1. Сходимость рядов Фурье.

2. Разложение в ряд Фурье непериодических функций и функций, заданных на отрезке [a ; b].

Тема 10

Разложение в ряд Фурье непериодических функций и функций, заданных на отрезке [a ; b].

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

В приложениях часто приходится иметь дело с функцией $f(x)$, заданной на $\left[-l, l\right]$,т.к. эта функция не является периодической, то применить сразу теорию рядов Фурье невозможно. Тогда поступают следующим образом: вводят вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-l,l) \\ \dfrac{f(-l)+f(l)}{2}, & x=\pm l. \end{cases}$$

и строят периодическим продолжением функции $\varphi(x)$, совпадающей с $f(x)$ на ($-l; l$) .

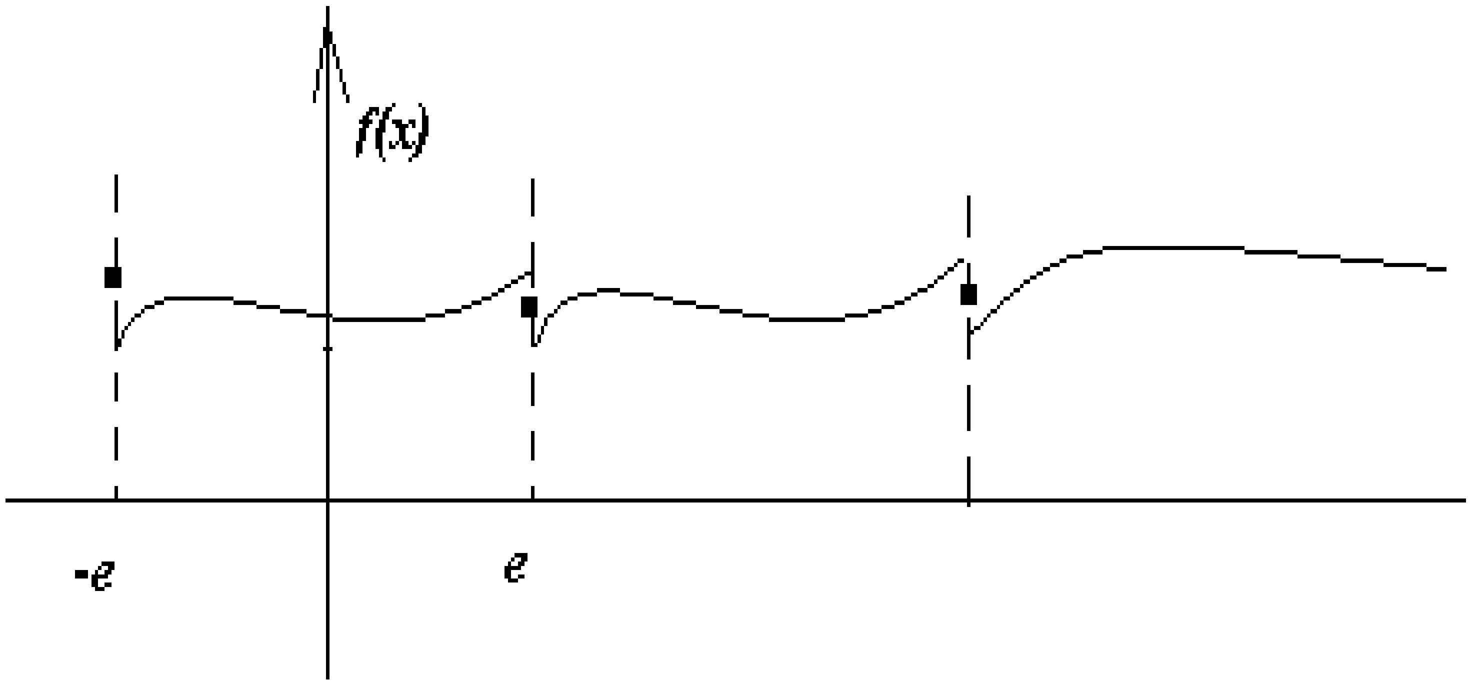
Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Определение Функция $F(x)$, определённая на всей числовой прямой и периодическая с периодом $T = 2l$, называется **периодическим продолжением функции** $\varphi(x)$, заданной на отрезке $[-l, l]$ длиною $2l$, если на этом отрезке выполняется равенство

$$F(x) = \varphi(x)$$

Если на отрезке $[-l, l]$ ряд Фурье сходится к функции $\varphi(x)$, то на всей числовой прямой он сходится к её периодическому продолжению.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций



Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Полученную функцию φ (x) можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, который и будет представлять исходную функцию *f (x)* на (-*l*; *l*), где $\varphi(x) = f(x)$. В граничных точках –*l* и *l* ряд может не сходиться к *f (-l)* и *f (l)*.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

