ЧИСЛОВЫЕ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.
Признаки сходимости числовых рядов.

Тема 9

Числовые ряды

Пусть дана числовая последовательность

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}.$$

<u>Определение</u>

Числовым рядом называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

<u>Упрощенно</u> : ***ряд – это «бесконечная» сумма.***

Числовые ряды

Вместе с последовательностью $\{a_n\}$ будем рассматривать числовую ***последовательностью частичных сумм ряда*** $\{S_n\}$, которая строится следующим образом:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots$$

Если предел последовательности $\{S_n\}$ существует и конечен, то он называется ***суммой ряда:***

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

и ряд называется ***сходящимся.***

Числовые ряды

В оставшихся двух ситуациях - когда предел $\{S_n\}$ бесконечен или вообще не существует, ряд называется ***расходящимся***. Понятие суммы для расходящегося ряда не определяется.

Нахождение суммы ряда по определения как *предела последовательности частичных сумм* $\{S_n\}$ - процесс трудоемкий, требующий получения формулы общего члена этой последовательности.

Числовые ряды

Пример 1 Геометрическая прогрессия $\{a_n\} = \{q^{n-1}\}$.

Если $|q| \neq 1$, тогда

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{(1 - q^n)}{1 - q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n) =$$

$$= \begin{cases} \infty, \quad \text{если} \quad |q| > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд расходится}, \\ \dfrac{1}{1-q}, \quad \text{если} \quad |q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд сходится}. \end{cases}$$

Числовые ряды

Пример 2 Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+....+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+...$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2}$$

Числовые ряды

Зададимся вопросом, можно ли, **не составляя** последовательности частичных сумм , исследовать сходимость числового ряда ?

Это можно сделать, используя ***свойства*** числовых рядов и различные ***признаки сходимости*** и ***сравнения*** рядов.

Главный их них называется ***необходимым условием сходимости:***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$!!!!

Числовые ряды

Если для числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или такого предела вообще не существует, то ряд расходится.

В такой формулировке ***необходимое условие сходимости ряда***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

равносильно ***достаточному условию расходимости ряда.***

Числовые ряды

Простейшие свойства числовых рядов.

1. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам ***A*** и ***B*** соответственно, то сумма и разность этих рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ тоже сходится к суммам ***A* ± *B*** соответственно.

2. При умножении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу, не равную нулю, сходимость (расходимость) **не нарушается:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n \Leftrightarrow C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Числовые ряды

Ряды Дирихле (обобщенные гармонические ряды) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходятся при $p > 1$.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Числовые ряды

Признак сравнения в форме неравенства.

Пусть даны два знакоположительных ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем для любого номера $n \in N$

n-ые члены рядов связаны неравенством

$$0 < a_n \le b_n$$

Тогда ***из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда*** ,

а из ***расходимости «меньшего» ряда следует расходимость «большего» ряда.***

Числовые ряды

Признак сравнения в форме неравенства.

«Больший ряд» называется *мажорирующим* рядом, а «меньший» – *мажорируемым*.

Поэтому признак может быть сформулирован как:

из сходимости мажорирующего ряда следует сходимость мажорируемого ряда,

и, наоборот,

из расходимости мажорируемого ряда следует расходимость мажорирующего ряда.

Числовые ряды

Пример 3. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+4}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Очевидно, что $\frac{1}{3n^2+4}<\frac{1}{n^2}$ для любого n .

Значит по *признаку сравнения* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+4}$ тоже ***сходится***.

Числовые ряды

Пример 4. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} .$$

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Очевидно, что $\ln n < n$ для любого $n \geq 2$.

Значит $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

Так как гармонический ряд расходится, то

по признаку сравнения ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже ***расходится***.

Числовые ряды

Признак сравнения в предельной форме.

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$,

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, т.е. $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$,

то в смысле сходимости оба ряда ведут себя одинаково.

Числовые ряды

Пример 5. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Очевидно, что $\frac{1}{n^2-2} > \frac{1}{n^2}$ для любого $n \geq 2$ и

<u>признак сравнения в форме неравенств применить не удается</u>.

Но предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/(n^2-2)} = 1$ и по предельному

признаку ряды ведут себя одинаково, т.е. ***оба сходятся***!

Числовые ряды

Пример 6.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{5n^3 - 6n + 4}{\sqrt{n^8 + 7n^2 + 15}}$$

Так как

$$a_n = \frac{5n^3 - 6n + 4}{\sqrt{n^8 + 7n^2 + 15}} \sim \frac{5n^3}{\sqrt{n^8}} = \frac{5n^3}{n^4} = \frac{5}{n}$$

т.е. сравниваем данный ряд с гармоническим рядом и ряд ***расходится***.

Числовые ряды

Пример 7.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{arctg(n^3 \cdot 2^n \cdot (n-1)!)}{n + \ln 10n + 3 \cdot 7^{n+1}}$$

Так как

$$a_n = \frac{arctg(n^3 \cdot 2^n \cdot (n-1)!)}{n + \ln 10n + 3 \cdot 7^{n+1}} \sim \frac{\pi / 2}{3 \cdot 7^{n+1}} = \frac{\pi}{2 \cdot 3 \cdot 7} \cdot (\frac{1}{7})^n = b_1 q^n$$

т.е. сравниваем данный ряд с геометрической прогрессией с знаменателем **1/7**, т.е. ряд ***сходится***.

