

# Ряды Фурье для чётных и нечётных периодических функций.

Тема 10

# Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом  $T = 2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

# Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции с периодом  $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

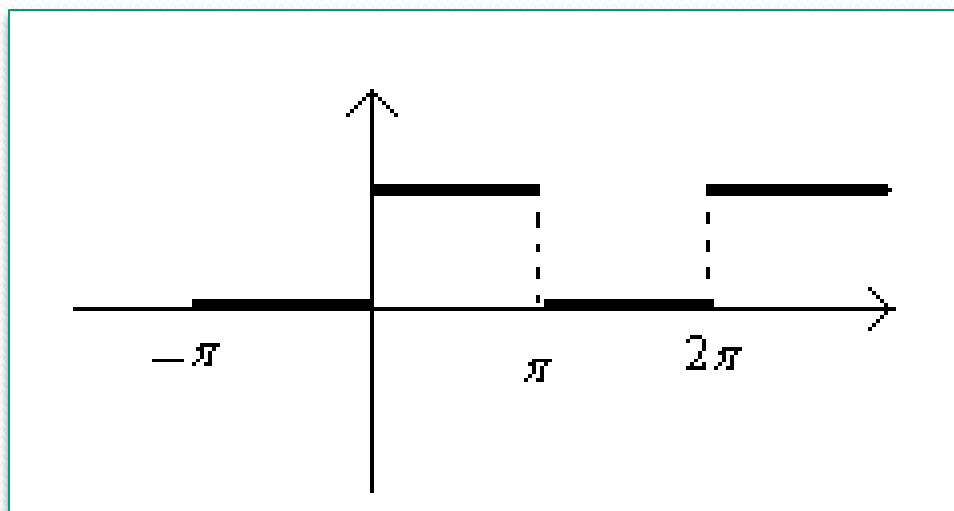
$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \end{array} \right. \quad n \in N$$

# Тригонометрические ряды Фурье

**Пример 1.** Разложить периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

с периодом  $T = 2\pi$  в тригонометрический ряд Фурье.



# Тригонометрические ряды Фурье

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot dx \right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n \cdot \pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{-1}{n \cdot \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{-((-1)^n - 1)}{n \cdot \pi} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, n = 2k + 1, k = 0, 1, \dots \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

# Тригонометрические ряды Фурье

Ряд имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot \sin x}{\pi} + \frac{2 \cdot \sin 3x}{\pi \cdot 3} + \frac{2 \cdot \sin 5x}{\pi \cdot 5} \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

# Тригонометрические ряды Фурье

**Пример 1а.** Разложить периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x < \pi \\ -1/2 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

с периодом  $T = 2\pi$  в тригонометрический ряд Фурье. График этой функции может быть получен смещением вниз по оси  $Oy$  на 0.5 единиц графика функции примера 1 и является графиком нечётной функции:

$$f_{1a}(x) = f_1(x) - \frac{1}{2}$$

# Тригонометрические ряды Фурье

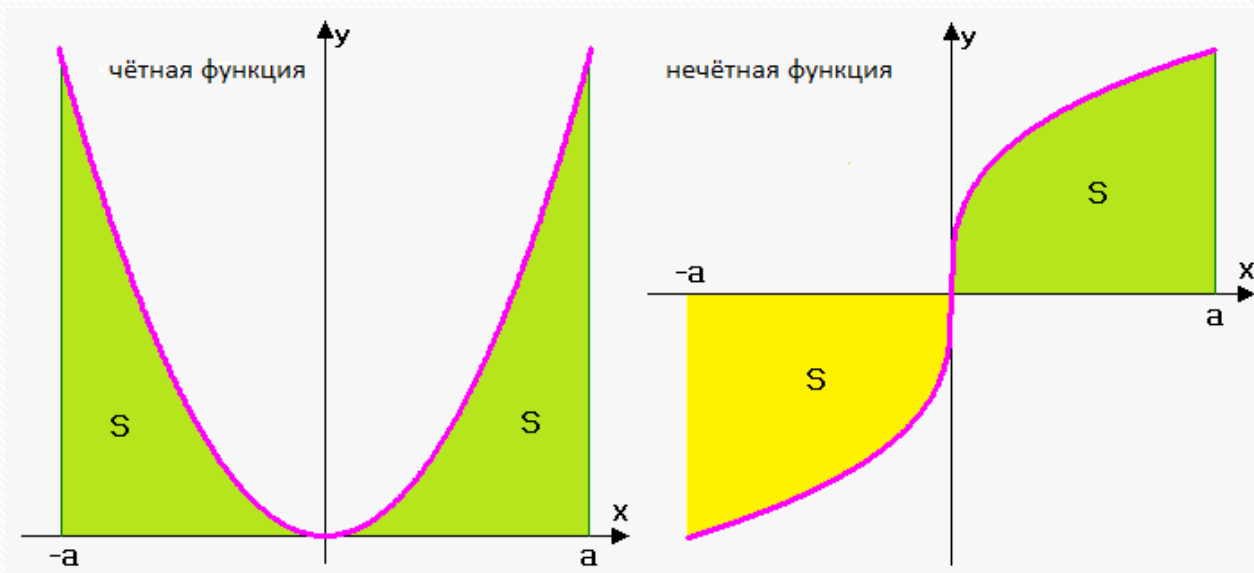
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \left(-\frac{1}{2}\right) dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{x}{2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{2n \cdot \pi} \left( -\sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = 0, \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\{a_n\} = 0$ , т.к. являются **интегралами от нечётной функции в симметричных пределах.**



## Интегралы от чётных и нечётных функций в симметричных пределах интегрирования



1. Интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен **нулю**.
2. Интеграл от чётной функции в симметричных пределах равен **удвоенному значению, вычисленному по половине интервала**.