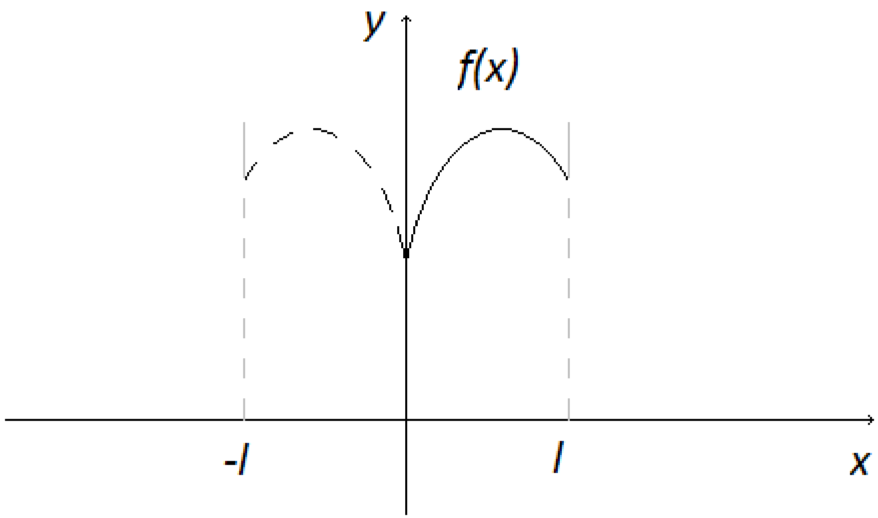
Коэффициенты ряда вычисляются по формулам для функции с периодом $2l$:

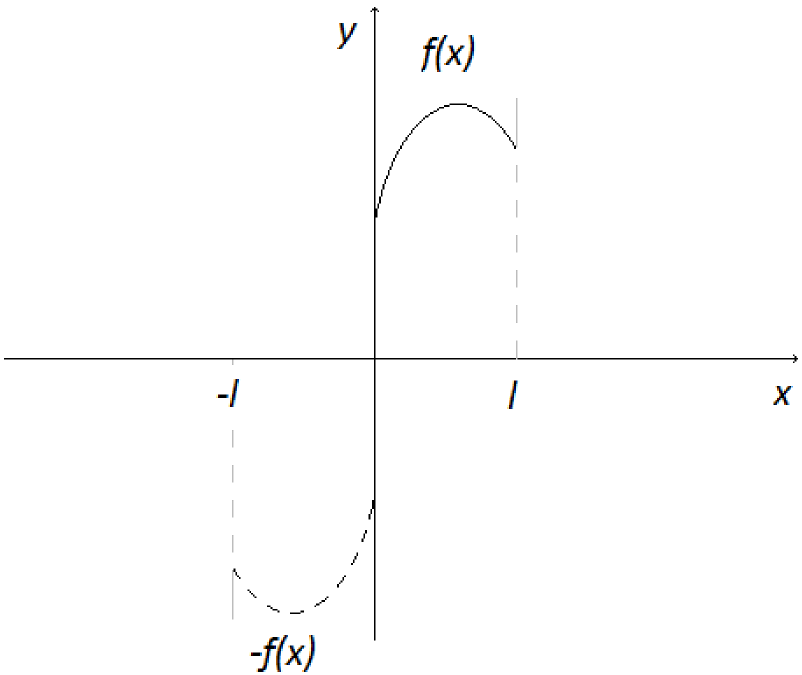
$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

Чётное и нечётное периодическое продолжение функции

Если $f(x)$ задана на $[0;l]$, то ее можно, продолжить периодически с периодом $T=2l$.При этом продолжение на [-l,0) может быть или четным или нечетным и , соответственно, ряд будет содержать или косинусы, или синусы.





Чётное периодическое продолжение функции

Тригонометрические ряды Фурье для чётно продолженных функций с периодом $T = 2l$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Нечётное периодическое продолжение функции

Тригонометрические ряды Фурье для нечётно продолженных функций с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

Чётное и нечётное периодическое продолжение функции

Чётное периодическое продолжением функции $f(x)$ непрерывно, является кусочно-гладкой функцией, на концах отрезка удовлетворяет равенству $f(-l) = f(l)$, следовательно, её тригонометрический ряд Фурье **сходится к $f(x)$ равномерно**.

