Теория функций комплексной переменной.

1. Комплексные числовые и функциональные ряды и их свойства.
2. Комплексные степенные ряды. Теорема Абеля.
3. Ряд Лорана и его область сходимости.
4. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

Тема 11

Комплексные числовые ряды

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с комплексными числами вида

Ряд называется ***сходящимся***, если сходится последовательность (S_n)

его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. При этом предел S последовательности

называется **суммой ряда**. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n -м остатком ряда.

Необходимым условием сходимости ряда является требование

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Комплексные числовые ряды

Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ с действительными положительными

членами, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, который в этом случае

называется ***абсолютно сходящимся***. Для доказательства сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ можно применить *признаки Даламбера и Коши*:

ряд сходится, если, начиная с некоторого номера N , для $\forall n \geq N$

выполняются соотношения $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$ или $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$

Функциональные комплексные ряды

Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ называется ***функциональным рядом***.

Ряд называется ***сходящимся в области*** G **,** если $\forall z \in G$ соответствующий ему числовой ряд сходится и в этой области можно определить однозначную функцию $f(z)$, значение которой в каждой точке области G равно сумме соответствующего числового ряда.

Тогда $\forall z \in G$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon, z)$, $\forall n \geq N(\varepsilon, z)$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon .$$

Заметим, что в общем случае N зависит и от ε и от z.

Функциональные комплексные ряды

Определение. Если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon$

выполняется сразу $\forall z \in G$, то ряд называется ***равномерно сходящимся в области*** G**.**

Достаточным признаком равномерной сходимости ряда является *признак Вейерштрасса:* ***Если всюду в области*** G ***члены функционального ряда могут быть мажорированы членами некоторого абсолютно сходящегося числового ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***, т.е.*** $|U_n(z)| \leq |a_n|$, $\forall z \in G$,

то ряд сходится равномерно.

Функциональные комплексные ряды

Для функциональных комплексных равномерно сходящихся рядов справедливы теоремы о ***непрерывности суммы ряда, почленном интегрирования и дифференцирования ряда***.

Они доказываются совершенно так же, как соответствующие теоремы вещественного анализа.

Теорема Вейерштрасса. *Если члены ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ - *аналитические в некоторой области* G *функции и этот ряд сходится в области* G *равномерно, то его сумма* $f(z)$ *также является функцией аналитической в* G, *ряд можно почленно дифференцировать и полученный ряд*

$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{'}(z)$ *равномерно сходится к* $F'(z)$.

Степенные ряды. Теорема Абеля

Важным случаем общих функциональных рядов являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где C_n - некоторые комплексные числа, а z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости. Члены ряда являются аналитическими функциями на всей плоскости, поэтому для исследования свойств данного ряда могут быть применены общие теоремы равномерной сходимости.

Для определения области сходимости степенного ряда применяют **теорему Абеля.**

Степенные ряды. Теорема Абеля

Теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится

и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$,

причем в круге $|z - z_0| < \rho$, радиусом ρ, меньшим $|z_1 - z_0|$,

ряд сходится равномерно.

Степенные ряды. Теорема Абеля

Точная верхняя грань расстояний $|z - z_0|$ от точки z_0, до точки z,

в которых сходится ряд называется ***радиусом сходимости степенного ряда***,

а область $|z - z_0| < R$, называется ***кругом сходимости степенного ряда***.

В точках границы $|z - z_0| = R$ ряд может как сходиться так и

расходиться.

Степенные ряды. Теорема Абеля

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Находим радиус сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z| < 1, \text{ т.е. } R = 1,$$

и наш ряд сходится в круге $|z| < 1$.

При $|z| = 1$ исследуется особо. В этом случае $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$

и, значит, областью абсолютной сходимости является $|z| \le 1$.

Степенные ряды. Теорема Абеля

Из теоремы Абеля можно вывести ряд **следствий**:

1^0. *Если степенной ряд расходится в некоторой точке* z_1*, то он расходится и во всех точках* z*, удовлетворяющих неравенству*

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|.$$

2^0. *В круге* $|z - z_0| \le \rho < R$ *любого радиуса* ρ*, меньшего чем радиус сходимости* R*, степенной ряд* ***сходится равномерно***.

3^0. *Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к* ***аналитической функции***.

Степенные ряды. Теорема Абеля

4^0. *Степенной ряд внутри круга сходимости можно* ***почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз****, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости* R *исходного ряда.*

5^0. Коэффициенты степенного ряда находятся по формулам

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции?

Теорема(Тейлора). *Функция* $f(z)$, *аналитическая внутри круга* $|z-z_0|<R$, *может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$, *причем этот ряд определен однозначно.*

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Выберем произвольную точку z внутри круга $|z - z_0| < R$

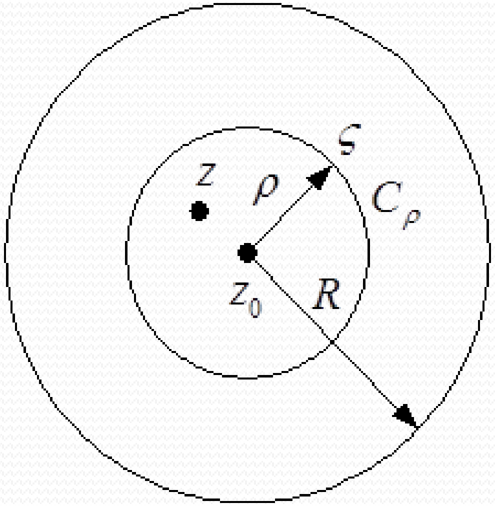
и построим окружность C_ρ с центром в точке z_0

радиусом $\rho < R$, содержащую точку z внутри.

