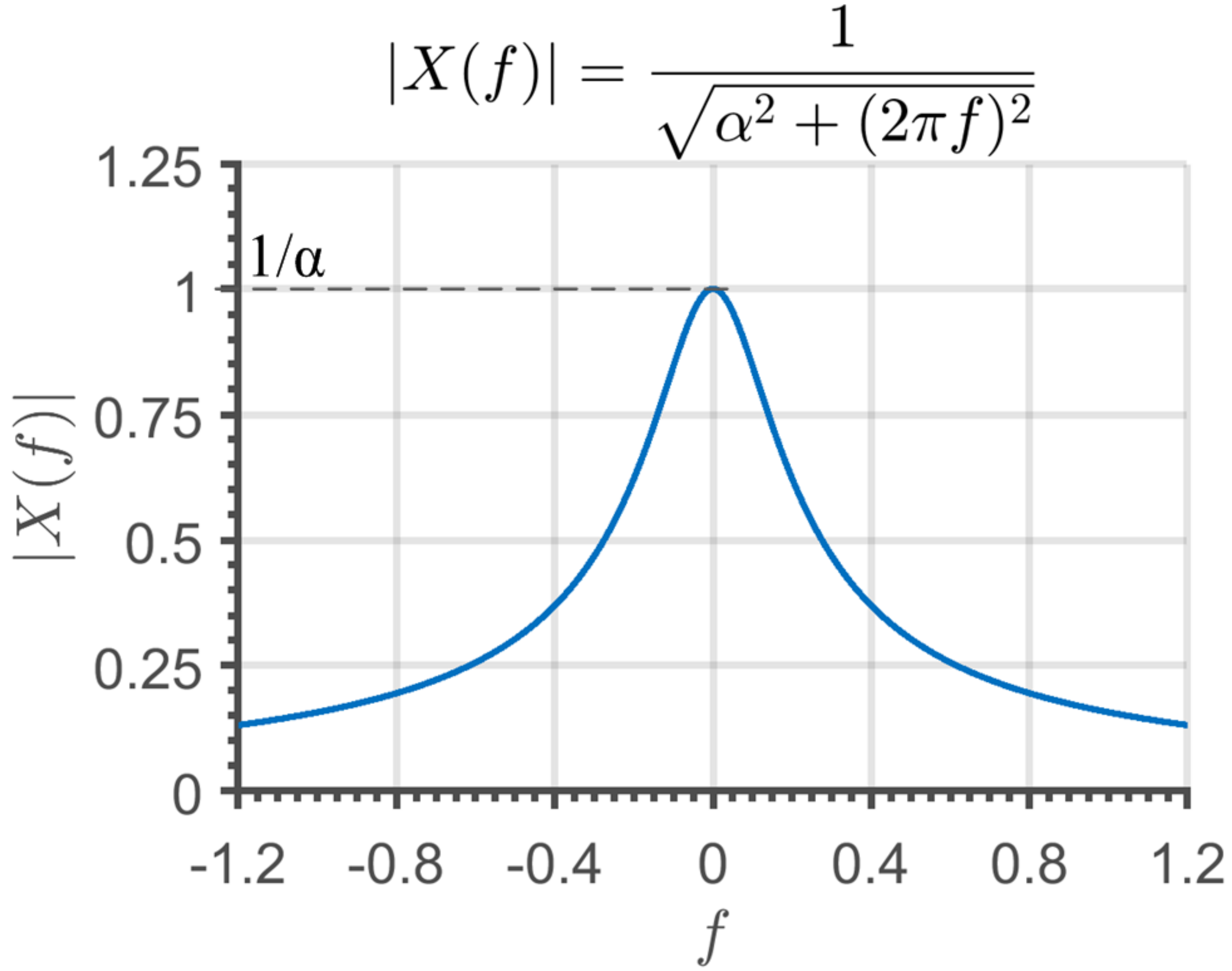


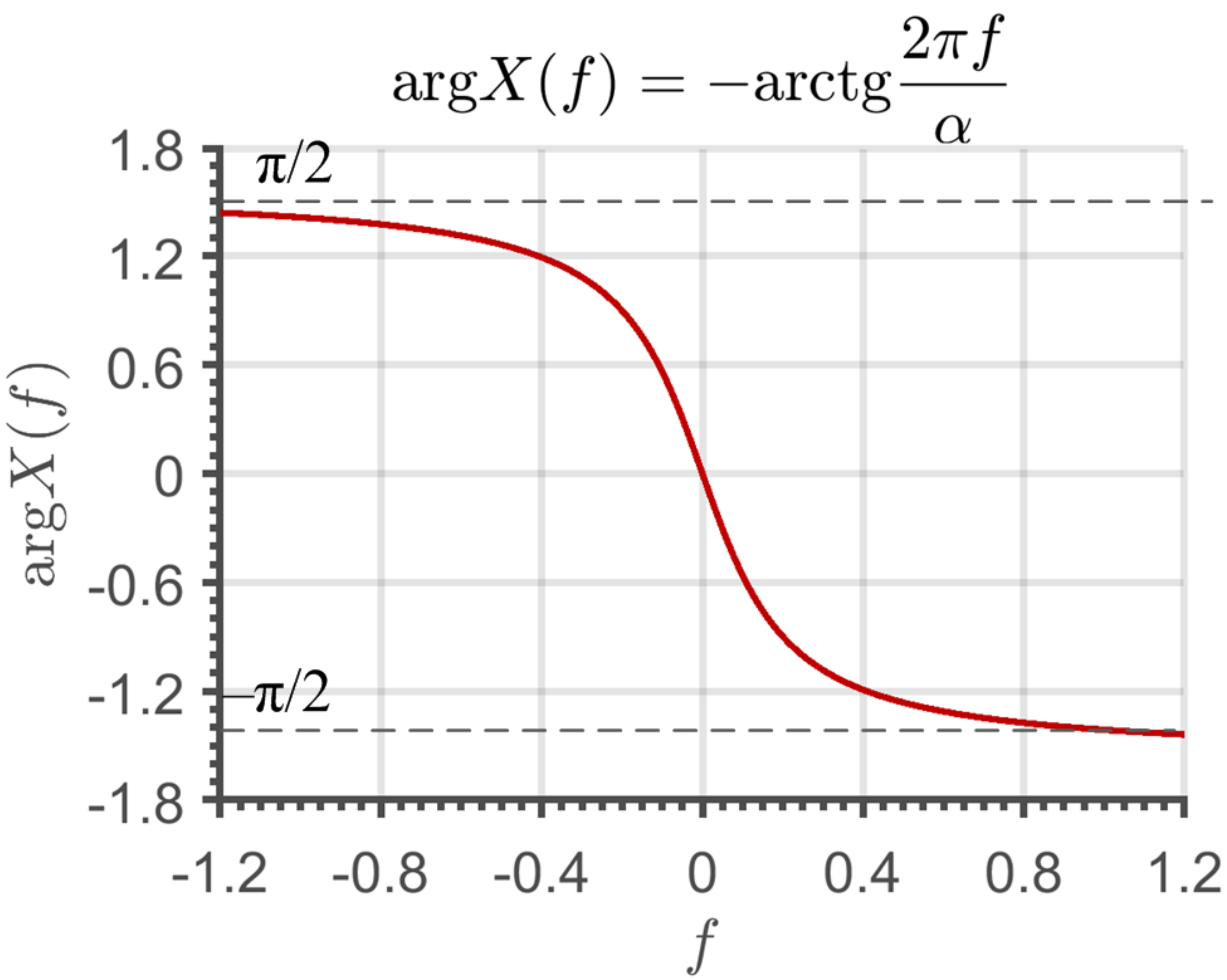
Пример отображения преобразования Фурье

Исходная функция:

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Модуль и аргумент





Энергетический спектр

Если $x(t)$ – падение напряжения на резисторе в 1 Ом, то нормированная энергия, рассеиваемая на резисторе равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt.$$

Используя соотношение, известное, как теорема Парсеваля, можно энергию представить в виде частотного распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \qquad (2)$$

$|X(f)|$ измеряется в В/Гц, значит $|X(f)|^2$ измеряется в В^{2}Гц$^{-2}$. Но, В^2 = Дж/с или Дж·Гц. Значит В^{2}Гц$^{-2}$= Дж·Гц·Гц$^{-2}$= Дж·Гц$^{-1}$. Следовательно, $|X(f)|^2$ измеряется в единицах энергии на Гц$^{-1}$, т.е. $|X(f)|^2$ – ***спектральная плотность энергии***.

