Решение типового варианта

Ряды

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) либо докажите расходимость этого ряда.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{n^2-n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+7^n}{14^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^e$.

Решение

1. Представим n-й член $a_n = \dfrac{2}{4n^2+8n+3}$ в виде суммы простых дробей, учитывая, что $4n^2+8n+3 = 4\left(n+\dfrac{3}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = (2n+3)(2n+1)$:

$$\frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{A}{2n+3} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1)+B(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Тогда $A(2n+1)+B(2n+3)=2$. При $n=-\dfrac{1}{2}$ будем иметь $B=1$, а при $n=-\dfrac{3}{2}$ получим $A=-1$.

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right).$$

Составим n-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+3}\right) =$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3} = 1-\frac{1}{2n+3}.$$

Тогда сумма данного ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right) = 1.$$

2. Воспользуемся достаточным условием расходимости знакоположительных рядов, для чего найдем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} e^{n^2-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{2} = e^{-1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, данный ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{14^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Исходный числовой ряд является суммой двух рядов, составленных из членов убывающих геометрических прогрессий со знаменателями $q_1 = \frac{1}{7} < 1$ и $q_2 = \frac{1}{2} < 1$. Тогда сумма исходного ряда

$$S = S_1 + S_2 = \frac{b_1}{1-q_1} + \frac{b_2}{1-q_2} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}:\frac{6}{7} + \frac{1}{2}:\frac{1}{2} = 1\frac{1}{6}.$$

4. Составим последовательность частичных сумм данного ряда:

$S_1 = a_1 = e^e,$

$S_2 = a_1 + a_2 = e^e - e^e = 0,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = e^e,$

$S_4 = 0, \ldots .$

Т.о. $S_n = \left\{e^e;\, 0;\, e^e;\, 0; \ldots\right\}.$

Очевидно, что последовательность S_n предела не имеет, что говорит о расходимости данного ряда.

Задание 2

Исследуйте сходимость числового ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\sin\frac{1}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{n^4}$.

Решение

1. Для исследования сходимости данного ряда используем признак

сравнения в предельной форме. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакоположительные и $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Для сравнения с данным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \sin\frac{1}{n+2}$ возьмем обобщенный гармонический ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, который является сходящимся $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$.

Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}} \sin\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n+2}}{\sqrt{n+3}}$.

Для вычисления предела воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, из которого следует, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$. В нашем случае $\sin\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n+2}$ при $n \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n+2}}{\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = 1 \neq 0.$$

Значит, исследуемый ряд сходится.

2. Для исследования сходимости данного ряда используем интегральный признак Коши: если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно убывают и функция $y = f(x)$, непрерывная при $x \geq 1$, такова, что $f(n) = a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Так как $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$, то $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши.

Вычислим

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}}dx = \begin{bmatrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^{\frac{7}{3}}}, v=\int dv=\int\dfrac{dx}{x^{\frac{7}{3}}}=-\dfrac{3}{4\cdot x^{\frac{4}{3}}} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{\ln x}{x^{\frac{4}{3}}}\Bigg|_1^b + \frac{3}{4}\int_1^b\frac{dx}{x^{\frac{7}{3}}}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{3}{4}\ln 1 - \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} - \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{9}{16}\right) = -\frac{3}{4}\lim_{b\to+\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} - \frac{9}{16}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{9}{16}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{b^{\frac{4}{3}}} = 0$. Рассмотрим $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}}$. Для его вычисления используем правило Лопиталя:

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{4}{3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{b\to+\infty}\frac{(\ln b)'}{(b^{4/3})'} = \lim_{b\to+\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{4}{3}\cdot b^{\frac{1}{3}}} = \lim_{b\to+\infty}\frac{3}{4b^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Таким образом, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^7}}dx = \frac{9}{16}$, значит, сходящимся является и исследуемый ряд.

3. Для исследования сходимости данного ряда используем признак Д'Аламбера: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд и $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при 1) $q<1$ ряд сходится; 2) $q>1$ ряд расходится; 3) $q=1$ необходимы дополнительные исследования.

Так как $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{n^4}$, то $a_{n+1} = \dfrac{(2(n+1)+3)!}{(n+1)^4} = \dfrac{(2n+5)!}{(n+1)^4}$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)!n^4}{(n+1)^4\cdot(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!(2n+4)\cdot(2n+5)\cdot n^4}{n^4\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4\cdot(2n+3)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(2n+5)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4}=\infty>1.$$

Значит, исследуемый ряд расходится.

Задание 3

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)\ln n}$.

Найдите его сумму с точностью 0,01 в случае его абсолютной сходимости.

Решение

1. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}\right|=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ и исследуем его сходимость.

