# Теория функций комплексной переменной.

1. Ряд Лорана и его область сходимости.
2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
3. Изолированные особые точки регулярной функции и их классификация.

Тема 11

# Функциональные комплексные ряды

**Определение.** Если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon$

выполняется сразу $\forall z \in G$, то ряд называется ***равномерно сходящимся в области*** $G$**.**

Достаточным признаком равномерной сходимости ряда является

*признак Вейерштрасса:* ***Если всюду в области*** $G$ ***члены функционального ряда могут быть мажорированы членами некоторого абсолютно сходящегося числового ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***, т.е.*** $|U_n(z)| \leq |a_n|$, $\forall z \in G$,

***то ряд сходится равномерно.***

# Степенные ряды. Теорема Абеля

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится

и в любой точке $z$, удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$,

причем в круге $|z - z_0| < \rho$, радиусом $\rho$, меньшим $|z_1 - z_0|$,

ряд сходится равномерно.

## Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции?

**Теорема(Тейлора).** *Функция* $f(z)$, *аналитическая внутри круга* $|z-z_0|<R$, *может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, *причем этот ряд определен однозначно.*

# Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$

разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд.

Коэффициенты разложения на основании формулы Коши для производных аналитической функции имеет вид

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

## Ряд Лорана и его область сходимости.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

где $z_0$ - фиксированная точка комплексной плоскости, $C_n$- некоторые комплексные числа.

Этот ряд называется ***рядом Лорана.***

# Ряд Лорана и его область сходимости.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

называется ***правильной частью*** или ***регулярной частью*** ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

***Областью сходимости*** ряда Лорана является общая часть областей сходимости ***правильной части и главной части*** ряда.

# Ряд Лорана и его область сходимости.

***Областью сходимости правильной части ряда*** является круг с центром в точке $z_0$ некоторого радиуса ***R***, причем в частности, радиус может равняться нулю или бесконечности.

Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции комплексной переменной , т.е.

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \qquad |z-z_0|<R$$

Для определения области сходимости главной части ряда совершим замену переменной, положив

$$\varsigma=\frac{1}{(z-z_0)}$$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

Тогда этот ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\varsigma^{n}$

- обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции комплексной переменой $\varphi(\varsigma)$. Обозначим радиус сходимости полученного степенного ряда : $\frac{1}{r}$

Тогда

$$\varphi(\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\varsigma^{n}, \quad |\varsigma| < \frac{1}{r}.$$

Или

$$f_2(z) = \varphi(\varsigma(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > r.$$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

Итак, каждый из степенных рядов – правильной и главной частей ряда Лорана сходится в своей области сходимости к соответствующей аналитической функции. Если $r < R$, то существует общая область сходимости этих рядов – ***круговое кольцо***

$$r < |z - z_0| < R$$

,

в которой ряд Лорана сходится к аналитической функции:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

Можно ли аналитической в некотором круговом кольце функции сопоставить ряд Лорана, сходящийся к этой функции в данном кольце?

**Теорема.** *Функция* $f(z)$, *аналитическая в круговом кольце* $R_2 < |z - z_0| < R_1$, *однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты $C_n$ для всех $n$ определяются формулой:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так как $z$ - любая точка кольца $R_2 < |z - z_0| < R_1$, то отсюда

следует, что ряд сходится к $f(z)$ внутри данного кольца

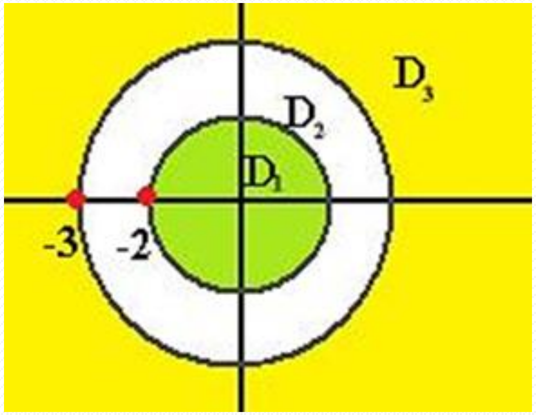
причем в замкнутом кольце $R_2 < \overline{R_2} \le |z - z_0| \le \overline{R_1} < R_1$

ряд сходится к $f(z)$ равномерно.

# Ряд Лорана и его область сходимости.

*Замечание.* Областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке аналитической функции $f(z)$, к которой сходится ряд.