# Тригонометрические ряды Фурье

Вычислим коэффициенты ряда  $\{b_n\}$ , применяя свойство интеграла от **чётной функции в симметричных пределах**:

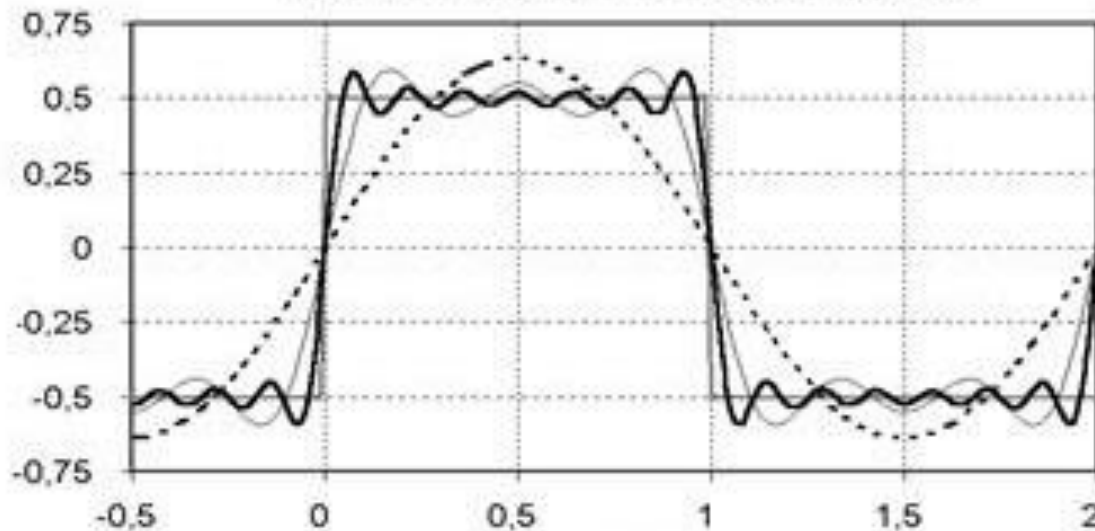
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{n \cdot \pi} \left( -\cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, n = 2k + 1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

# Тригонометрические ряды Фурье

Ряд имеет вид:

$$f_{1a}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$
$$= \frac{2 \cdot \sin x}{\pi} + \frac{2 \cdot \sin 3x}{\pi \cdot 3} + \frac{2 \cdot \sin 5x}{\pi \cdot 5} \dots = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Частичные суммы ряда Фурье



# Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций с периодом  $T = 2l$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

