Теория функций комплексной переменной.

1. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.
2. Основная теорема о вычетах.
3. Вычет относительно полюса.

Тема 11

Ряд Лорана и его область сходимости.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

где z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости, C_n- некоторые комплексные числа.

Этот ряд называется ***рядом Лорана.***

Ряд Лорана и его область сходимости.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

называется ***правильной частью*** или ***регулярной частью*** ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости ***правильной части и главной части*** ряда.

Ряд Лорана и его область сходимости.

Каждый из степенных рядов – правильной и главной частей ряда Лорана сходится в своей области сходимости к соответствующей аналитической функции. Если $r < R$, то существует общая область сходимости этих рядов – ***кругове кольцо***

$$r < |z - z_0| < R$$,

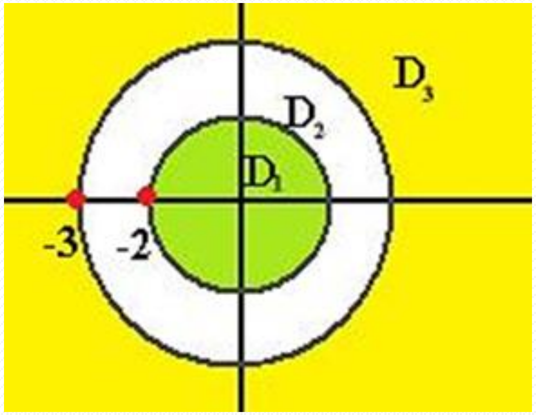
в которой ряд Лорана сходится к аналитической функции:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Замечание. Областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке аналитической функции $f(z)$, к которой сходится ряд.

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z+2)}, z_0 = 0$$



Изолированные особые точки регулярной функции.

Определение. Особая точка $z = z_0$ регулярной функции $f(z)$ называется ***изолированной,*** если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме самой точки $z = z_0$, т.е. если в некоторой окрестности ее $f(z)$ <u>аналитична</u>, кроме самой точки $z = z_0$.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Определение. Точка z_0 называется *нулем аналитической функции* $f(z)$ $n-$*го порядка*, или *нулем кратности* n,

если $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0$, $C_n \neq 0$.

Тогда разложение имеет вид

$$f(z) = C_n (z - z_0)^n + C_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots \quad .$$

Если $n = 1$, то нуль называется *простым*.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Всякая аналитичная в точке z_0 *функция вида*

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z),$$

где $n \to 0$ *- целое,* $\varphi(z_0) \neq 0$

имеет в этой точке нуль порядка n*.*

Изолированные особые точки регулярной функции.

Так как в качестве C можно взять окружность сколь угодно малого радиуса ε с центром в z_0, то отсюда и следует, что $C_{-1}=0,\ C_{-2}=0,\ \ldots,\ C_{-n}=0$, т.е. что главная часть ряда отсутствует и разложение имеет вид регулярной части.

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n .$$

Поэтому, если под $f(z_0)$ понимать сумму ряда при $z=z_0$, т.е. положить $f(z_0)=C_0$, то z_0 станет устранимой особой точкой функции $f(z)$ или правильной точкой.

Изолированные особые точки регулярной функции.

б) Пусть теперь $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки z_0. В этом случае либо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, либо при $z \to z_0$ функция вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

В первом случае точку z_0 называют ***полюсом*** функции $f(z)$, во втором – ***существенной особой точкой*** (с.о.т.).

Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка z_0 является полюсом функции $f(z)$,

то в достаточно малой окрестности ее $|f(z)| > M$, $\forall M > 0$

и поэтому $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0.

Функция $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ будет аналитичной в этой окрестности,

кроме $z = z_0$. По условию $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} F(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

Если точка z_0 является ***полюсом функции*** *$f(z)$, то она является* ***нулем функции*** $1/f(z)$.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Определение. Точка z_0 называвать ***полюсом порядка*** m функции $f(z)$, если эта точка есть *нуль порядка* m для функции $1/f(z)$.