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z+2)}, z_0 = 0$$



# Ряд Лорана и его область сходимости.

*Замечание.* Формула для определения коэффициентов разложения в ряд Лорана не всегда практически удобна. Поэтому часто прибегают к разложению рациональной дроби на простейшие с использованием геометрической прогрессии, а также используют разложение в ряд Тейлора элементарные функции.

# Ряд Лорана и его область сходимости.

**Пример.** Разложить $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана

в кольцах:

а) $0<|z|<1;$

б) $|z|>1;$

в) $0<|z-1|<1.$

Перепишем функцию в виде $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}.$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

а) Так как $|z| < 1$, то второе слагаемое есть сумма убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Здесь главная часть состоит из одного слагаемого $\dfrac{1}{z}$.

# Ряд Лорана и его область сходимости.

б) в этом случае $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots \,.$$

В этом разложении отсутствует регулярная часть.

# Ряд Лорана и его область сходимости.

в) Для случая $0<|z-1|<1$ функцию $f(z)$ также надо привести к сходящейся геометрической прогрессии, но со знаменателем $z-1$:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots.$$

Заметим, что в главной части этого разложения присутствует одно слагаемое

# Ряд Лорана и его область сходимости.

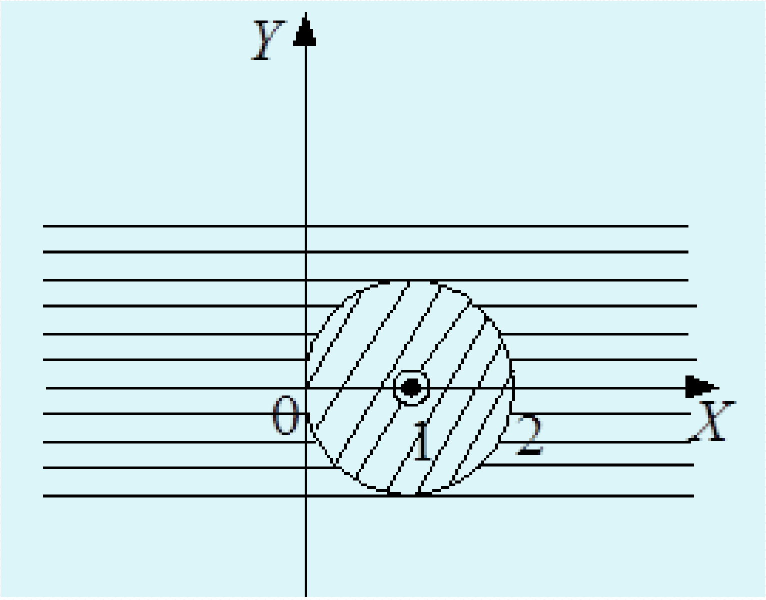
**Пример.** Разложить $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в окрестности

точки $z_0 = 1$ в ряд Лорана (т.е. по степеням $z-1$).

Построим два круговых кольца с центром в точке $z_0 = 1$ :

а) круг «без центра» $0 < |z-1| < 1$;

б) внешность круга $|z-1| > 1$.



# Ряд Лорана и его область сходимости.

а) $0<|z-1|<1;\quad \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1};$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд сходится, так как $|z-1|<1$. Так что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-2)^2-\ldots-(z-1)^2-\ldots,$$

$$C_n=-1\quad(n\geq 0),\ ;\ C_{-1}=-1,\ C_{-2}=C_{-3}=\ldots=C_{-n}=\ldots=0\,.$$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

б) $|z-1|>1$. Здесь имеем

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^n}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^n}+\ldots$$ - сходящийся ряд, так как $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1.$

В итоге $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{(z-1)^3}+\ldots,$

т.е. $C_n=0 \quad n\geq 0,\ C_{-1}=0,\ C_{-2}=C_{-3}=\ldots\ldots=1.$

# Ряд Лорана и его область сходимости.

**Пример.** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$

функцию $\sin\dfrac{z}{z-1}$.

Имеем:

$$\sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1} =$$

$$= \sin 1\left(1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^4\cdot 4!} - \ldots\right) + \cos 1\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} - \frac{1}{5!(z-1)^5} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + (-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}\right].$$

# Изолированные особые точки регулярной функции.

**Определение.** Особая точка $z = z_0$ регулярной функции $f(z)$ называется ***изолированной,*** если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме самой точки $z = z_0$, т.е. если в некоторой окрестности ее $f(z)$ <u>аналитична</u>, кроме самой точки $z = z_0$.

# Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

**Определение.** Точка $z_0$ называется *нулем аналитической функции* $f(z)$ $n-$*го порядка*, или *нулем кратности* $n$,

если $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0,\ C_n \neq 0$.

