

Формы записи

тригонометрического ряда Фурье

1. Ряд Фурье как сумма гармоник.
2. Комплексная форма ряда Фурье.

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

Тригонометрические ряды Фурье

Выражение

$$a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

называется **гармоникой n -го порядка**.

Обозначим $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$, тогда ряд можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

Тригонометрические ряды Фурье

где :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx$$

Обозначим

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n, \quad \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n, \quad -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \varphi_n$$

Тригонометрические ряды Фурье

Тогда на основании простейших тригонометрических преобразований можно записать **n -ю гармонику** в виде:

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x =$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega x + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega x \right) =$$

$$= A_n (\cos \varphi_n \cos n\omega x - \sin \varphi_n \sin n\omega x) =$$

$$= A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье можно записать в эквивалентной форме – в виде суммы простых периодических функций-гармоник:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x + \varphi_n)$$

или же:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x + \tilde{\varphi}_n)$$

где A_n - амплитуда, φ_n - начальная фаза, $\omega_n = n\omega$ - частота n -ой гармоники.

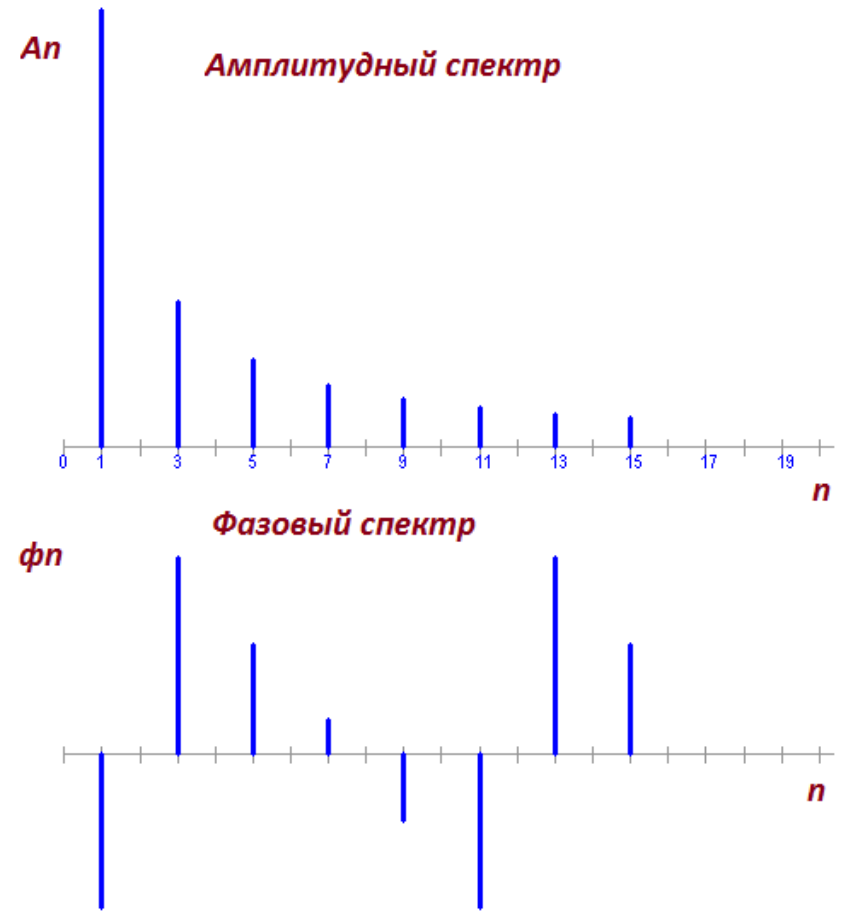
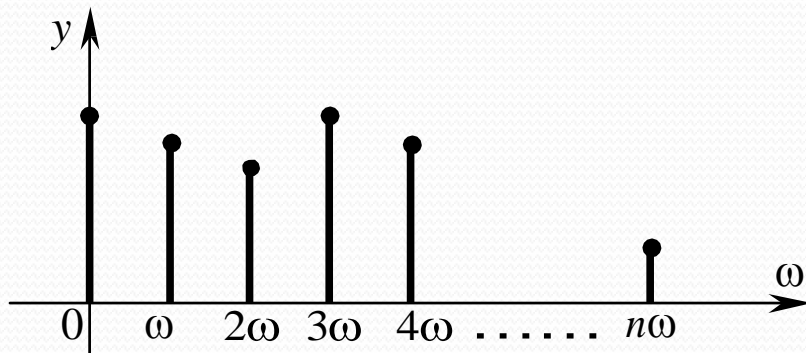
Амплитудный и фазовый спектры

Совокупность величин A_n называется **амплитудным спектром**, а совокупность начальных фаз φ_n - **фазовым спектром**.

