ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. Знакопеременные ряды.

Тема 9

Числовые ряды

Определение *Числовым рядом* называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} a_p = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = S_n + r_n$$

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m$$ - остаток ряда.

Если существует предел последовательности S_n *частичных сумм ряда,* то ряд называется *сходящимся* ,

а предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ называется суммой ряда .

Необходимое условие сходимости: $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Признаки сходимости числовых рядов

1. Признак сравнения в форме неравенства.

Пусть даны два ***знакоположительных*** ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, ,$$

причем для любого номера $n \in N$ n-ые члены рядов связаны неравенством

$$0 < a_n \leq b_n$$

Тогда из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда , а из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость «большего» ряда.

Признаки сходимости числовых рядов

«Больший ряд» называется ***мажорирующим*** рядом, а «меньший» – ***мажорируемым***.

Признаки сходимости числовых рядов

2. Признак сравнения в предельной форме.

Пусть даны два ***знакоположительных*** ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad .$$

Если существует предел $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0 \quad ,$$

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признаки сходимости числовых рядов

3. Признак Д'Аламбера

Пусть для ***знакоположительного*** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 0$$

Тогда:

1) если $l > 1$, ряд расходится;

2) если $l < 1$, ряд сходится.

В случае $l = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда. (Признак не работает.)

Признаки сходимости числовых рядов

4. Радикальный признак Коши

Пусть для ***знакоположительного*** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Тогда:

1) если $l > 1$, ряд расходится;

2) если $l < 1$, ряд сходится.

В случае $l = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда. (Признак не работает.)

Признаки сходимости числовых рядов

5. Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена

Если для ***знакоположительного*** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует такая *неотрицательная*, *непрерывная*, *монотонно убывающая* функция $f(x)$, определенная на промежутке $[1,+\infty)$, для которой для любого $n \in N$, $f(n) = a_n$

то исследуемый ряд сходится **в том и только том случае**, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Интегральный признак сходимости

Примеры:

1. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$ - ряд расходится.

2. $$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3) \cdot \ln^2 (n-3)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2 k}$$ - ряд сходится.

3. $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-1}{(n-3)^2 \cdot \ln n} \textit{ эквивалентен } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

Знакопеременные ряды

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знакопеременным**, если в нем присутствует

<u>**бесконечно много**</u> как *положительных*, так и

отрицательных членов.

Знакопеременные ряды

Примеры *знакопеременных рядов*:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{q^{n-1}},$$

2. $$\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\ ,$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n^{5}}$$

Знакопеременные ряды

Определение 1

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется

абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

составленный из модулей его членов, **сходится**.

Знакопеременные ряды

Определение 2

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется

условно сходящимся, если сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**,

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов,

расходится.

Знакопеременные ряды

Теорема. Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то он сходится.

(Т.е. если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов знакопеременного ряда, то сходится и сам ряд)

Знакопеременные ряды

Доказательство:

Введем обозначения для частичные суммы обоих рядов:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n^{пол} - S_n^{отр},$$
$$\sigma_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = S_n^{пол} + S_n^{отр},$$

Так как ряд сходится абсолютно, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma, \quad \sigma_n \le \sigma.$$

Тогда последовательности частичных сумм исходного ряда

$\{S_n^{пол}\}, \quad \{S_n^{отр}\}$ монотонно возрастают и ограничены:

$$S_n^{пол} \le \sigma_n \le \sigma, \quad S_n^{отр} \le \sigma_n \le \sigma.$$

Знакопеременные ряды

Следовательно, существуют пределы частичных сумм положительных и отрицательных членов ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{пол} = S^{пол}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^{отр} = S^{отр}$$

и сумма исходного ряда определяется как

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S^{пол} - S^{отр} = S.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (по определению сходимости ряда).

Знакочередующиеся ряды

Определение. Знакочередующимися рядами называются такие ряды, два соседних члена которых имеют разные знаки.