Поэтому при чётном продолжении сходимость будет лучше, так как убывание коэффициентов ряда по косинусам будет со скоростью $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а по синусам лишь со скоростью $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Так как функция задана на произвольном отрезке $[a;b]$, то также строится вспомогательная функция φ (x), периодическая с периодом $T = b - a = 2l, l = \dfrac{b-a}{2}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), x \in (a;b) \\ \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \qquad x = a, x = b \end{cases}$$

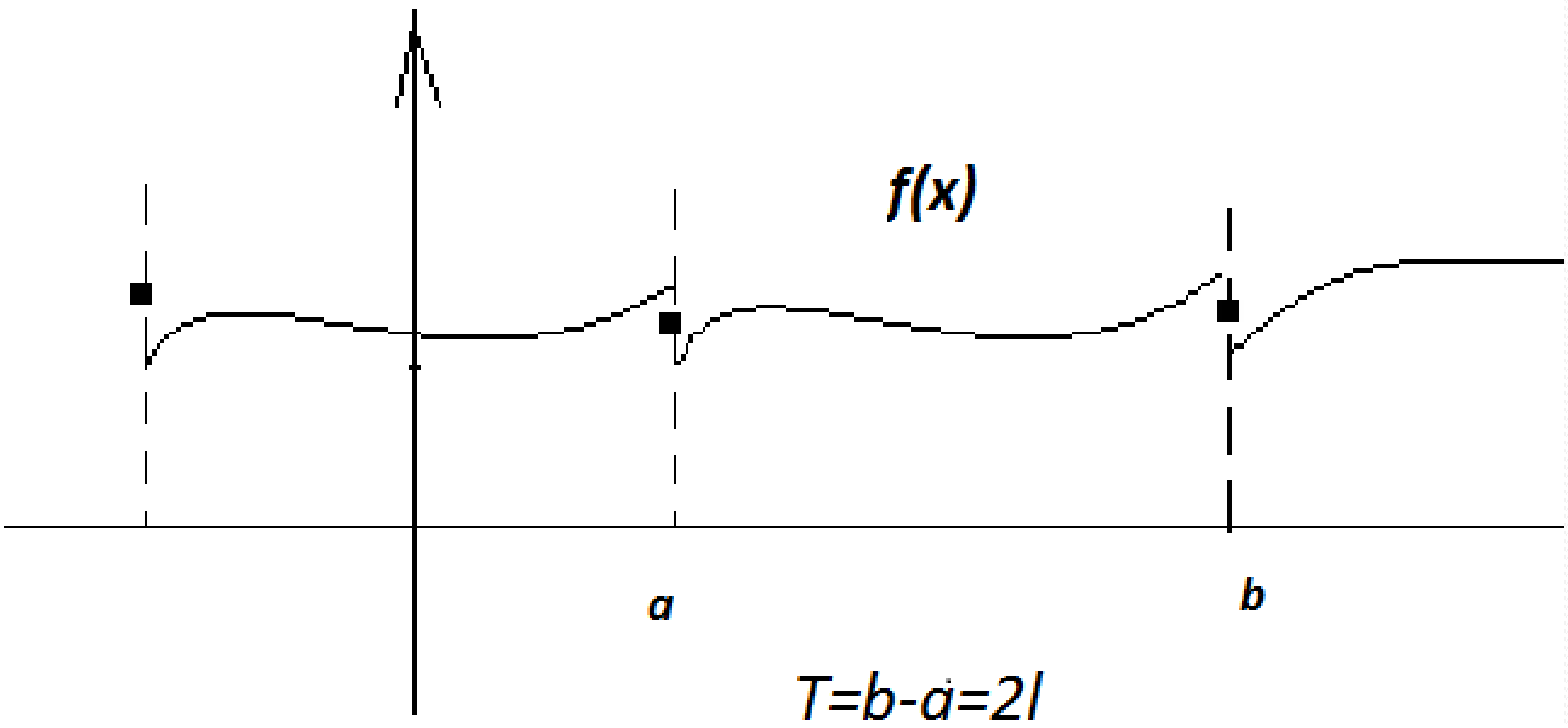
Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Определение Функция $F(x)$, определённая на всей числовой прямой и периодическая с периодом $T = 2l$, называется периодическим продолжением функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ длиною $2l = b - a$, если на этом отрезке выполняется равенство

$$F(x) = f(x)$$

Если на отрезке $[a, b]$ ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой прямой к её периодическому продолжению.

Сходимость тригонометрических рядов Фурье



Разложение в ряд Фурье непериодических функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{b-a}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{b-a}\right)$$

$$T=b-a=2l,\quad l=\frac{b-a}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b-a}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}dx$$

Чётное периодическое продолжение функции, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Тригонометрические ряды Фурье для чётно продолженных функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$, $l=b-a$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{b-a}$$

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{b-a}\,dx,$$

Нечётное периодическое продолжение функции, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Тригонометрические ряды Фурье для нечётно продолженных функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$, $l=b-a$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{b-a}$$

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{b-a}dx,$$