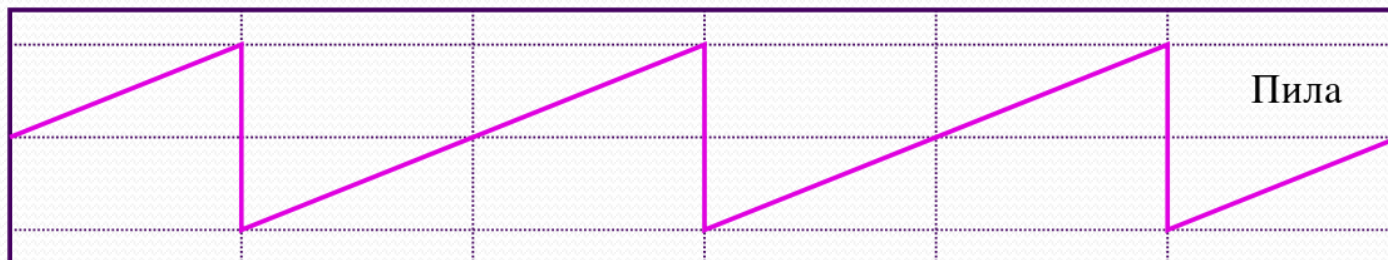
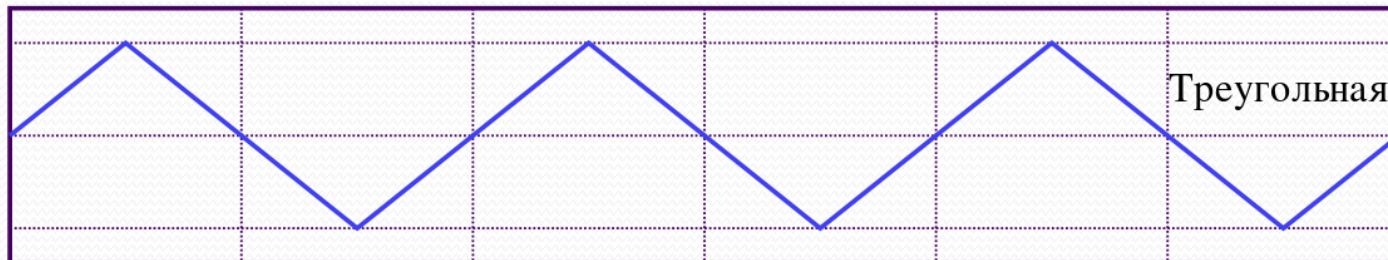
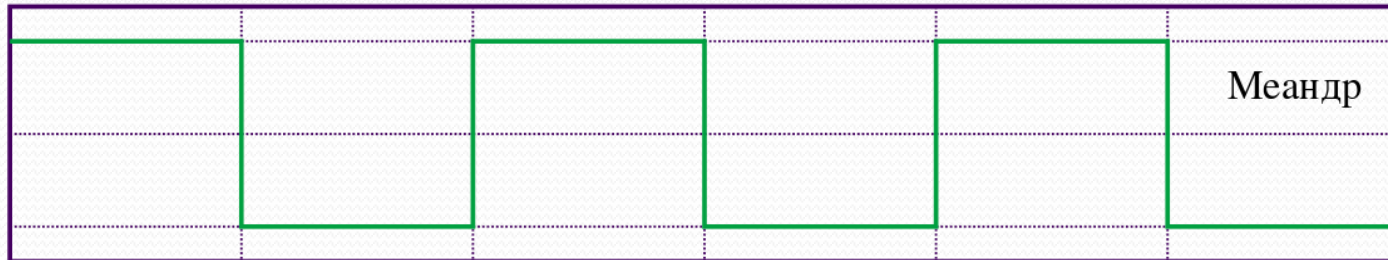
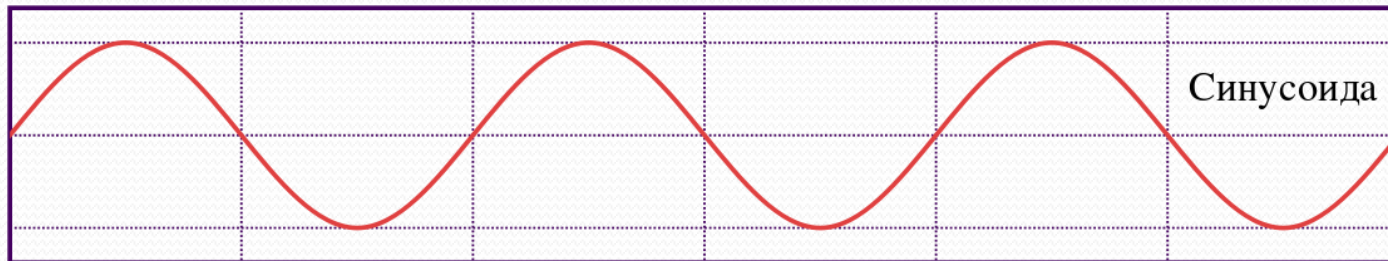
Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций с периодом  $T = 2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$$

# Нечётные и чётные функции



## Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

**Пример 1б.** Разложить периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

с периодом  $T = 2\pi$  в тригонометрический ряд Фурье.

График этой функции может быть получен **сдвигом влево вдоль оси  $Ox$  на  $\frac{\pi}{2}$  единиц** графика функции  $f_{1a}(x)$  и является графиком **чётной функции**:

$$f_{1б}(x) = 2f_{1a}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

## Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Коэффициенты  $\{b_n\} = 0$ , а коэффициенты  $\{a_n\}$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{n \cdot \pi} \left( \sin nx \Big|_0^{\pi/2} \right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, n = 2k + 1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$$



## Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

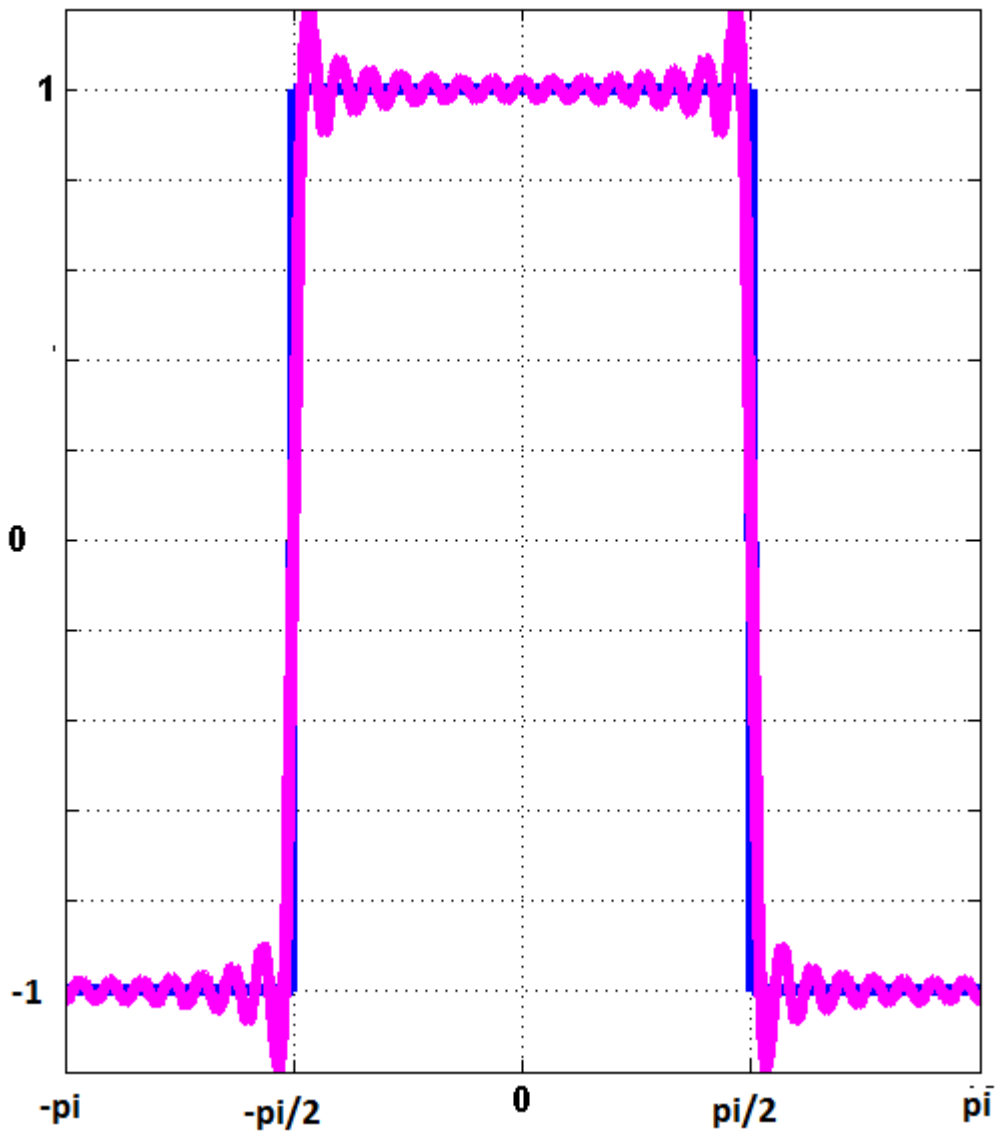
- Ряд имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{16}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \\ &= \frac{4 \cdot \cos x}{\pi} + \frac{4 \cdot \cos 3x}{\pi \cdot 3} + \frac{4 \cdot \cos 5x}{\pi \cdot 5} \dots = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \end{aligned}$$

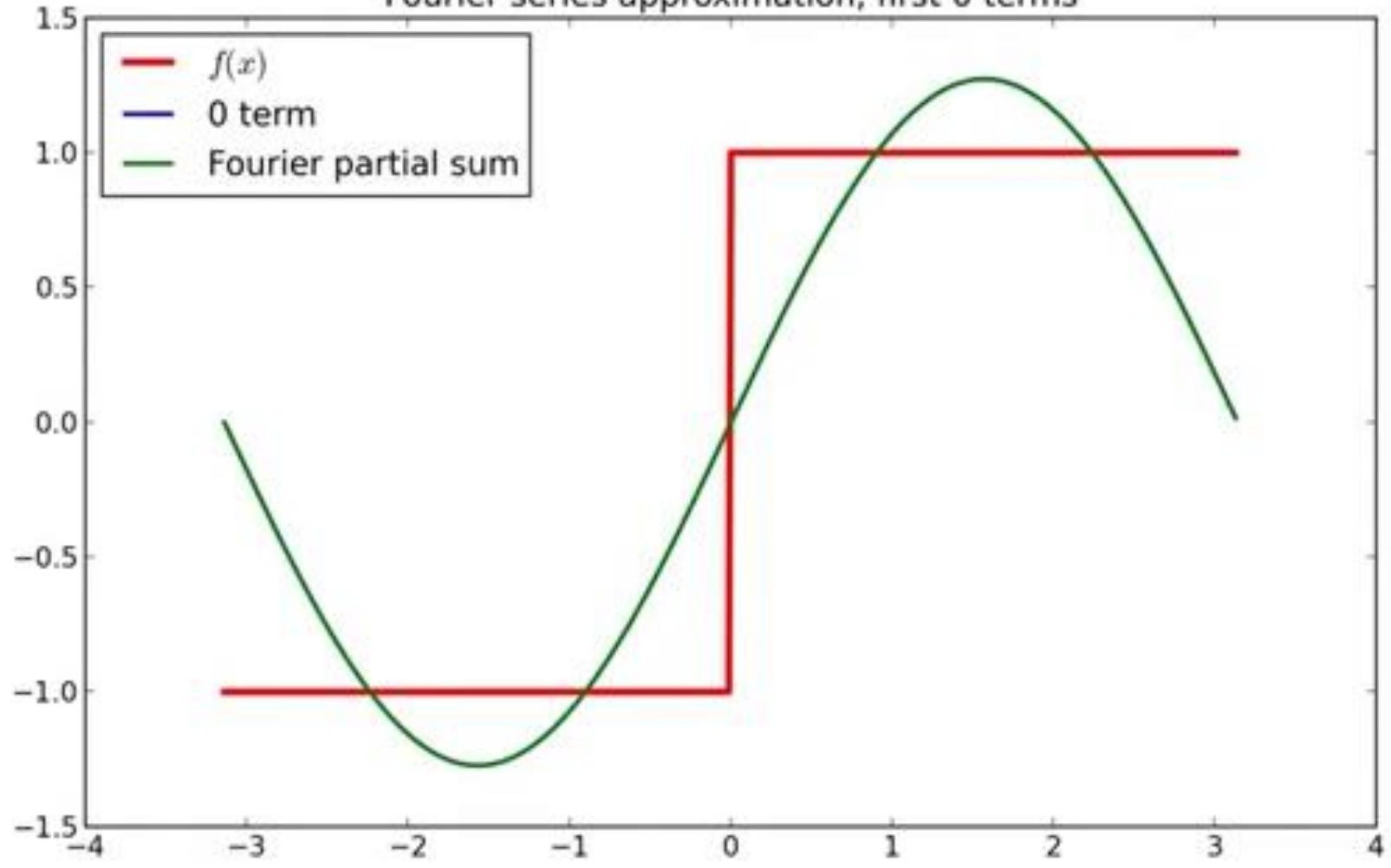
- Если **построить графики слагаемых ряда**, а затем последовательно их сложить, то можно проследить как **графики частичных сумм** с ростом  $n$  приближаются к графику **кусочно-непрерывной** функции.

# Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Approximation for  $N = 30$ . Overshoot = 8.9477 %.



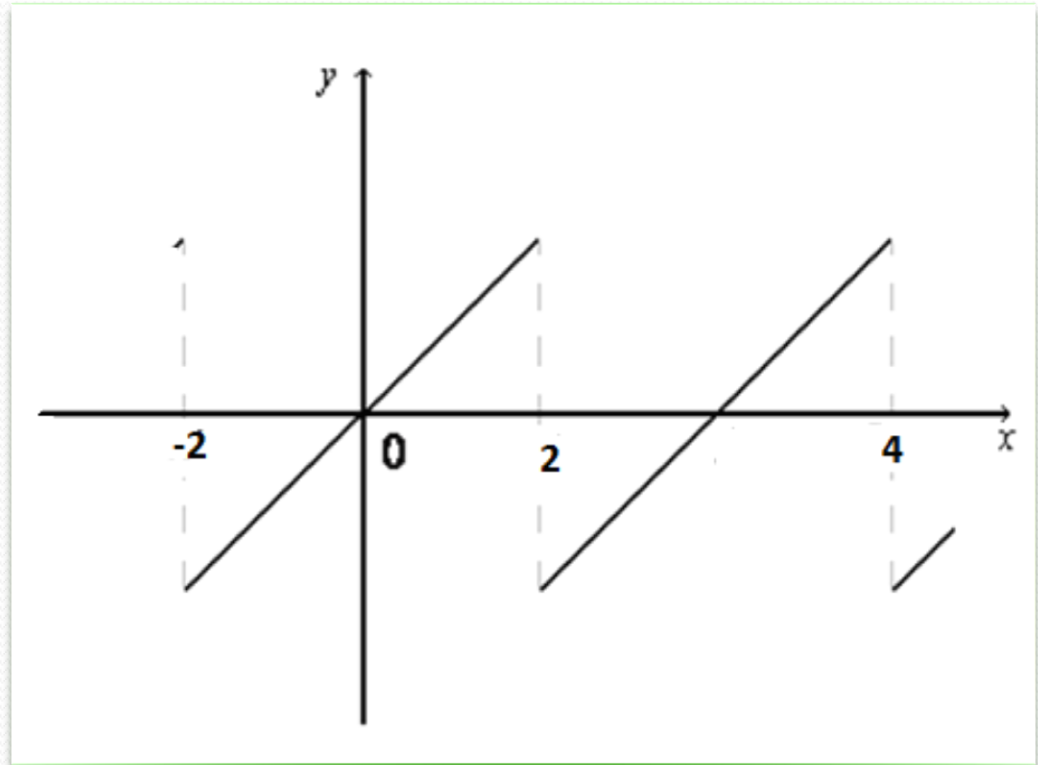
Fourier series approximation, first 0 terms



# Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

**Пример 2.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье нечётную периодическую кусочно-непрерывную функцию с периодом  $T = 4$  :

$$f(x) = x, \quad x \in [-2; 2]$$



## Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

Вычислим коэффициенты ряда  $\{b_n\}$ :