Спектр амплитуд периодической функции можно изобразить на координатной плоскости, если по оси OY откладывать амплитуды $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, по оси OX – частоты $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$. При этом считаем, что постоянной составляющей периодического колебания A_0 соответствует частота $\omega = 0$.

Амплитудный и фазовый спектры

На плоскости получают совокупность дискретных точек, что неудобно, поэтому амплитуды отдельных гармоник изображают вертикальными отрезками длины A_n .



Амплитудный и фазовый спектры

$$u(t) = 2 + 10 \sin(\omega t + 40^\circ) + 5 \sin(3\omega t - 60^\circ) + 3 \sin(5\omega t + 80^\circ)$$



Тригонометрические ряды Фурье

Амплитудный спектр несет информацию об энергии сигнала и показывает как она распределена по частотам. Так как частоты находятся в кратном отношении, то спектр состоит из равноотстоящих спектральных линий, поэтому спектр периодической функции называют еще *линейчатым спектром*.

Нахождение спектра периодического процесса (т.е. нахождение коэффициентов в ряде Фурье) называют **гармоническим анализом**.

Тригонометрические ряды Фурье

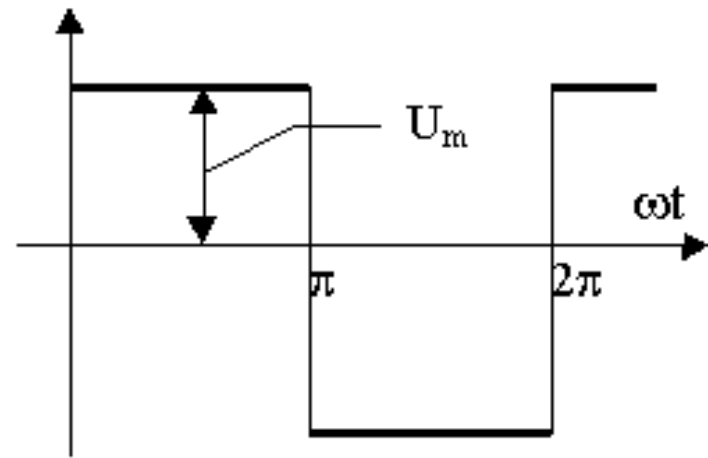
Ранее полученный ряд Фурье для прямоугольного сигнала имеет вид:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{2k-1} x}{2k-1} = \frac{4 \cdot \sin \omega x}{\pi} + \frac{4 \cdot \sin 3\omega x}{\pi \cdot 3} + \frac{4 \cdot \sin 5\omega x}{\pi \cdot 5} + \dots$$

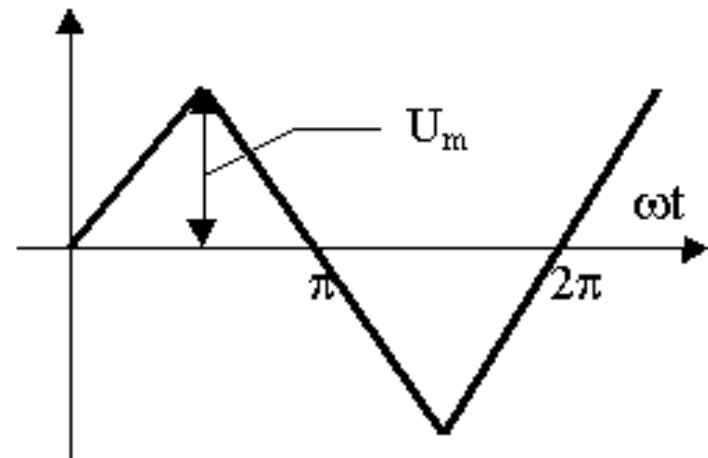
Для треугольного -

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \omega_{2k-1} x}{(2k-1)^2} = \frac{8 \cdot \sin \omega x}{\pi} - \frac{8 \cdot \sin 3\omega x}{\pi \cdot 3^2} + \frac{8 \cdot \sin 5\omega x}{\pi \cdot 5^2} - \dots$$

