Теория функций комплексной переменной.

1. Дифференцирование функций комплексной переменной.
2. Аналитичность функций комплексной переменной.
3. Условия Коши-Римана

Тема 11

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Комплексное число ***z*** - упорядоченная пара действительных чисел ***x***, ***y***, записанная в форме

$$z = x + i \cdot y$$

где ***i*** - "мнимая единица", для которой $i^2 = -1$

x - действительная часть числа ***z*** - $x = \operatorname{Re} z$,

y - мнимая часть числа ***z*** - $y = \operatorname{Im} z$.

Такая форма записи называется алгебраической формой комплексного числа.

Число $\bar{z} = x - i \cdot y$ называется числом, сопряжённым к числу $z = x + i \cdot y$.

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Запись комплексного числа в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется **тригонометрической формой комплексного числа**.

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π):

$$\boldsymbol{Arg\, z = arg\, z + 2\pi k.}$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Любое комплексное число **z** можно представить в **показательной форме записи комплексного числа.**

$$z = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi} = |z| \cdot e^{i\cdot\arg z} =$$

$$= |z| \cdot e^{i\cdot Argz}$$

Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Поскольку комплексным числам **z** и **w** соответствуют пары действительных чисел $(x; y)$ и $(u; v)$ соответственно: $z = x + i \cdot y,$ $w = u + i \cdot v$ то задание функции

$$w = f(z)$$

равносильно заданию двух функций

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

определяющих действительные величины u и v как функции двух вещественных переменных x и y

Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Функция $f(z)$, заданная на множестве E,

называется ***непрерывной*** в точке $z_0 \in E$, если

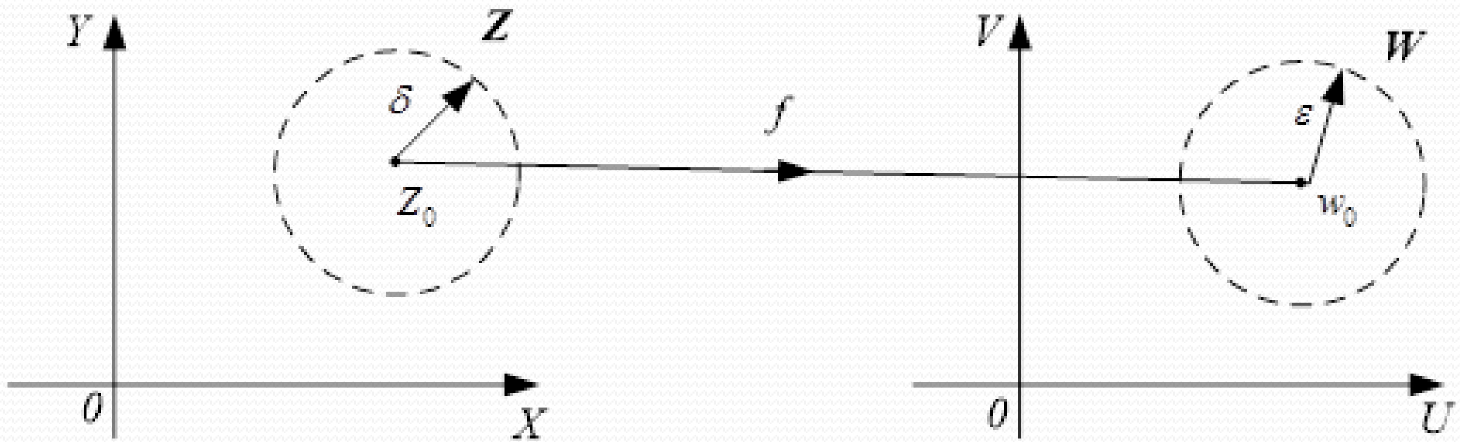
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Напомним, что **число** w_0 называется **пределом функции** $f(z)$ **в точке** z_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Основные понятия функций комплексной переменной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$



Как только точки z попадают в δ - окрестность точки z_0,

соответствующие точки $f(z) = w$ попадает

в ε -окрестность точки w_0.

Основные понятия функций комплексного переменного

Из непрерывности функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

в точке z следует непрерывность функций двух переменных $\operatorname{Re} f(x) = u(x, y)$ и $\operatorname{Im} f(x) = v(x, y)$

в точке (x, y), и наоборот

$v = v(x, y),$

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Дифференцируемые функции комплексной переменной обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительной переменной многими **дополнительными свойствами**, причина появления которых заключается в том, что условие для существования производной функции комплексной переменной является **несравненно более жестким**, чем условие для существования производной функциями действительной переменной .