Знакочередующиеся ряды принято записывать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$$

где предполагается, что $a_n > 0$.

Знакочередующиеся ряды

Признак Лейбница

Пусть знакочередующийся ряд удовлетворяет *двум* следующим условиям:

1. члены ряда $\{a_n\}$ ***монотонно убывают***,

2. выполняется необходимое условие сходимости

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Тогда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ **сходится**.

Знакочередующиеся ряды

Доказательство:

Рассмотрим частичную сумму ряда $S_n = S_{2k}$ и покажем, что последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху:

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots - a_{2k-2} + a_{2k-1} - a_{2k} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

и $S_{2k+2} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) > S_{2k}$.

Преобразуем выражение :

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k},$$

очевидно, что $S_{2k} < a_1$.

Знакочередующиеся ряды

Поскольку последовательность частичных сумм

$S_n = S_{2k}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то

существует ее предел:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S,$$

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(S_{2k} + a_{2k+1}\right) = S + 0 = S.$$

Следовательно исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ **сходится**.

Знакочередующиеся ряды

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются ***рядами Лейбница***.

Следствие признака Лейбница

Для ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ выполняются

следующие неравенства:

$$S \le a_1$$

и

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k}\cdot a_k\right| \le |a_{n+1}|.$$

Знакочередующиеся ряды

Эталонные ряды Лейбница

1.Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ сходятся, если $\alpha > 0$, и

расходятся, если $\alpha \le 0$.

2. Ряды $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ln^{\alpha} n}$ сходится для любого α.

Интегральный признак сходимости

Для сравнения - знакоположительные ряды:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ - ряд расходится.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ - ряд сходится.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\alpha n}$ - ряд сходится для $\alpha > 1$.

Знакопеременные ряды

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Линейная комбинация *абсолютно сходящихся* рядов тоже *сходится абсолютно.*

2. Для любого ***абсолютно сходящегося*** ряда допустима произвольная перестановка и произвольная группировка членов ряда.

При этом новый ряд будет по-прежнему *абсолютно сходящимся* к ***той же сумме***.

Знакопеременные ряды

3. **Произведением по Коши** двух числовых рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$,

где

$$c_1 = a_1 b_1,$$
$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$
$$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1,$$
$$\ldots$$
$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Знакопеременные ряды

Если хотя бы один из двух числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

сходится абсолютно, а другой ряд сходится,

то произведение по Коши этих рядов (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$)

сходится абсолютно.

Знакопеременные ряды

Свойства условно сходящихся рядов

1. Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится условно***,

то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{полож}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{отрицат}$ ***расходятся***.

Знакопеременные ряды

2. Теорема Римана.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ***условно сходящийся***, то можно указать такую перестановку его членов, что либо полученный в результате перестановки ***ряд будет сходиться к любому наперёд заданному числу***, либо будет вообще расходиться.

Замечание. Для исследования условной сходимости ***нельзя*** *применять* ***признаки сравнения*** *знакоположительных рядов.*

Знакопеременные ряды

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

Данный ряд - сумма двух рядов.

Первый – ***гармонический***, второй ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

по признаку Лейбница ***сходится условно***.

Исследуемый ряд ***расходится*** как сумма сходящегося и расходящегося ряда.

Знакопеременные ряды

Если же попытаться сравнить два ряда и вычислить предел,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+1\right)=1$$

то приходим к **неверному заключению** об эквивалентности рядов и, как следствие, к неверному выводу - условной сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$!

Признаки сходимости числовых рядов

Признак Д'Аламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

Тогда:

1) если $l > 1$, ряд ***расходится;***

2) если $l < 1$, ряд ***сходится.***

В случае $l = 1$ ***возможна как сходимость, так и расходимость ряда*** .

Числовые ряды

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

Тогда:

1) если $l > 1$, ряд ***расходится***;

2) если $l < 1$, ряд ***сходится***.

В случае $l = 1$ ***возможна как сходимость, так и расходимость ряда*** .