ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Тема 9

Числовые ряды

Определение **Числовым рядом** называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если предел существует предел *последовательности частичных сумм,* то он называется **суммой ряда**.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Необходимое условие сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Функциональные ряды

Пусть $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве X.

Определение

Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называют ***функциональным рядом*** с областью определения X .

Функциональные ряды

Пусть точка x_0 – точка из области определения ряда, тогда при подстановки этой точки ряд превращается в обычный **числовой ряд**, который может либо сходиться, либо расходиться.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** функционального ряда, а множество всех таких точек образует ***область сходимости*** ряда D

Очевидно, что D является подмножеством области определения ряда X.

Функциональные ряды

Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится в области $D \in X$, то для любого $x_0 \in D$

определена **функция** $S(x)$ называемая ***суммой***

функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

Функциональные ряды

По аналогии с числовыми рядами функциональный ряд можно представить в виде:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где $$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

- ***частичная сумма ряда***,

а $$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

- ***частичный остаток ряда.***

Функциональные ряды

Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится в некоторой области, то он сходится к функции :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = f(x)$$

Но тогда можно рассмотреть **обратную задачу**:

Найти ряд, суммой которого является заданная функция:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Функциональные ряды

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится в некоторой области $D_a \subseteq D$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** в этой области, а сама область $D_a \subseteq D$ называется ***областью абсолютной сходимости ряда.***

Функциональные ряды

Примеры:

1. $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}},\qquad X=R\setminus\{0\}$$

2. $$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx,\qquad X=R$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\cdot\sin x}}$$

Функциональные ряды

1. $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}, \qquad X=R\setminus\{0\}$$

Это ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q(x)=-\dfrac{1}{x}$.

Поэтому ряд сходится, если $|\,q(x)\,|=\left|\,\dfrac{1}{x}\,\right|<1$ или $|\,x\,|>1$

и **область сходимости ряда** - $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Функциональные ряды

2.

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \quad X = R$$

Пусть $x_k = \pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$, тогда $u_n(x_k) = \sin n\pi k = 0$,

т.е. в точках $x_k = \pi k$ ряд сходится.

В любой другой точке ряд расходится.

Область сходимости : $D = \left\{ \pi k \mid k \in \mathrm{Z} \right\}$

Функциональные ряды

3. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n\cdot\sin x}}$ на сходимость, используя

признак Коши:

$$|u_n(x)| = \frac{1}{e^{n\cdot\sin x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \frac{1}{e^{\sin x}} = e^{-\sin x} = l(x).$$

Для определения **области абсолютной сходимости** решим неравенство:

$$e^{-\sin x} < 1$$

$$-\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Функциональные ряды

Решим уравнение: $e^{-\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$-\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow \quad x = \pi k, k \in Z$$

При подстановке $x_k = \pi k$ в исходный ряд, получаем

числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который, как известно,

является <u>**расходящимся**</u>.

Таким образом, **область абсолютной сходимости** совпадает с **областью сходимости**:

$$D_a = D = \bigcup_{n \in Z} (2\pi n; \pi + 2\pi n)$$

Функциональные ряды

Из курса математического анализа известно, что если функции:

- ***непрерывны в точке,***
- ***дифференцируемы в точке***,
- ***интегрируемы на отрезке,***

то их **сумма** тоже

- ***непрерывна в точке,***
- ***дифференцируема в точке***,
- ***интегрируема на отрезке.***

В теории рядов естественно возникает вопрос:

переносятся ли свойства n- ого члена ряда функционального ряда на его сумму ?

Функциональные ряды

Пример. Рассмотрим функциональный ряд,

где $$u_n(x) = x^n - x^{n-1}.$$

Очевидно, что функция $u_n(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Покажем, что сумма этого ряда определена на отрезке $[0,1]$, но **не является непрерывной.**

Функциональные ряды

Составим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = (x-1) + (x^2 - x) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n - 1$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - 1) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что **полученная сумма ряда разрывна на отрезке** $[0,1]$.

Функциональные ряды

Основным условием, которое позволяет «передать» **свойства *n*- *ого* члена ряда** **сумме** ряда, является ***равномерная сходимость этого ряда.***

Функциональные ряды

Известно, что если функциональный ряд **поточечно** сходится на промежутке (т.е. сходится в каждой точке x_0 этого промежутка), то для любого сколь угодно малого **ε** (заданная точность вычислений) найдется такой номер ***N***, зависящий от точности **ε** и числа x_0, что все **частичные суммы, номера которых больше *N***, приближают сумму ряда с заданной точностью , т.е.

$$|S_n(x_o) - S(x_o)| < \varepsilon$$

Функциональные ряды

Если взять другое x_0 , то описанного в предыдущих рассуждениях числа N <u>может не хватить для обеспечения заданной точности</u> **ε** в точке x_0 .

Это и означает, что сходимость ряда на промежутке является **неравномерной по *x***, то есть она зависит от конкретной точки x_0 из множества D .