Так как $4n-7>3n-5,\ \forall n\geq 3$, то

$$\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}<\frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}. \qquad (2)$$

Исследуем сходимость мажорирующего ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ интегральным признаком.

Положим $f(x)=\dfrac{1}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}$ для $x\in[3;\infty]$. Убедимся в том, что условия интегрального признака сходимости выполняются для функции $f(x)$ на промежутке $[3;\infty]$. Исследуем монотонность функции $f(x)$ с помощью производной:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}\right)'=-\frac{(3x-5)'\ln^2(3x-5)-(3x-5)(\ln^2(3x-5))'}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)}=$$

$$=-\frac{3\ln^2(3x-5)-(3x-5)\cdot 2\ln(3x-5)\cdot\dfrac{1}{3x-5}\cdot 3}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)}=$$

$$=-\frac{3\ln(3x-5)(\ln(3x-5)-2)}{(3x-5)^2\ln^4(3x-5)}=\frac{6-3\ln(3x-5)}{(3x-5)^2\ln^3(3x-5)}.$$

$f'(x)<0\ \ \forall x\in[3;+\infty)$, следовательно, функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[3;+\infty)$. Кроме того $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на этом промежутке.

Таким образом, условия интегрального признака для функции $f(x)$ на промежутке $[3;+\infty)$ выполнены.

Исследуем теперь сходимость несобственного интеграла

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_3^{b}\frac{d(\ln(3x-5))}{\ln^2(3x-5)}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln(3x-5)}\bigg|_3^b=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(3b-5)}-\frac{1}{\ln 4}\right)=\frac{1}{6\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ тоже сходится. В таком случае из неравенства (2) по признаку сравнения вытекает сходимость мажорируемого ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

Таким образом, окончательно получаем: исходный ряд

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ сходится абсолютно.

Остается найти его сумму S с точностью 0,01. Известно, что $S=S_n+r_n$, где r_n – остаточный член ряда, S_n – n-я частичная сумма. Как следует из признака Лейбница, $|r_n|\le|a_{n+1}|$. Найдем n, при котором $|a_{n+1}|\le 0{,}01$. Неравенство $\dfrac{1}{(3n-2)\ln^2(4n-3)}\le 0{,}01$ справедливо при $n\ge 5$. Значит, в соответствии с условием сумма данного ряда

$$S\approx S_5=-\frac{1}{4\ln^2 5}+\frac{1}{7\ln^2 11}-\frac{1}{10\ln^2 13}=$$

$$=-0{,}09651+0{,}02485-0{,}00958=-0{,}95.$$

2. Исследуем абсолютную сходимость данного ряда. Ряд из модулей его членов имеет вид $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

Так как $\frac{1}{(3n-1)\ln n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{3n\ln n}$ и $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{3x\ln x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to\infty}\ln|\ln x|\Big|_{2}^{b}=\infty,$ то ряд из модулей расходится. Это значит, что ряд не является абсолютно сходящимся. Проверим, сходится ли он условно. Поскольку для исходного знакочередующегося ряда выполнен признак Лейбница:

1) $\frac{1}{5\ln 2}>\frac{1}{8\ln 3}>\ldots>\frac{1}{(3n-1)\ln n}>\frac{1}{(3n+2)\ln(n+1)}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}=0,$

то он сходится условно.

Задание 4

Найдите интервал и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+4)\cdot 4^n}$. Укажите, какими свойствами обладает сумма этого ряда в интервале сходимости.

Решение

Для нахождения радиуса сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ воспользуемся формулой $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Так как $c_n=\frac{1}{(n+4)\cdot 4^n}$, $c_{n+1}=\frac{1}{(n+5)\cdot 4^{n+1}}$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+5)\cdot 4^{n+1}}{(n+4)\cdot 4^n}=4$.

Следовательно, интервал сходимости ряда определяется неравенством $|x-6|<4\Leftrightarrow -4<x-6<4\Leftrightarrow 2<x<10$, т. е. $x\in(2;10)$.

Исследуем поведение ряда на границах этого интервала.

При $x=2$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$.

Исследуем его сходимость с помощью признака Лейбница: если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ выполняются два условия

1) $u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

то этот ряд сходится.

Проверим эти условия:

1) $u_n = \dfrac{1}{n+4}$: $\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{6} > \ldots > \dfrac{1}{n+4} > \ldots$. Первое из условий выполняется.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+4} = 0$ – верно.

Таким образом, по признаку Лейбница данный ряд сходится. Следовательно, точку $x = 2$ нужно присоединить к интервалу сходимости.

Выясним, является ли эта сходимость абсолютной или условной.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+4}$, составленный из модулей членов данного ряда.

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме и сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который является расходящимся:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+4}$ расходится, а значит, исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+4}$ сходится условно.