При $m=1$ полюс называется *простым*.

Определение. *Точка* $z=z_0$ *является* ***полюсом порядка*** m *функции* $f(z)$, *если для* $f(z)$ *справедливо представление*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка z_0 - ***полюс порядка*** m ***функции*** $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени выражения $(z - z_0)$ в знаменателях членов главной части разложения.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является ***полюсом.***

Главная часть ряда Лорана в окрестности ***с.о.т.*** *содержит бесконечное множество членов, не равных нулю.*

Изолированные особые точки регулярной функции.

Примеры.

$$f(z)=\frac{e^{z}}{(z+2)^{3}};\quad z_0=-2$$ - полюс третьего порядка;

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^{2}+4}\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$$ - простые полюсы;

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^{3}}\Rightarrow z_0=0$$ - полюс 2-го порядка.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Определение. *Бесконечная удаленная точка* $z=\infty$ *называется* *особой точкой* $f(z)$, если в некоторой окрестности ее, т.е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса, нет других особых точек $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$, будем называть *разложением в окрестности бесконечно удаленной точки*.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Например, ряд

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{3! z^3} + \ldots$$ является разложением $e^{\frac{1}{z}}$

не только в окрестности точки $z = 0$, но также и в окрестности бесконечно удаленных точек.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Пример. *Для функции* $f(z) = \sin\frac{1}{z}$*, точка* $z_0 = 0$ - *с.о.т.*,

поскольку ряд Лорана в окрестности этой точки

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots$ содержит бесконечное

число членов в главной своей части.

Вычет аналитической функции.

Функция $f(z)$ в окрестности изолированной особой

точкой z_0 может быть представлена рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Вычет аналитической функции.

Определение. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

$$\mathrm{Res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=C_{-1}$$

Вычет аналитической функции.

Вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0 совпадает

с коэффициентом c_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана

в окрестности точки z_0: $\operatorname{Res}\left[f(z); z_0\right] = c_{-1}$.

Если точка z_0 - *правильная*, то все коэффициенты

<u>главной части разложения</u> в окрестности этой точки равны

нулю и, значит, вычет функции относительно правильной

точки равен нулю (это следует также из теоремы Коши).

Если z_0 - полюс или с.о.т. $f(z)$, то вычет относительно нее может

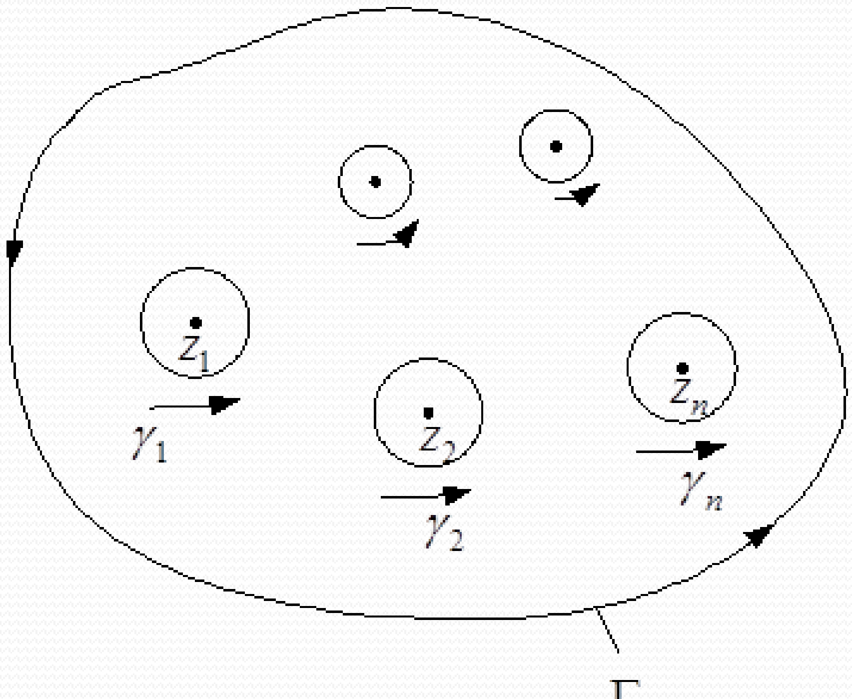
быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю (если $c_{-1} = 0$)

Вычет аналитической функции.