Функциональные ряды

Определение.

Ряд **сходится равномерно** к своей сумме $S(x)$ на промежутке D, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N (не зависящий от x из множества D), что для всех частичных сумм $S_n(x)$ номера которых больше N, неравенство

$$| S_n(x) - S(x) | < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех x_0 из множества D.

Функциональные ряды

Определение.

Ряд называется **равномерно сходящимся** к сумме $S(x)$ на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, *зависящий только от* **ε** и *не зависящий от x*, что для любого остатка ряда, номер которого больше N, выполняется неравенство

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $\boldsymbol{x}$ из D одновременно.

Функциональные ряды

Для исследования **равномерной сходимости функционального ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

удобно использовать **признак Вейерштрасса –** **достаточный признак равномерной сходимости ряда**.

Функциональные ряды

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$, составленного из модулей функций $u_n(x)$, на множестве D существует мажорирующий сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($|u_n(x)| \leq a_n$), то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **сходится на множестве D равномерно**.

Функциональные ряды

Таким образом, формально:

из выполнения в некоторой области D неравенства

$$|u_n(x)| \le a_n$$

для любого ***n*** и любого ***x*** и сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует **равномерная сходимость функционального ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на D.

Функциональные ряды

Пример. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на промежутке D :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}, \quad D = R$$

Так как $|\sin nx| \le 1$ для любого $\boldsymbol{x}$, а $\sqrt[3]{n^4 + x^2} \ge \sqrt[3]{n^4 + 0}$

то

$$|u_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}, \quad \alpha = \frac{4}{3} > 1$$

следовательно, мажорирующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится.

Из его сходимости в силу признака Вейерштрасса следует **равномерная сходимость исходного ряда**.

Функциональные ряды

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Теорема о почленном переходе к пределу.

2. Теорема о почленном интегрировании ряда.

3. Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема о почленном переходе к пределу

Теорема. Сумма $S(x)$ равномерно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывных функций $u_n(x)$ есть функция, непрерывная на X.

Отсюда следует, что если $x_0 \in X$, то

$\lim\limits_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$, т.е. для непрерывных функций $u_n(x)$ сходящегося ряда возможен почленный переход к пределу.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема о почленном интегрировании ряда

Теорема. Если ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$, где $u_k(x)$ непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд $\int\limits_a^b u_1(x)dx+\int\limits_a^b u_2(x)dx\ldots$ сходится и имеет сумму $\int\limits_a^b S(x)dx\ \forall[a,b]\subset \mathrm{X}$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема о почленном дифференцировании ряда

Теорема. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \ldots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет сумму $S(x)$, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в X, $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и справедлива формула $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

<u>Пример.</u>

9) Законно ли применение к ряду $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2^2}\cos 3x + \frac{1}{2^3}\cos 4x + \ldots$ теорема об интегрировании функциональных рядов в промежутке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$?

Решение: члены данного ряда при любом x мажорируются бесконечно убывающей геометрической прогрессией $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, поэтому данный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно при $x \in (-\infty, \infty)$ и, следовательно, к нему можно применить теорему об интегрировании рядов для любого конечного промежутка, в частности, и для $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

10) Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

составленный из производных членов исходного ряда. Т.е. это геометрическая прогрессия, то его сумма $S = \frac{1}{1+x^2}, |x|<1$. Т.к. члены ряда $|x^{2n}| \leq q^{2n}$, а числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$, его мажорирующий, сходится при $0<q<1$. Тогда ряд $1 - x^2 + x^4 - \ldots$ можно почленно проинтегрировать. В результате получим $arctg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, причем $|x|<1$.

11) Можно ли к ряду $arctg\,x + arctg\frac{x}{2\sqrt{2}} + arctg\frac{x}{3\sqrt{3}} + \ldots + arctg\frac{x}{n\sqrt{n}} + \ldots$ применить теорему о почленном дифференцировании рядов?

Решение. Сравним данный ряд со сходящимся рядом $x + \frac{x}{2^{3/2}} + \frac{x}{3^{3/2}} + \ldots + \frac{x}{n^{3/2}} + \ldots$ (при любом фиксированном x). Тогда $u_n(x) = arctg\frac{x}{n^{3/2}}$, $v_n(x) = \frac{x}{n^{3/2}}$. Т.к. $arctg\,\alpha$ и α эквивалентные бесконечно малые, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = 1$ и по второму признаку сравнения заключаем, что исходный ряд сходится. Найдем производную общего члена данного ряда $u_n'(x) = \frac{1/n^{3/2}}{1+\frac{x^2}{n^3}} = \frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}$. Ряд из производных мажорируется $\frac{1}{x^2+1} + \frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3} + \frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3} < 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \ldots$ сходящимся рядом. Т.е. ряд из производных сходится равномерно на R. Теорема может быть применена.