Пример вычисления энергетического спектра

Найдем преобразование Фурье и спектральную плотность энергии сигнала:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

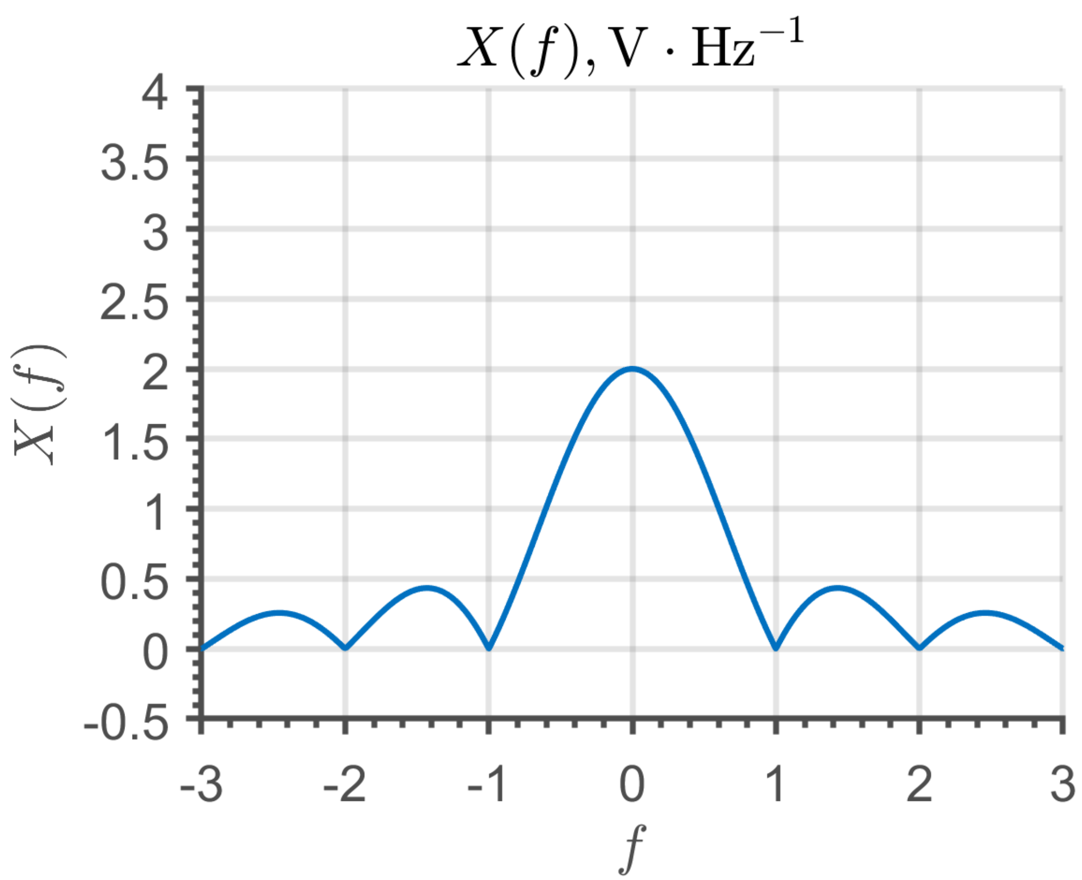
Пример вычисления энергетического спектра