Основная теорема о вычетах. *Величина* $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$ *равна сумме вычетов функции* $f(z)$ *относительно всех особых точек* a_k *этой функции, находящихся внутри контура* Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); a_k\right].$$

Вычет аналитической функции.



Пусть Γ простой замкнутый контур, на котором $f(z)$ аналитична.

И пусть внутри Γ $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n

изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Вычет аналитической функции.

Окружим эти точки лежащим внутри Γ окружностями $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из них находились лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек.

Тогда в силу теоремы Коши для составного контура получим.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} f(z)dz + ... + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_n} f(z)dz,$$

где при интегрировании все контуры обходят против часовой стрелки.

Вычет аналитической функции.

Определение. Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки естественно считать величину $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c} f(z)dz$,

где С – окружность с центром в начале координат столь большого радиуса, что вне этой окружности нет особых точек $f(z)$, отличных от бесконечно удаленной особой точки.

Направление интегрирования выбраны так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева, т.е. движется по часовой стрелке.

Вычет аналитической функции.

Отсюда следует, что если c_{-1} является коэффициентом при $\frac{1}{z}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname{Res}\left[f(z);\infty\right]=-c_{-1}.$$

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю.

Вычет аналитической функции.

Для функции $f(z) = 2 + \dfrac{3}{z}$

точка $z = \infty$ является правильной $\left(f(\infty) = 2 \right)$,

но $c_{-1} = 3$ и, следовательно,

$$\operatorname{Res}\left[f(z); \infty \right] = -3.$$

Вычет аналитической функции.

Если функция имеет конечное число особых точек, то *вычет относительно бесконечно удаленной точки равен взятой с обратным знаком сумме вычетов относительно всех особых точек, расположенных в конечной части плоскости*.

Следовательно, *сумма вычетов относительно всех особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю*.

Вычет аналитической функции.

Если точка z_0 - простой полюс $f(z)$, то окрестности его $f(z)$

представима в виде $$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-z_0},$$

где $\varphi(z)$ - сумма регулярной части ряда Лорана – аналитическая

и тем более непрерывная в точке z_0.

Имеем

$$c_{-1}=(z-z_0)f(z)-(z-z_0)\varphi(z),$$

откуда при $z\to z_0$

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right],$$

Вычет аналитической функции.

так как в силу непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке z_0

существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ и

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)\varphi(z) \right] = 0$$

Таким образом, если z_0 - простой полюс функции $f(z)$,

То $$\operatorname{Res}\left[f(z); z_0 \right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right].$$

Вычет аналитической функции.

Пример. Вычислить вычет функции $\dfrac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z_0 = 2$.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z-2};2\right] = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = 4.$$

Вычет аналитической функции.

Для простого полюса z_0 функции $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$

вычет можно вычислить по формуле

$$\operatorname{Res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z-2};2\right]=\frac{f_1(2)}{f_2'(2)}=\frac{2^2}{1}=4.$$

Вычет аналитической функции.

Пример. Вычислить $J = \oint\limits_{|z|=3} \dfrac{(z+1)dz}{z^2+4}$.

Δ Особые точки $z_{1,2} = \pm 2i$ и обе они внутри контура $|z| = 3$. Тогда

$$\operatorname{Res}[f(z);-2i] = \left.\frac{z+1}{\left(z^2+4\right)'}\right|_{z=-2i} = -\frac{1-2i}{4i};$$

$$\operatorname{Res}[f(z);2i] = \frac{z+1}{\left(z^2+4\right)'} = \frac{1+2i}{4i};$$

тогда $J = 2\pi i\left(\dfrac{1+2i}{4i} - \dfrac{1-2i}{4i}\right) = 2\pi i$. ▲