МАТЕМАТИКА

Третий семестр

Лектор: Князева Людмила Павловна

Темы:

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
1	2	3	4
Тема 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра	68	34	34
Тема 2. Введение в математический анализ	26	12	14
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	36	19	17
Тема 4. Комплексные числа. Многочлены	6	3	3
Тема 5. Интегральное исчисление функций одной переменной	38	15	23
Тема 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	23	10	13
Тема 7. Интегральное исчисление функций многих переменных	30	13	17
Тема 8. Дифференциальные уравнения и системы	27	12	15

Темы:

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
Тема 9. Числовые и функциональные ряды	32	12	22
Тема 10. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	13	6	7
Тема 11. Функции комплексной переменной	31	11	20
Тема 12. Операционное исчисление	10	3	5

Числовые и функциональные ряды

- 9.1 Числовой ряд и его сумма. Действия над рядами. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимое условие сходимости ряда.
- 9.2 Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный признак, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость.
- 9.3 Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о непрерывности суммы, о почленном дифференцировании и почленном интегрировании.

Числовые и функциональные ряды

- 9.4 Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.
- 9.5 Ряды Тейлора. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора. Разложение основных функций в ряд Маклорена. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определенных интегралов.

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Основные определения и понятия числовых рядов.

Тема 9

Числовые ряды

Упрощенно : **ряд – это «бесконечная» сумма.**

Пусть дана числовая последовательность:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n \dots\}.$$

Определение **Числовым рядом** называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Числовые ряды

В обозначении ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ через a_k обозначается *k*-ое слагаемое, так называемый **общий член ряда**.

В качестве нижнего предела суммирования для рядов будут применяться в основном **единица** и реже **ноль**, а в качестве верхнего предела в основном бесконечность, ***k*** играет роль индекса суммирования. Если вместо ***k*** подставить любую другую букву это не изменит значения суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Числовые ряды

Суммирование бесконечного числового ряда является одной из классических задач математического анализа. Так, задача суммирования ряда обратных квадратов

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots$$

была в начале восемнадцатаго столетия одной из самых известных проблем, которую пытались решить многие выдающиеся математики. В 1828 году она была решена великим математиком Леонардом Эйлером, который доказал, что сумма ряда обратных квадратов равна $\frac{\pi^2}{6}$.

Числовые ряды

Философ Гвидо Гранди в 1703 привлек внимание публики к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+1-1....$$

Он утверждал, что этот ряд символизирует создание вселенной из ничего. А именно, расстановка в нем скобок одним способом дает **Ничто** (то есть 0), другим способом дает 1:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots=1-0-0-0\cdots=1.$$

Числовые ряды

Приведем примеры рядов, известные из элементарной математики.

1. Бесконечная периодическая дробь $0,(3)$ – это ряд вида

$$0,(3) = 0,333333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n}$$

Бесконечная периодическая дробь $0,(3)$, как известно, может быть записана в виде рациональной дроби:

$$0,(3) = 0,333333... = \frac{1}{3}$$

Таким образом, это «бесконечная» сумма может быть вычислена и имеет конечное значение.

Числовые ряды

2. Ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n$$

для произвольных, отличных от нуля чисел **b** и **q**.

Числовые ряды

3. Ряд, составленный из членов бесконечной арифметической прогрессии:

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+nd)+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a+nd)=\sum_{n=1}^{N}(a+(n-1)d)+\sum_{n=N+1}^{\infty}(a+(n-1)d)=Na+\ldots\ldots$$

для произвольных, отличных от нуля чисел ***a*** и ***d*.**

(Его сумма неограниченно возрастает!)

Можно попытаться находить суммы бесконечных рядов, не давая определения этой суммы, - основываясь на предположении, что на бесконечные суммы **распространяются** основные арифметические законы такие как ассоциативность сложения и дистрибутивность умножения относительно сложения.

Рассмотрим числовой ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots.=$$
$$=1+q(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots)$$

Чтобы найти сумму ряда ***x***, построим уравнение, которому она удовлетворяет:

$$x=1+qx$$

Это уравнение $x = 1 + qx$

имеет простое решение:

$$x = \frac{1}{1-q}$$

и дает нам формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots. = \frac{1}{1-q}.$$

Бесконечность является главным действующим лицом математического анализа.