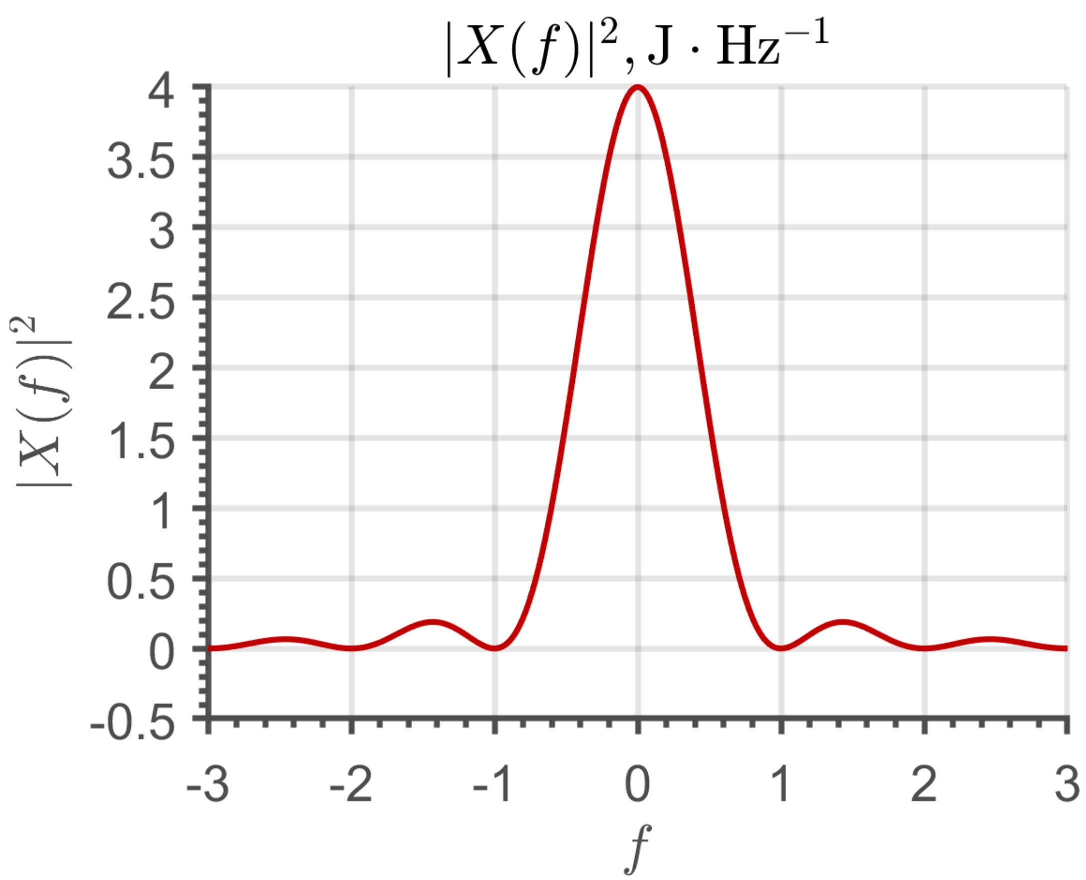
Найдем преобразование Фурье и спектральную плотность энергии сигнала:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 2e^{-2\pi jft} dt = -\frac{2}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = 2\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f}$$

$$= 2\tau \cdot \operatorname{sinc}(f\tau).$$





Свойство сопряженной симметрии

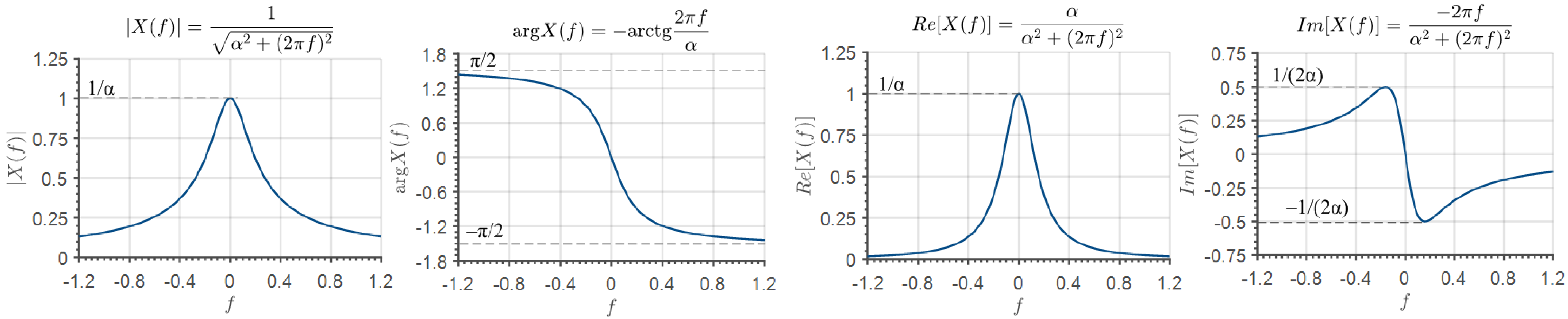
Если $\mathrm{Im}[x(t)] = 0$, т.е. если $x(t)$ – действительная функция, то тогда

$$X(f) = X^*(-f). \tag{3}$$

Это означает, что $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ и $|X(f)|$ являются четными функциями, тогда как $\mathrm{Im}\{X(f)\}$ и $\arg X(f)$ – нечетными:

$$\mathrm{Re}\{X(f)\} = \mathrm{Re}\{X(-f)\} \qquad \mathrm{Im}\{X(f)\} = -\mathrm{Im}\{X(-f)\}. \tag{4}$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \qquad \arg X(f) = -\arg X(-f). \tag{5}$$