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx = (\text{по частям}) =$$

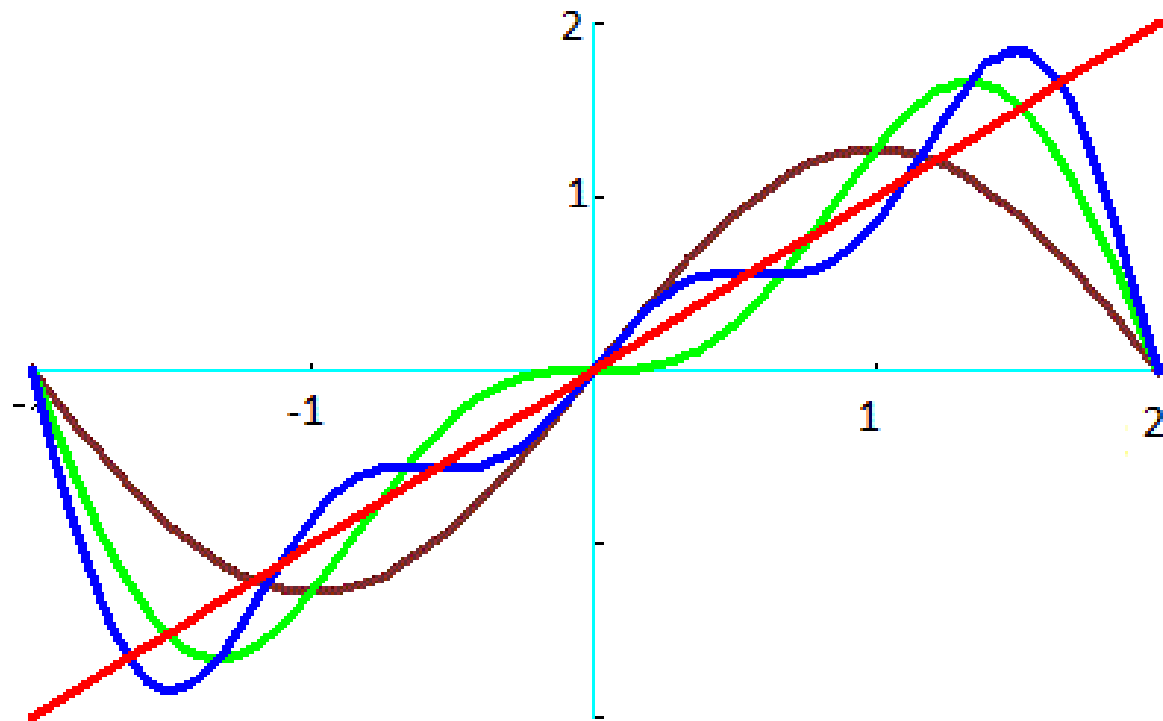
$$= \frac{2}{\pi n} \left( \left( -x \cos \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_0^2 + \int_0^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left( -2(-1)^n + \frac{2}{\pi n} \left( \sin \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_0^2 \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

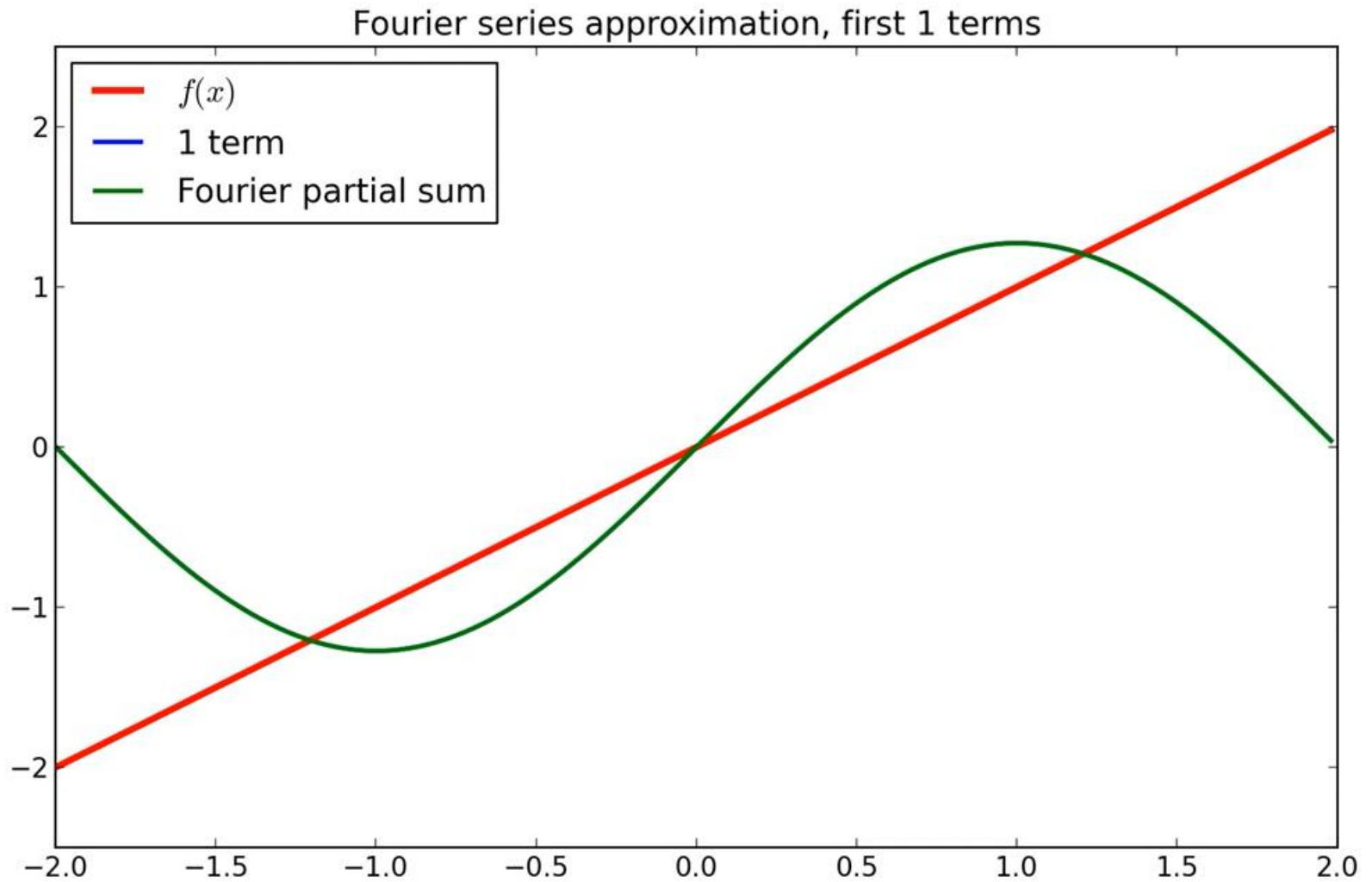
# Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{2} = \frac{4 \cdot \sin \frac{\pi x}{2}}{\pi} - \frac{4 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2}}{\pi \cdot 2} + \frac{4 \cdot \sin \frac{3\pi x}{2}}{\pi \cdot 3} - \dots =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$