Характеристическим свойством бесконечного является то, что оно может быть <u>равно своей части</u>.

Например, рассмотрим такое бесконечное выражение (цепную дробь):

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+.....}}}$$

Мы видим, что знаменатель дроби в точности равен всему выражению, поэтому, если **значение всего выражения** обозначить через ***x***, то мы получаем для нахождения значения выражения

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots..}}}$$

следующее уравнение:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Это уравнение

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

имеет два решения $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, лишь одно из которых положительно.

Поэтому естественно предположить, что значением бесконечного выражения является именно

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots\dots}}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad .$$

Числовые ряды

Для определения понятия **суммы ряда** вместе с последовательностью $\{a_n\}$ будем рассматривать также последовательность $\{S_n\}$, которая строится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \\
&S_2 = a_1 + a_2, \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\
&\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Эта последовательность называется ***последовательностью частичных сумм ряда***

Числовые ряды

Как и всякая другая числовая последовательность, последовательность $\{S_n\}$ может:

- иметь конечный предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
- быть бесконечно большой, т. е. $\lim S_n = \infty$;
- не иметь никакого предела – ни конечного, ни бесконечного.

Если предел последовательности **<u>существует и</u>** **<u>конечен</u>**, то он называется ***суммой ряда***:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Числовые ряды

- В этом случае ряд называется ***сходящимся.***
- В оставшихся двух ситуациях - когда предел бесконечен или вообще не существует, - ряд называется ***расходящимся***.
- Понятие суммы для расходящегося ряда не определяется.

Числовые ряды

- <u>Пример 1.</u>
- $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-..$$
- Составим для него последовательность частичных сумм:

$$S_1=1,$$
$$S_2=1-1=0,$$
$$S_3=1-1+1=1,$$
$$\ldots$$
$$S_n=\begin{cases}1, \textit{ если} \quad n-\textit{нечетное число},\\ 0, \textit{ если} \quad n-\textit{четное число}.\end{cases}$$

- $\{S_n\}=\{1,0,1,0,\ldots\}$ - колеблющаяся последовательность и не имеет предела. Значит, исходный числовой ряд является **расходящимся.**

Числовые ряды

- 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots .$$

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3,$$

$$\ldots$$

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \infty$$

- Значит, последовательность частичных сумм – бесконечно большая последовательность, то есть ряд расходится.

Числовые ряды

3. Геометрическая прогрессия $\{a_n\} = \{bq^{n-1}\}$, где $b \neq 0$ и $q \neq 0$

Если ***q=1***, то частичная сумма равна ***nb***, т.е. неограничена и ряд расходится.

Если ***q=-1***, то частичная сумма равна 0 или ***b***, т.е. предел не существует и ряд расходится.

Если $|q| \neq 1$, тогда

$$S_n = b + b\,q + \ldots + b\,q^{n-1} = \frac{b\cdot(1-q^n)}{1-q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } |q|>1 \Rightarrow \text{ряд расходится}, \\ \dfrac{b}{1-q}, & \text{если } |q|<1 \Rightarrow \text{ряд сходится}. \end{cases}$$

Числовые ряды

- Зададимся вопросом, можно ли, **не составляя** последовательности частичных сумм , исследовать сходимость числового ряда ?
- Это можно сделать, используя различные признаки сходимости и сравнения рядов.
- Главный их них – называется ***необходимым условием сходимости:***
- $$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Числовые ряды

- Если для числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или такого предела вообще не существует, то ряд расходится.
- В такой формулировке ***необходимое условие сходимости ряда***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- равносильно ***достаточному условию расходимости ряда.***

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- *1. Суммой (разностью) рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.
- Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A и B
- соответственно, то сумма и разность этих рядов тоже сходится к суммам $A \pm B$ соответственно.
- 2. Ряд $C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по определению совпадает с рядом
- $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$,т.е. при умножении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу,
- не равную нулю, сходимость (расходимость) не нарушается.

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- 3. Если в ряде отбросить конечное число членов (добавить конечное число членов), то ни сходимость, ни расходимость ряда при этом не нарушится.
- 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме A , то члены
- этого ряда можно произвольно сгруппировать, не
- меняя порядка следования. При этом полученный
- в результате ряд сходится к той же сумме.