Тогда разложение имеет вид

$$f(z) = C_n (z - z_0)^n + C_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots \quad .$$

Если $n = 1$, то нуль называется *простым*.

# Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

*Всякая аналитичная в точке* $z_0$ *функция вида*

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z),$$

*где* $n \to 0$ *- целое,* $\varphi(z_0) \neq 0$

*имеет в этой точке нуль порядка* $n$.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

Выясним, как связано поведение $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ с разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

а) Предположим сначала, что в некоторой окрестности точки $z_0$ функция $f(z)$ ограничена, т.е. $\exists M>0$, что в этой окрестности $|f(z)|<M$.

$$\left|C_{-n}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1}d\varsigma\right| \le \frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}2\pi\rho = M\rho^n,$$

т.е. $|C_{-1}| \le M\rho$, $|C_{-2}| \le M\rho^2$ и т.д.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

Так как в качестве $C$ можно взять окружность сколь угодно малого радиуса $\varepsilon$ с центром в $z_0$, то отсюда и следует, что $C_{-1}=0$, $C_{-2}=0$, …, $C_{-n}=0$, т.е. что главная часть ряда отсутствует и разложение имеет вид регулярной части.

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n .$$

Поэтому, если под $f(z_0)$ понимать сумму ряда при $z=z_0$, т.е. положить $f(z_0)=C_0$, то $z_0$ станет устранимой особой точкой функции $f(z)$ или правильной точкой.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

**Пример.**

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5}+\ldots\Rightarrow$$

точка $z_0=0$ - правильная точка, $f(0)=1.$

# Изолированные особые точки регулярной функции.

б) Пусть теперь $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки $z_0$. В этом случае либо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, либо при $z \to z_0$ функция вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

В первом случае точку $z_0$ называют ***полюсом*** функции $f(z)$, во втором – ***существенной особой точкой*** (с.о.т.).

# Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка $z_0$ является полюсом функции $f(z)$,

то в достаточно малой окрестности ее $|f(z)| > M$, $\forall M > 0$

и поэтому $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности $z_0$.

Функция $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ будет аналитичной в этой окрестности,

кроме $z = z_0$. По условию $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} F(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

*Если точка $z_0$ является* ***полюсом функции*** $f(z)$, *то она*

*является* ***нулем функции*** ${}^{1}\!/\!{}_{f(z)}$.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

**Определение.** Точка $z_0$ называвать ***полюсом порядка*** $m$ функции $f(z)$, если эта точка есть *нуль порядка* $m$ для функции $1/f(z)$.

При $m=1$ полюс называется *простым*.

**Определение.** *Точка* $z=z_0$ *является* ***полюсом порядка*** $m$ *функции* $f(z)$, *если для* $f(z)$ *справедливо представление*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

# Изолированные особые точки регулярной функции.

Разложим числитель $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$

в окрестности точки $z=z_0$ в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{C_0+C_1(z-z_0)+\ldots+C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots}{(z-z_0)^m},$$

где $C_0=\psi(z_0)\neq 0$. Отсюда

$$f(z)=C_m+C_{m+1}(z-z_0)+C_{m+2}(z-z_0)^2+\frac{C_{m-1}}{z-z_0}+\frac{C_{m-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_0}{(z-z_0)^m}$$

# Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка $z_0$ - ***полюс порядка*** $m$ ***функции*** $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени выражения $(z - z_0)$ в знаменателях членов главной части разложения.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

*Главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является* ***полюсом.***

*Главная часть ряда Лорана в окрестности* ***с.о.т.*** *содержит бесконечное множество членов, не равных нулю.*

# Изолированные особые точки регулярной функции.

**Теорема (Сохоцкого – Вейерштрасса).** *Если* $z = z_0$ - *с.о.т. функции* $f(z)$,

*то* $\forall A$*, конечного или бесконечного, существует последовательность* $(z_n)$,

*что* $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = A.$

Это означает, что в достаточно малой окрестности некоторой функции она принимает значения, как угодно близкие к любому наперед заданному числу.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

**Примеры.**

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+2)^3};\quad z_0=-2$$ - полюс третьего порядка;

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^2+4}\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$$ - простые полюсы;

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}\Rightarrow z_0=0$$ - полюс 2-го порядка.

# Изолированные особые точки регулярной функции.

***Пример.*** *Для функции* $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, *точка* $z_0 = 0$ - *с.о.т.*,

поскольку ряд Лорана в окрестности этой точки

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots$ содержит бесконечное

число членов в главной своей части.