При $x = 10$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+4}$, который, как было показано выше, является расходящимся.

Значит, точка $x = 10$ не входит в область сходимости.

Таким образом, областью сходимости ряда является промежуток $x \in [2;10)$; областью абсолютной сходимости – интервал $(2;10)$. Отметим, что в области сходимости сумма степенного ряда является непрерывной, дифференцируемой и интегрируемой функцией.

Ответ: область сходимости – $[2;10)$; область абсолютной сходимости – $(2;10)$.

Задание 5

Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ при $x \in \mathbf{R}$. Обоснуйте, обладает ли сумма ряда свойством непрерывности на этом промежутке.

Решение

Напомним признак Вейерштрасса: если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области D мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т. е. выполняется неравенство $|u_n(x)| \le a_n \quad \forall x \in X$, то он равномерно сходится в этой области.

Рассматриваемый функциональный ряд на множестве $D = \mathbf{R}$ мажорируется сходящимся числовым рядом с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, так как для $\forall x \in \mathbf{R}$ верно: $|\cos(nx)| \le 1$ и $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$. Значит, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ является равномерно сходящимся на $\mathbf{R}$.

При этом сумма ряда является непрерывной функцией на $\mathbf{R}$, так как членами ряда являются непрерывные функции и ряд сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$.

Задание 6

Найдите область сходимости и сумму степенного ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{4^n \cdot 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-2) \cdot x^{3n-1}$.

Решение

1. Для нахождения области сходимости степенного ряда с «пропусками» (некоторые коэффициенты c_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot x^n$ равны нулю) воспользуемся признаком Д'Аламбера.

Так как $u_n(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{4^n \cdot 2n}$, а $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{4^{n+1} \cdot 2(n+1)}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1} \cdot 4^n \cdot 2n}{4^{n+1} \cdot 2(n+1) \cdot x^{2n-1}}\right| = \frac{x^2}{4}.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\dfrac{x^2}{4} < 1$, т. е. $|x| < 2$. Значит, $(-2; 2)$ – интервал сходимости ряда.

Исследуем поведение ряда в граничных точках.

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным при решении задания 4, заключаем, что точки $x=-2$ и $x=2$ являются точками расходимости данного степенного ряда.

Для нахождения суммы степенного ряда запишем его в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}S_1(x)$, где $S_1(x)$ – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}$ в интервале сходимости (–2; 2).

Так как любой степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в своей области сходимости является равномерно сходящимся, то он допускает почленное дифференцирование, при этом интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ остается тем же, что и у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Таким образом,

$$S_1^{/}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}\right)^{/}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{4^n\cdot 2n}\right)^{/}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n}=$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{4^2}+\frac{x^5}{4^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{4^n}+\ldots\ .$$

При $|x|<2$ данный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{x}{4}$ и знаменателем $q=\frac{x^2}{4}<1$, а значит $S_1^{/}(x)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{4-x^2}$.

Для нахождения суммы $S_1(x)$ проинтегрируем $S_1^{/}(x)$:

$$S_1(x)=\int\frac{xdx}{4-x^2}=\left\{\begin{array}{l}4-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\dfrac{dt}{2}\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+C.$$

Найдем C, исходя из условия $S_1(0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{0^{2n}}{4^n\cdot 2n}=0$. Тогда

$$0=-\frac{1}{2}\ln|4-0|+C \;\Rightarrow\; C=\frac{1}{2}\ln 4, \text{ т. е. } C=\ln 2.$$

Следовательно, сумма исходного ряда равна

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n\cdot 2n}=\frac{1}{x}\cdot S_1(x)=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+\ln 2\right)=-\frac{1}{2x}\ln\left|4-x^2\right|+\frac{\ln 2}{x}.$$

Таким образом, $S(x)=-\frac{1}{2x}\ln\left|4-x^2\right|,\ x\neq 0;\ S(x)=0$ при $x=0$.

2. Для нахождения области сходимости степенного ряда с «пропусками» воспользуемся признаком Д'Аламбера.

Так как $u_n(x)=(3n-2)x^{3n-1}$, а $u_{n+1}(x)=(3n+1)x^{3n+2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+2}\cdot(3n+1)}{(3n-2)\cdot x^{3n-1}}\right|=\left|x^3\right|.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\left|x^3\right|<1$, т. е. $|x|<1$. Значит, $(-1;1)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение ряда в граничных точках.

При $x=\pm 1$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-2)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-2)\cdot(-1)^{3n-1}$ будут расходящимися, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости числовых рядов: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Значит, область сходимости исходного ряда – интервал $(-1;1)$.

Для нахождения суммы степенного ряда запишем его в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}=x^2S_1(x),$$

где $S_1(x)$ – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}$ в интервале сходимости $(-1;1)$.