Такое построение возможно для любой точки z внутри

этого круга. По формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}.$$



Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}}$$

Так как $|z - z_0| < |\varsigma - z_0|$, то $\left|\dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}\right| < 1$ и второй

сомножитель можно представить как сумму прогрессии

со знаменателем $\dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}$, т.е. $\dfrac{1}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{\varsigma - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^n}$.

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Подставляя представление $\dfrac{1}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(z - z_0\right)^n}{\left(\varsigma - z_0\right)^n}$

и интегрируя почленно, получаем

$$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f\left(\varsigma\right) d\varsigma}{\left(\varsigma - z_0\right)^{n+1}} \left(z - z_0\right)^n$$

Введем обозначение $\quad C_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \dfrac{f\left(\varsigma\right) d\varsigma}{\left(\varsigma - z_0\right)^{n+1}}$

и запишем степенной ряд: $\quad f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z - z_0\right)^n.$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$

разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд.

Коэффициенты разложения на основании формулы Коши

для производных аналитической функции имеет вид

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Пример. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора по степеням z.

Эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точек $z_{1,2}=\pm i$. Поэтому в круге $|z|<1$ функция может рассматриваться как сумма бесконечно убывающей прогрессии $q=-z^2$, $|q|=\left|z^2\right|<1$. Поэтому

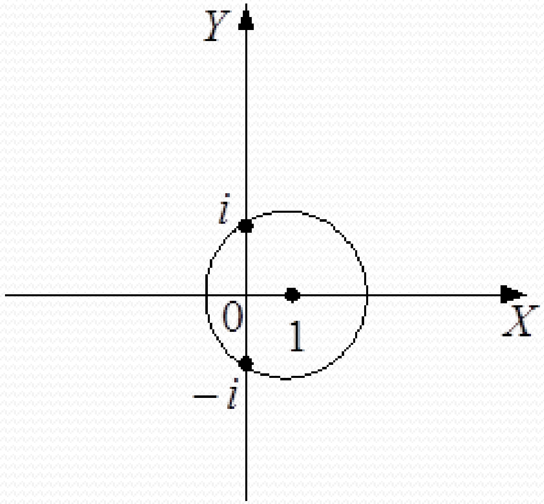
$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\ |z|<1.$$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Пример. Найти разложение $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора

в круге $|z-1|<\sqrt{2}$.

Представим $$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=$$



$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)\left(1+\dfrac{z-1}{1-i}\right)}-\frac{1}{(1+i)\left(1+\dfrac{z-1}{1+i}\right)}\right].$$

$q_1=-\dfrac{z-1}{1-i}$, $\quad q_2=-\dfrac{z-1}{1+i}$, т.к. $\left|\dfrac{z-1}{1-i}\right|=\dfrac{|z-1|}{\sqrt{2}}<1$, $\left|\dfrac{z-1}{1+i}\right|=\dfrac{|z-1|}{\sqrt{2}}<1$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Применим формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

Используя показательную форму чисел $(1-i)^{n+1}$ и $(1+i)^{n+1}$,

находим окончательно

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n.$$

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Пример. Разложить $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ в ряд Тейлора по степеням z.

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots.\right)\quad |z|<1,\ \left|\frac{z}{3}\right|<1.$$

Ближайшей к центру разложения $z_0=0$ особой точкой является точка $z=-1$, до которой расстояние равно 1, поэтому $R=1$.

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

В заключение приведем основные разложения:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \ . \ (|z| < \infty);$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ (|z| < \infty);$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \ (|z| < \infty);$$

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} z^n + \ldots;$$

$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^4}{n} + \ldots \ (|z| < 1).$$

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Определение. Точка z_0 называется *нулем аналитической функции* $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

В этом случае разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots.,$$

т.к. $C_0 = f(z_0)=0$.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Определение. Точка z_0 называется *нулем аналитической функции* $f(z)$ $n-$*го порядка*, или *нулем кратности* n,

если $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0$, $C_n \neq 0$.

Тогда разложение имеет вид

$$f(z) = C_n (z - z_0)^n + C_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots \quad .$$

Если $n = 1$, то нуль называется *простым*.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора видим, что

если точка z_0 является нулем порядка n, то

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n)}(z_0) = 0,\ \text{но}\ f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Разложение в ряд можно переписать в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \left[C_n + C_{n+1}(z - z_0) + \ldots\right] = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = C_n + C_{n+1}(z - z_0) + C_{n+2}(z - z_0)^2 + \ldots,\ \varphi(z_0) \neq 0.$$

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Справедливо и обратное утверждение.

Всякая аналитичная в точке z_0 *функция вида*

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z),$$

где $n \to 0$ *- целое,* $\varphi(z_0) \neq 0$

имеет в этой точке нуль порядка n.

Пример. Точки $z = \pm 2$ для функции $f(z) = (z^2 - 4)^3 e^z$

являются нулями 3-го порядка,

т.к. $f(z) = (z-2)^3 (z+2)^3 e^z = (z^2 - 4)^3 \varphi(z)$, причем $\varphi(\pm 2) \neq 0$.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций.

Пример. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}.$$

Разложим знаменатель по степеням z:

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)} = \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} - \ldots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots} =$$

$$= z^5 \cdot \varphi(z), \text{ где } \varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots.}, \text{ причем } \varphi(0) \neq 0.$$

Поэтому точка $z_0 = 0$ является нулем 5-го порядка для функции.