Числовые ряды

Признак Д'Аламбера

Пусть для <u>знакоположительного</u> ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Тогда:

- 1) если $l > 1$, ряд *расходится*;
- 2) если $l < 1$, ряд *сходится*.

В случае $l = 1$ *возможна как сходимость, так и расходимость ряда* .

Числовые ряды

Доказательство. Предположим, существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. По определению предела это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер m, что для всех членов последовательности $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ с номерами $n>m$, выполняется неравенство:

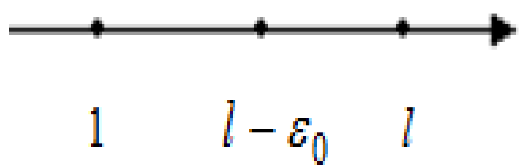
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<\varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\varepsilon+l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (l-\varepsilon)a_n<a_{n+1}<(l+\varepsilon)a_n.$$

Числовые ряды

$$a_{n+1} > (l-\varepsilon)a_n.$$

Так как $l > 1$, то число ε_0 можно выбрать таким, что $l - \varepsilon_0 > 1$.



Следовательно,

$$a_{n+1} > \underbrace{(l-\varepsilon_0)}_{>1}a_n > a_n,$$

т.е. члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно возрастают. Поскольку, к тому же, $a_n > 0$, то

$\lim a_n \neq 0$, а значит, ряд $\sum\limits^{\infty} a_n$ расходится.

Числовые ряды

Пусть $l<1$. Рассмотрим правую часть неравенства (**): $a_{n+1}<(l+\varepsilon)a_n$. Так как $l<1$, то ε_1 можно взять таким, чтобы выполнялось неравенство $l+\varepsilon_1<1$. Обозначим $l+\varepsilon_1=q$, $q<1$. Тогда

$$a_{n+1}<q\cdot a_n,$$

$$a_{n+2}<q\cdot a_{n+1}<q^2\cdot a_n,$$

$$\ldots$$

$$a_{n+k}<q^k\cdot a_n,$$

$$\ldots$$

что означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$ мажорируется сходящейся прогрессией $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n\cdot q^k$.

Следовательно, по теореме 2.1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$ сходится. Из этого в силу свойства 3°

рядов (§1) следует, что и первоначальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

Числовые ряды

Признак Даламбера удобно применять для исследования рядов, n - ые члены которых содержат

факториалы: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots . \cdot (n-1) \cdot n$,

степенные или показательные множители:

$$a_n = n^p\,, \quad a_n = p^n$$

либо имеют следующий вид: $a_n = a_{n-1} \cdot f(n)$

Числовые ряды

Пример 8.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{C^n}{n!}, \quad C > 0$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{C^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{C^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n+1} = 0 < 1$$

следовательно, ***ряд сходится***.

Числовые ряды

Радикальный признак Коши

Пусть для <u>знакоположительного</u> ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Тогда:

- 1) если $l > 1$, ряд *расходится*;
- 2) если $l < 1$, ряд *сходится*.

В случае $l = 1$ *возможна как сходимость, так и расходимость ряда* .

Числовые ряды

Замечания.

Из теории последовательностей известно, что если для последовательности $\{a_n\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

, то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$$

Поэтому, если в результате применения признака Даламбера окажется, что предел равен 1, то и предел из признака Коши тоже равен 1.

Однако, в определенном смысле признак Коши сильнее признака Даламбера.

Числовые ряды

Пример 9.

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^{5n}$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3} < 1$$

следовательно, ***ряд сходится***.

Числовые ряды

Пример.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{если } n - \text{нечетно;} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{если } n - \text{четно.} \end{cases}$$

Пусть n – нечетно $\Rightarrow$ $n+1$ – четно, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{4}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{n-\text{неч.}} \frac{4}{3}.$$

Пусть n – четно $\Rightarrow$ $n+1$ – нечетно, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{n-\text{чет.}} \frac{1}{3}.$$ Следовательно, не существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, а значит, признак Даламбера неприменим.

Попытаемся применить к этому ряду признак Коши.

Если n – нечетно, то $\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$

Если n – четно, то $\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$

Числовые ряды

При применении признак Коши для исследования сходимости рядов, n - ые члены которых содержат факториалы, может оказаться полезной формула Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\,e^{\frac{\theta}{12n}} \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = O(n^{n+\frac{1}{2}})$$

Числовые ряды

Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует такая ***неотрицательная, непрерывная, монотонно убывающая функция*** $f(x)$, определенная на промежутке $[1,+\infty)$, для которой $f(n) = a_n$ для любого $n \in N$, то исследуемый ряд *сходится* в **том и только том случае**, когда сходится несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Числовые ряды

С помощью интегрального признака получается новая серия эталонны рядов:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in R$, – обобщенные гармонические ряды (ряды Дирихле).

Исследуем, при каких α эти ряды сходятся.

Пусть $\alpha < 0$, тогда $-\alpha > 0$, следовательно $a_n = n^{-\alpha}$, а значит,

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ – в этом случае ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходятся.

Аналогично, для $\alpha = 0$ $a_n = \frac{1}{n^0} = 1$, следовательно $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, а значит, ряд расходится.

1

Числовые ряды

Аналогично, для $\alpha = 0$ $a_n = \dfrac{1}{n^0} = 1$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, а значит, ряд расходится.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Ведем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 2.5, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится в том и только том случае, когда несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to 0} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha > 1, \\ \infty, & \text{если} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом,