РЯДЫ ТЕЙЛОРА. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.

Тема 9

Степенные ряды

Определение. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$+ c_n(x-x_0)^n + \ldots$$

при этом числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in R$ называются ***коэффициентами ряда***, а точка x_0 – ***центром разложения ряда.***

Степенные ряды

Общий член степенного ряда является простейшим многочленом:

$$u_n(x) = c_n (x - x_0)^n$$

Частичная сумма степенного ряда является многочленом степени ***n*** :

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

Степенные ряды

Заменив $(x - x_0)$ на X всегда можно получить ряд ***степенной ряд*** вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 x^2 + \ldots + \tilde{c}_n x^n + \ldots$$

$$\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n, \ldots \in R$$

Степенной ряд всегда сходится по крайней мере в одной точке: $x = x_0$ (либо $x = 0$ для ряда второго вида).

Степенные ряды. Область сходимости.

Область сходимости степенных рядов имеет очень простую структуру (согласно теореме Абеля):

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ либо сходится на всей числовой прямой, либо существует такое число $R \geq 0$, что в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится, а вне интервала – расходится.

Степенные ряды. Область сходимости.

Число ***R*** в этом случае называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ - ***интервалом сходимости*** этого ряда.

При $x = x_0 \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. В этих точках получающиеся числовые ряды исследуются индивидуально.

Разложение функции в степенной ряд.

Пусть на интервале X функция $f(x)$ является суммой некоторого степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$$

Тогда говорят, что на **интервале X функция** $f(x)$ **разлагается в степенной ряд с центром в точке** x_0 **(или по степеням** $(x - x_0)$ **).**

Вопрос о разложении функции в степенной ряд является одним из важных прикладных вопросов теории степенных рядов.

Необходимые условия разложимости функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в некоторой окрестности X точки x_0, то его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Т.е. $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема в точке x_0.

Ряд Тейлора

Определение. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ с коэффициентами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 независимо от того, сходится ли он вообще или сходится ли он к данной функции $f(x)$. Коэффициенты c_n называются коэффициентами Тейлора.

Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка n, которые равномерно ограничены в этой окрестности, т.е. существует такое число $M > 0$, при котором $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ для любого натурального n в любой точке $x \in X$. Тогда в этой окрестности функция разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Единственность разложения функции в ряд Тейлора.

Если функция $f(x)$ в разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Ряд Маклорена

Определение. Если $x_0 = 0$ и коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

называется **рядом Маклорена** для функции $f(x)$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

2. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

4. $$arctg\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1;1]$$

а) можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию ***n+1*** раз;

$$arctg(0) = 0$$

$$\left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad \left(arctg(x)\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{1+0^2} = 1;$$

$$\left(arctg(x)\right)'' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}; \quad \left(arctg(x)\right)''\Big|_{x=0} = 0;$$

$$\left(arctg(x)\right)''' = \frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}; \quad \left(arctg(x)\right)'''\Big|_{x=0} = -2;$$

$$arctg(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

б) можно использовать свойство суммы степенного ряда:

$$\left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

$$arctg(x) = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

5. $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad x\in(-1;1]$$

6. $$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$x\in(-1;1)$$

Разложение в ряд Маклорена

Пример 1. Зная разложение в степенной ряд элементарных функций, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1. $f(x) = x \sin x$

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$$

2. $f(x) = \cos x^3$

$$\cos x^3 = 1 - \frac{\left(x^3\right)^2}{2!} + \frac{\left(x^3\right)^4}{4!} - \frac{\left(x^3\right)^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена

3. $f(x) = \sin^2 x$

а) можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию ***n+1*** раз;

б) можно использовать равенство

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

затем ряд для $\cos 2x$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена

в) поскольку *два степенных ряда можно почленно складывать и умножать* (по правилу умножения многочленов) и при этом интервалом сходимости нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда, то, учитывая это,

$$f(x)=\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x=(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)((x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)=$$

$$=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Приложения степенных рядов

Степенные ряды используются для:

1) приближённого вычисления чисел, значений функций и определённых интегралов;

2) вычисления пределов;

3) представления неэлементарных функций (например, “неберущихся интегралов”);

4) приближённого решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений.

Приложения степенных рядов

Пример 2.

Вычислить приближённо число ***e*** с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

Используем ряд Маклорена для e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

Откуда при **x=1** получаем $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + r_k$$.

Найдём такой номер ***k***, что $r_k < 10^{-3}$

Приложения степенных рядов

Для этого оценим остаток ряда:

$$r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \ldots =$$

$$\frac{1}{(k+1)!}(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{\underbrace{(k+2)(k+3)}_{>(k+2)^2}} + \ldots$$

Искомый номер находим, решая неравенство:

$$r_k < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+1} < 10^{-3}$$

Приложения степенных рядов

Решаем неравенство:

$$r_k < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!(k+1)}{k+2} > 1000$$

при ***k*=6**

$$\frac{7!\cdot 7}{8} = \frac{720 \cdot 49}{8} > 1000$$

$$e \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Приложения степенных рядов

Пример 3.

В прямоугольном треугольнике катеты равны 1 и 5. Определить острый угол треугольника, лежащий против меньшего катета с точностью до 0.001.