Так как степенной ряд в своей области сходимости является равномерно сходящимся, то он допускает почленное интегрирование, при этом полученный после интегрирования степенной ряд по-прежнему имеет интервал сходимости $(-1;1)$.

Таким образом,

$$S_2(x)=\int S_1(x)dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-3}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int(3n-2)x^{3n-3}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-2}=x+x^4+\ldots+x^{3n-2}+\ldots .$$

При $|x|<1$ данный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = x$ и знаменателем $q = x^3$: $|q| = |x^3| < 1$, а значит, $S_2(x) = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{x}{1-x^3}$.

Для нахождения суммы $S_1(x)$ продифференцируем $S_2(x)$:

$$S_1(x) = S_2^{/}(x) = \left(\frac{x}{1-x^3}\right)^{/} = \frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}.$$

Следовательно, сумма исходного ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)x^{3n-1} = x^2 \cdot S_1(x) = \frac{x^2(2x^3+1)}{(1-x^3)^2}.$$

Ответ: $S(x) = \dfrac{x^2(2x^3+1)}{(1-x^3)^2}, \quad x \in (-1;1)$.

Задание 7

Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$, разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Укажите число членов числового ряда, полученного после интегрирования степенного ряда, необходимых для достижения точности вычислений с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение

Поскольку для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}$ не существует первообразной, выражающейся через элементарные функции, разложим эту функцию в ряд Маклорена. После подстановки $t = \dfrac{x}{5}$ в ряд Маклорена функции

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \ldots, \quad t \in (-1;\,1],$$

получаем ряд

$$\ln\left(1+\frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5} - \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^n}{n} + \ldots\,, \quad \frac{x}{5} \in (-1;\,1].$$

Полученный ряд сходится для $x \in (-5; 5]$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{5} - \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^n}{n} + ...\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{5^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{5^3} - ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{x^{n-1}}{5^n} + ...\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2\cdot 5^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3\cdot 5^3} - ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{x^n}{5^n} + ...\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2^2\cdot 5^3} + \frac{1}{3^2\cdot 5^4} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\cdot 5^n} + ...$$

Полученный числовой ряд знакочередующийся и, согласно теореме Лейбница, остаток ряда, взятый по модулю, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена. Таким образом, абсолютная погрешность будет меньше, чем первый отбрасываемый член, взятый по модулю, т. е. $|r_n| \le |a_{n+1}| < \varepsilon$. В нашем случае неравенство $\frac{1}{(n+1)^2\cdot 5^{n+1}} < 10^{-5}$ справедливо $\forall n \ge 4$. Тогда указанная точность достигается уже при $n = 4$, значит,

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)dx}{x} \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{2^2\cdot 5^3} + \frac{1}{3^2\cdot 5^4} - \frac{1}{4^2\cdot 5^5}.$$

Задание 8

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^{12} + 5x^3}$, используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Решение

Ряд Маклорена для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

Он сходится для любого $x \in$ Р. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^{12}+5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)-x}{x^{12}+5x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots}{x^{12}+5x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots\right)}{x^3(x^9+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots}{x^9+5}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x^2}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}+\cdots=\frac{x^2}{5!}+o(x^5)\\ \text{при }\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}}{5+x^9}=-\frac{1}{3!\cdot 5}=-\frac{1}{30}.$$

Задание 9

Представьте число $a=\sqrt[3]{9}$ в виде суммы сходящегося числового ряда. Какова будет точность вычисления данного числа, если взять первые четыре члена этого ряда?

Решение

Запишем данное число a в следующем виде:

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=(8+1)^{1/3}=8^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}=2\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

Для представления этого числа в виде суммы сходящегося числового ряда воспользуемся биноминальным рядом

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

сходящимся для всех $x\in[-1;1)$.

Тогда данное число $\sqrt[3]{9}$ будет суммой числового ряда, полученного при $x=\frac{1}{8}$, $\alpha=\frac{1}{3}$. Очевидно, что это сходящийся знакочередующийся ряд:

$$2\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}=2\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots\right).$$

Если, в соответствии с условием задачи, взять только первые четыре члена этого ряда, то, согласно признаку Лейбница, абсолютная погрешность вычислений $\varepsilon = r_4$ меньше, чем, взятый по модулю, пятый член ряда. Вычислим a_5 :

$$a_5=\frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{2\cdot3\cdot4\cdot8^4}=-\frac{5}{497664}.$$

Таким образом, $\varepsilon=|r_4|<|a_5|$, при этом $a_5\approx 2{,}01\cdot10^{-5}<10^{-4}$.

Значит, точность ε вычисления числа $\sqrt[3]{9}$ с помощью частичной суммы S_4 будет выше чем 10^{-4}.