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Определение. Пусть в области G комплексной плоскости z задана функция $f(z)$. Если для точки $z_0 \in G$ существует при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *по комплексной переменной* z *в точке* z_0

и обозначается $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой в точке* z_0. Подчеркнем еще раз, что, если существует предел, то он не зависит от способа приближения точки $z = z_0 + \Delta z$ к точке z_0

(для ф.д.п. $y = \varphi(x)$ было только два направления стремления $\Delta x \to 0$: слева (при $\Delta x < 0$) и справа ($\Delta x > 0$) при определении предела $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$)

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Необходимое условие дифференцируемости:

Теорема 1. *Если функция* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0=x_0+iy_0$, *то в точке* (x_0,y_0) *существуют частные производные от функций* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *по переменным* x, y *причем имеет место следующие соотношения, называемые условиями Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Дифференцируемость функций комплексной переменной

По условию существует предел, не зависящий от способа стремления Δz к нулю. Положим вначале $\Delta z = \Delta x$ (рис. 9), , затем $\Delta z = i\Delta y$ (рис. 10),

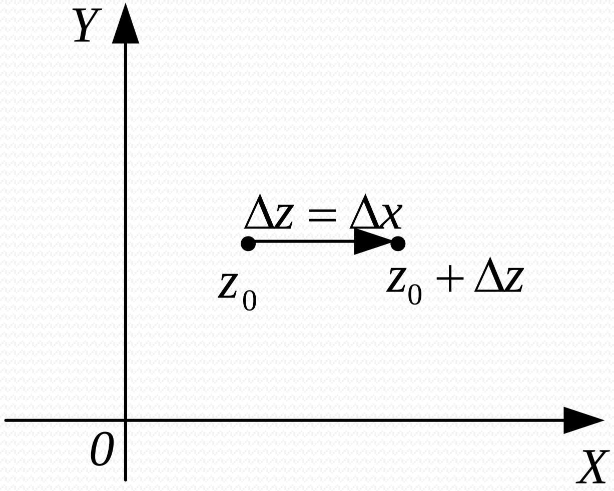


Рис. 9

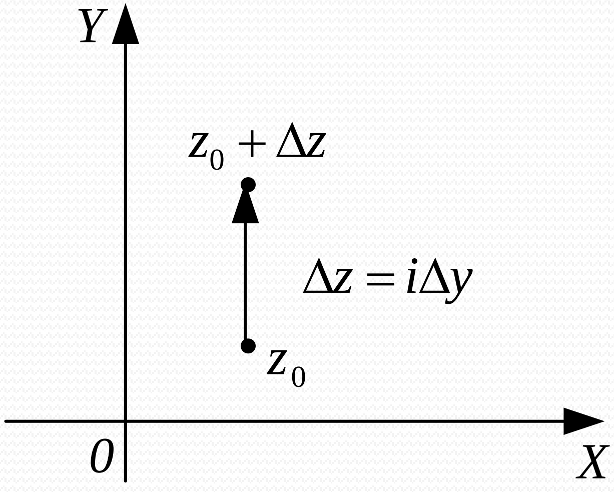


Рис. 10

Дифференцируемость функций комплексной переменной

В первом случае для производной справедливо:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$== u_x^{'}(x_0, y_0) + i v_x^{'}(x_0, y_0)$$

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Во втором случае:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0)$$

Из сравнения выражений для производных следует справедливость условий Коши-Римана:

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Достаточное условие дифференцируемости:

Теорема 2. *Если в точке* (x_0, y_0) *функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *дифференцируемы, а их частные производные связаны условиями Коши-Римана, то функция*

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

является дифференцируемой.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Определение. Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется ***аналитической*** в данной точке.

Определение. Функция аналитическая во всех точках некоторой области называется ***аналитической или голоморфной в этой области***.

Понятие аналитической функции является основным понятием теории ф.к.п. в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций при решении многочисленных математических проблем и их приложениях.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Таким образом, из теорем следует:

необходимым и достаточным условием ***аналитичности функции*** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

в области является существование в этой области непрерывных частных производных функций

$u(x,y)$ и $v(x,y)$,

связанных соотношениями Коши-Римана.

Точки области, в которых функция не является аналитической, называются *особыми точками*.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Согласно **условиям Коши-Римана**, можно записать различные выражения для производной:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Пример 1. Являются ли аналитическими функции

$$f(z) = z^2 \text{ и } f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z \ ?$$

Легко получаем, что равенство $w = z^2$

равносильно равенствам $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$

$$u'_x = 2x = v'_y = 2x$$

$$u'_y = -2y \ = -v'_x = 2y$$

Функция является аналитической.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Равенство $w = z \operatorname{Re} z = (x + iy) \cdot x$

равносильно равенствам $u = x^2$, $v = xy$.

$$u'_x = 2x \neq v'_y = x$$

$$u'_y = 0 \neq -v'_x = y$$

Функция не является аналитической.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Определение. Функция двух вещественных переменных $T(x, y)$ называется ***гармонической***, если она является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Определение. Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условию Коши-Римана, называются ***сопряженными.***

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Дифференцируя первое из условий **Коши-Римана** по ***x***,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

а второе – по ***y***, а затем складывая полученные таким образом равенства, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

и приходим в выводу о том, что ***действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.***

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мы получим, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись

условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,

т.е. определим функцию по ее двум частным производным.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Пример 2. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x,y)=2x^2-2y^2+x$.

Т.к. $\dfrac{\partial v}{\partial x}=4x+1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-4y$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-4x-1$

Тогда $u=-\int 4ydx=-4xy+\varphi(y)$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-4x-1\Rightarrow\varphi(y)=-y+C\Rightarrow$$

$$u=-4xy-y+C\Rightarrow w=-4xy-y+C+i\left(2x^2-2y^2+x\right)=$$

$$=2i\left(x^2-y^2+2ixy\right)+i(x+iy)+C\Rightarrow$$

$$f(z)=w=2iz^2+iz+C$$