Приложения степенных рядов

Тангенс угла треугольника, лежащего против меньшего катета длиною 1, равен $tg\alpha = \frac{1}{5}$, тогда острый угол треугольника можно определить как $\alpha = arctg\frac{1}{5}$.

Для вычисления его значения с точностью до 0.001 воспользуемся разложением

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Получим:

$$\alpha = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \ldots \approx 0.2 - 0.0027 + \ldots \approx 0.197.$$

Приложения степенных рядов

Пример 4.

Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ с точностью до 0.0001.

Заменив в подынтегральном выражении **cos x** его рядом, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx = \left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!3}+\frac{x^5}{6!5}-\ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx 0/25-0.0017=0.2483$$

Приложения степенных рядов

Пример 5.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Заменим e^x и $\sin x$ их разложениями:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x^3}{3!}+\dfrac{2x^4}{4!}\ldots}{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\ldots}=2$$

Приложения степенных рядов

Пример 6. Представить в виде суммы ряда

неэлементарную функцию $$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Заменим функцию $\sin x$ рядом:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ t \in (-\infty; +\infty)$$

тогда

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Приложения степенных рядов

$$Si(x)=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\Big)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_0^x(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}dt}{(2n+1)!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt\Big)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}\Big|_0^x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},x\in(-\infty;+\infty)$$

Приложения степенных рядов

Многие уравнения и системы уравнений с двумя и более переменными, некоторые из которых надо найти через остальные, можно решать с помощью степенных рядов.

Для этого **заданные функции, с помощью которых записано уравнение надо разложить в степенные ряды** и искать неизвестные в виде рядов. После этого для нахождения неизвестных коэффициентов рядов будут получены новые уравнения.

Полученные таким образом решения пригодны для вычислений и для других операций над ними.

Приложения степенных рядов

Пример 7. Решить уравнение Кеплера:

$$y = a + x\sin y$$

Считая $y = y(x)$ неизвестной функцией от $\boldsymbol{x}$, будем искать ее в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Разложив $\sin y$ в ряд Тейлора по степеням y и подставив вместо y ряд, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \frac{1}{3!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)^3 + \ldots\right)$$

Приложения степенных рядов

или

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = a + x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\right) -$$
$$-\frac{x}{3!}\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\right)^3 + \frac{x}{5!}\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\right)^5 ..$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ***x*** слева и справа, найдем последовательно неизвестные C_n

$$c_0 = a,$$
$$c_1 = c_0 - \frac{c_0{}^3}{3!} + \frac{c_0{}^5}{5!} - \ldots = \sin c_0 = \sin a,$$
$$c_2 = c_1 - \frac{3c_0{}^2 c_1}{3!} + \frac{5c_0{}^4 c_1}{5!} - \ldots$$

Приложения степенных рядов

$$c_2 = c_1 - \frac{3{c_0}^2 c_1}{3!} + \frac{5{c_0}^4 c_1}{5!} - \ldots =$$

$$= c_1\left(1 - \frac{{c_0}^2}{2!} + \frac{{c_0}^4}{4!} - \ldots\right) = c_1 \cdot \cos a = \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a,$$

.....

Искомая функция имеет вид:

$$y = a + (\sin a)x + \frac{1}{2}(\sin 2a)x^2 + \frac{1}{2}(2\sin a - 3\sin^2 a)x^3 + \ldots$$

Доказано, что это разложение верно при $|x| < 0.6627\ldots$

Приложения степенных рядов

Пример 8. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' + xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи $y = y(x)$ может быть найдено в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Приложения степенных рядов

Из начальных условий задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

следует, что поскольку $y(0) = 1$, то

$$1 = c_0 + c_1 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + \ldots \Rightarrow \qquad c_0 = 1$$

и, т.к. $y'(0) = 0$, то

$$0 = c_1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + \ldots \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Приложения степенных рядов

Тогда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n$$

$$y'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot nx^{n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot n(n-1)x^{n-2}$$

Подставим выражения для и в исходное уравнение:

$$y''+xy=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot n(n-1)x^{n-2}+x\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot x^n\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot n(n-1)x^{n-2}+x+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cdot x^{n+1}=0$$

Приложения степенных рядов

Определим коэффициенты полученного уравнения,

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)x^{n-2} + x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1} = 0$$

приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях:

$$x^0 \quad : \quad 2 \cdot 1 \cdot c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$x^1 \quad : \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 1 = 0 \Rightarrow \quad c_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!},$$

$$x^2 \quad : \quad 4 \cdot 3 \cdot c_4 = 0 \Rightarrow \quad c_4 = 0,$$

Приложения степенных рядов

$$x^3 \quad : \quad 5\cdot4\cdot c_5 + c_2 = 0; \quad 5\cdot4\cdot c_5 = 0 \Rightarrow \quad c_5 = 0$$

$$x^4 \quad : \quad 6\cdot5\cdot c_6 + c_3 = 0; \quad 6\cdot5\cdot c_6 - \frac{1}{3!} = 0 \Rightarrow$$

$$c_6 = \frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6} = \frac{4}{6!},$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_{3k} = \frac{(-1)^k \cdot 1\cdot4\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{(3k)!},$$

$$c_n = 0, n \neq 3k.$$

Приложения степенных рядов

Таким образом, искомое решение задачи Коши является суммой следующего степенного ряда:

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!} \cdot x^{3n}$$

Полученный ряд сходится на всей числовой оси.