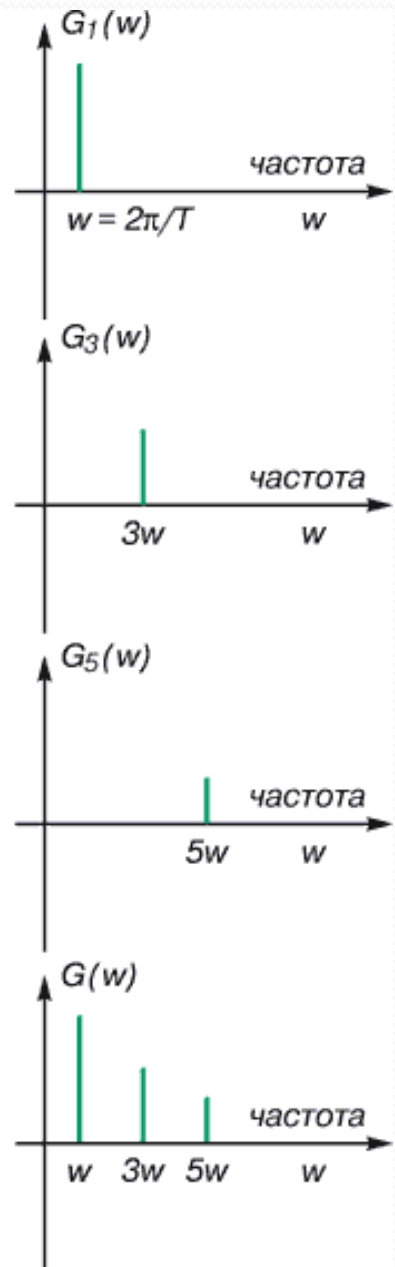
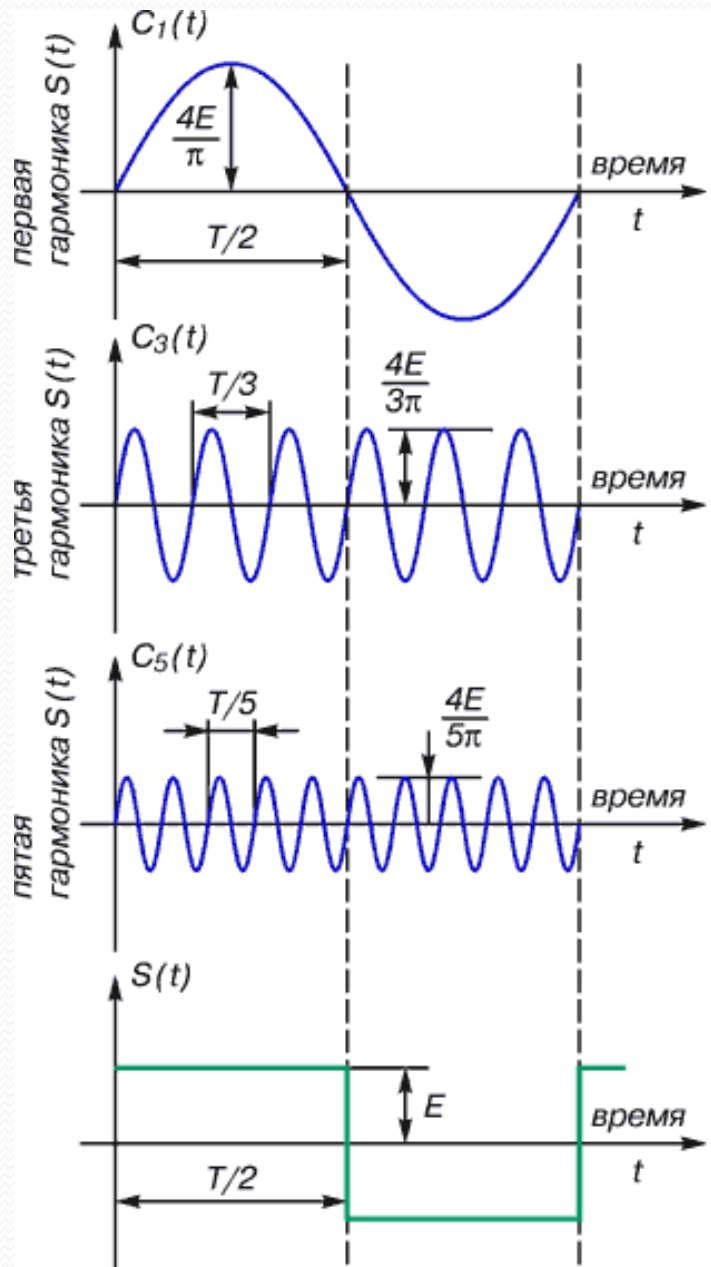
Для этих сигналов все фазы равны нулю.