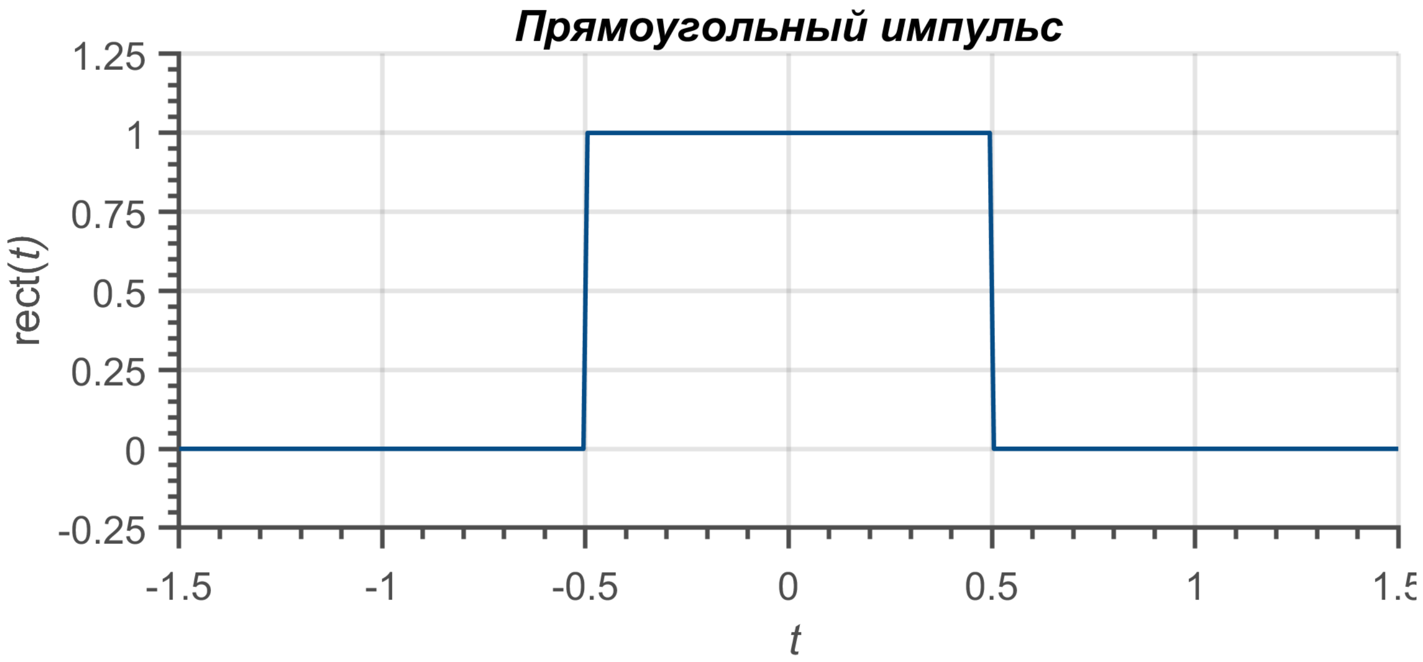


Свойство двойственности времени и частоты

Если $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, то $X(t) = \mathcal{F}\{x(-f)\}$. Пример:

$$\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi jft}dt = -\frac{1}{2\pi jf}e^{-2\pi jft}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \pi f}{\pi f}.$$

Т.е. $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \mathrm{sinc}(f)$, следовательно $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \Pi(-f)$



Временная область

Частотная область

Свойство четной и нечетной симметрии

Временная область	Частотная область
$x(t)$ – действительная четная функция, т.е. $$x(t) = x(-t).$$	$X(f)$ – действительная четная функция $$X(f) = X(-f)$$ $$\mathrm{Im}\{X(f)\} = 0.$$
$x(t)$ – действительная нечетная функция, т.е. $$x(t) = -x(-t).$$	$X(f)$ – мнимая нечетная функция $$X(f) = -X(-f).$$ $$\mathrm{Re}\{X(f)\} = 0.$$