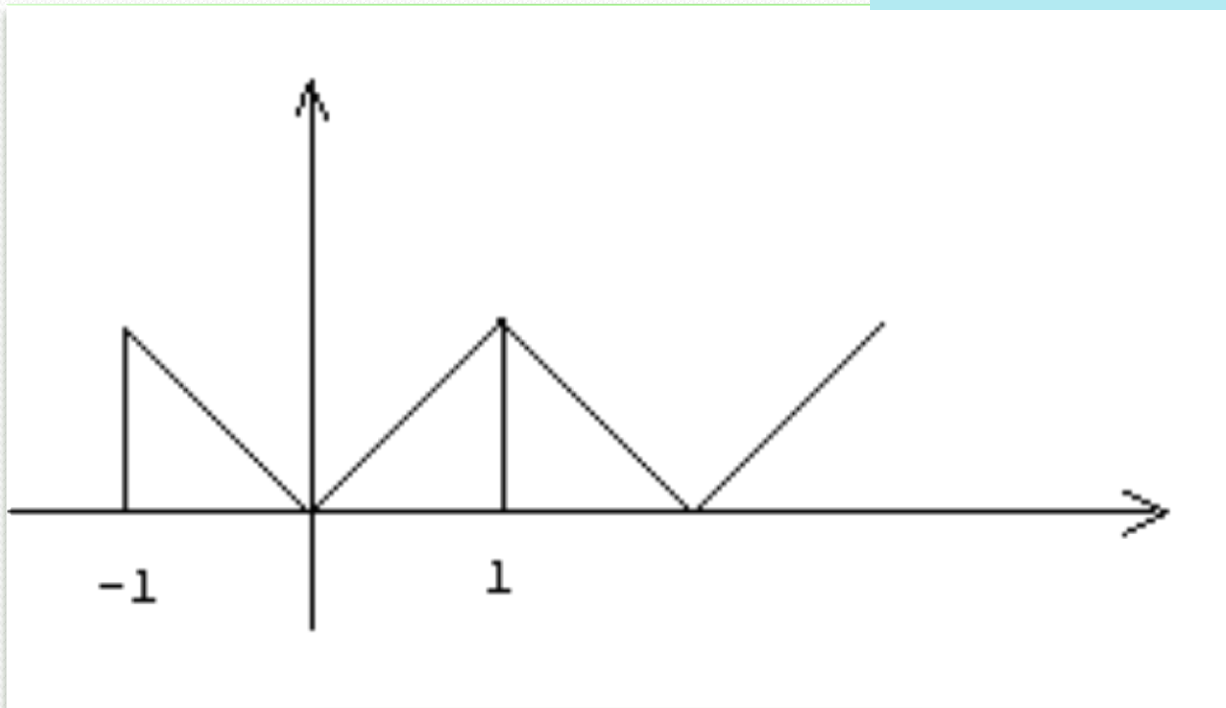
# Видео 6



# Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

**Пример 3.** Разложить в ряд Фурье периодическую **чётную** **кусочно-гладкую** функцию с периодом  $T=2$ :

$$y = |x|, x \in [-1, 1]$$





## Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1, \quad b_n = 0,$$

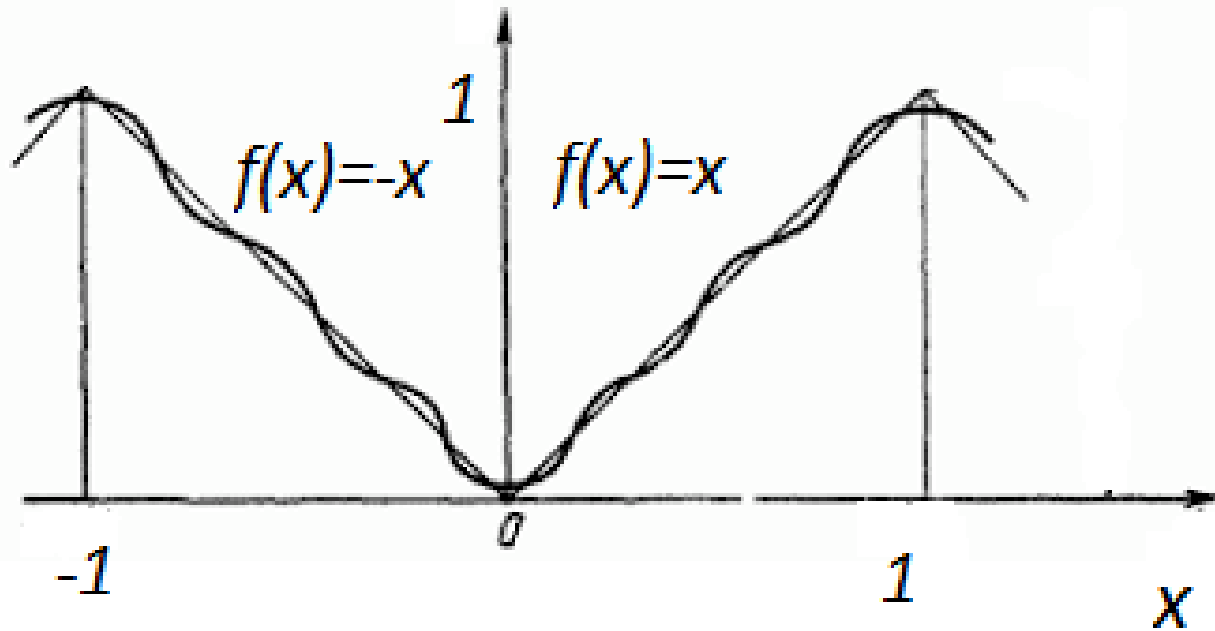
$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{\pi n x}{1} dx = 2 \int_0^1 x \cos \pi n x dx = (\text{по частям}) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left( (x \sin \pi n x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin \pi n x dx \right) = \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \sin \pi n x dx =$$

$$= - \left( \frac{2}{\pi n} \right)^2 (\cos \pi n x) \Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{-4}{n^2 \pi^2}, n = 2k - 1 \\ 0, n = 2k \end{cases}.$$

# Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

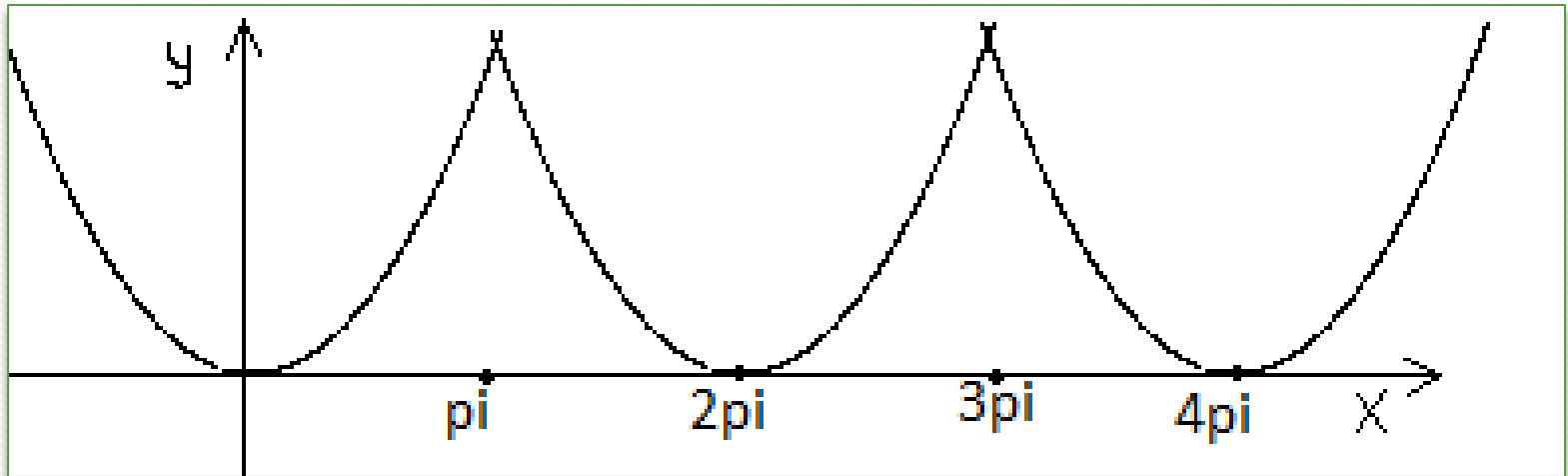
$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$$



# Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

**Пример 4.** Разложить периодическую кусочно-гладкую функцию с периодом  $T = 2\pi$  в ряд Фурье:

$$f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi; \pi]$$



## Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2, \quad b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (\text{дважды по частям}) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left( \left( x^2 \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin nx dx \right) = \frac{4}{\pi n^2} \left( \left( x \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi}.$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$