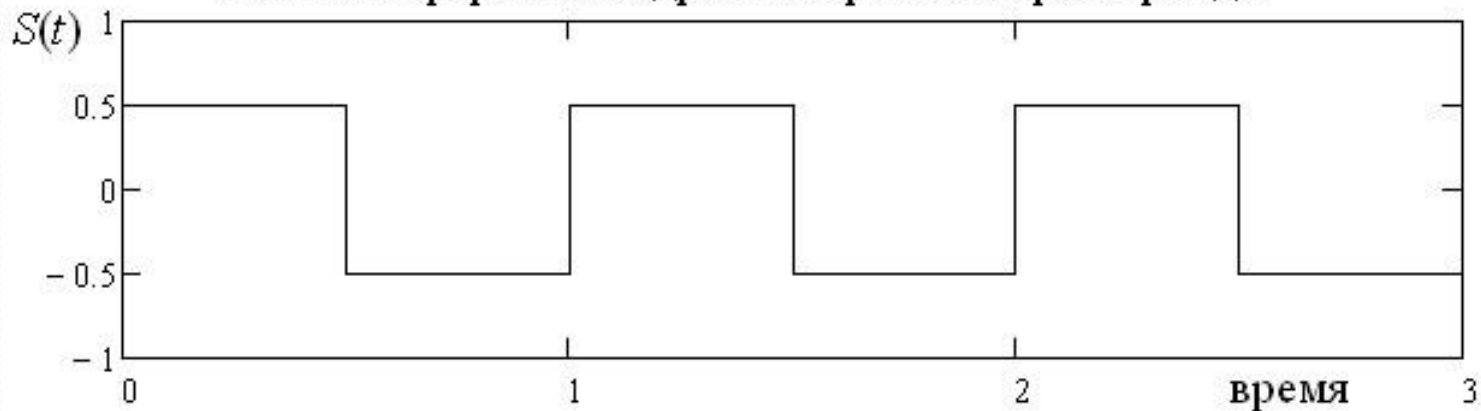
$$f(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$$



$$f(\omega t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$$



Сигнал в форме меандра. Изображены три периода.



Амплитуды и фазы гармоник

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) =$$

гармоника ряда Фурье

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right) = \boxed{A_n} \cos(n\omega t + \boxed{\varphi_n})$$

амплитуда и фаза
гармоники

Связь с коэффициентами Фурье

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{A_n}, \quad \cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{A_n} \end{cases}$$

Эквивалентная форма ряда Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Комплексная форма ряда Фурье.

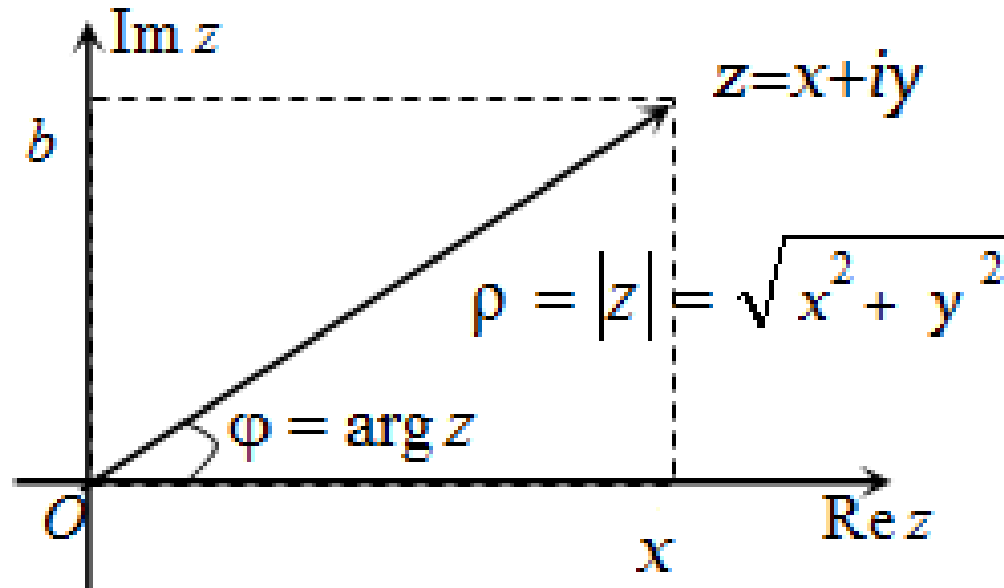
Базовые сведения из теории комплексных чисел:

Комплексным числом z будем называть упорядоченную пару действительных чисел x, y , записанную в форме $z = x + i \cdot y$, где i - "мнимая единица", для которой при вычислениях полагаем $i^2 = -1$.

Первая компонента комплексного числа z , действительное число x , называется действительной частью числа z , это обозначается так: $x = \operatorname{Re}(z)$;
вторая компонента, действительное число y , называется мнимой частью числа z : $y = \operatorname{Im}(z)$.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Изобразим число z как точку на плоскости \mathbb{C} :



Действительное число $|z|$ называется модулем комплексного числа z , угол φ из промежутка $[-\pi; \pi]$ называется главным аргументом комплексного числа z и обозначается $\arg z$: $-\pi < \arg z \leq \pi$

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Если теперь перейти к полярным координатам (ρ, φ) , то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

поэтому $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Запись комплексного числа в виде $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π) :

$$\mathbf{Arg z = arg z + 2\pi k.}$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Получаем формулу Эйлера.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Теперь любое комплексное число z можно представить как

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \operatorname{Arg} z} = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Эта форма записи называется **показательная форма комплексного числа**.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Используем формулу Эйлера для вывода комплексной форма ряда Фурье:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Складывая и вычитая эти формулы, получим выражения для синусов и косинусов:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Комплексная форма ряда Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Перепишем данный ряд в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\frac{i\pi x}{l}} + e^{-\frac{i\pi x}{l}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{i\pi x}{l}} - e^{-\frac{i\pi x}{l}}}{2i} \right) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{i\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-\frac{i\pi x}{l}} \right)$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) = \frac{a_n - ib_n}{2},$$

$$c_{-n} = \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{i\pi n x}{l}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Комплексная форма ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n x}, \text{ где } C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

$e^{\frac{i\pi n x}{l}} = e^{i\omega_n x}$ - комплексная гармоника, $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ - её частота,

По комплексной форме ряда Фурье можно записать её ряд Фурье в тригонометрической форме.

Связь между коэффициентами рядов выражается формулами:

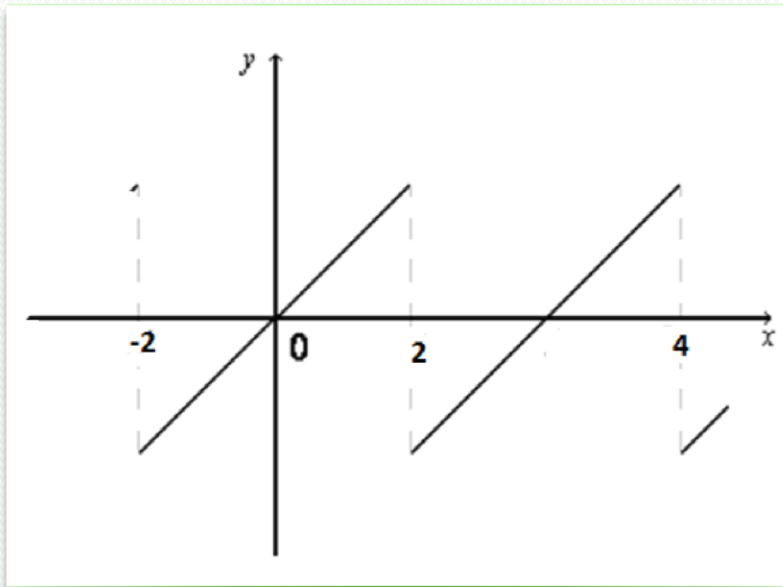
$$a_n = \operatorname{Re} 2C_n; \quad b_n = -\operatorname{Im} 2C_n; \quad \frac{a_0}{2} = C_0.$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Пример. Записать ряд Фурье в комплексной форме для функции

$$y = x \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi.$$

Ранее получен ряд для:



$$x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Найдем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi e^{-in\pi} - (-\pi) e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{in(-in)} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi i (e^{-in\pi} + e^{in\pi})}{n} - \frac{(e^{in\pi} - e^{-in\pi})}{n^2} \right] = \\ &= \frac{i \cos \pi n}{n} - \frac{i \sin \pi n}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n i}{n} \end{aligned}$$

Таким образом $x = \sum_{-\infty}^{\infty} i(-1)^n \frac{e^{inx}}{n}$.

Комплексная форма ряда Фурье.

Найдем значения для действительных коэффициентов ряда Фурье

$$a_n = \operatorname{Re} 2c_n = 0, \quad b_n = -\operatorname{Im} 2c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Тогда ряд будет иметь вид

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \text{ что совпадает с}$$

Полученным ранее результатом.

$$x = 2 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$